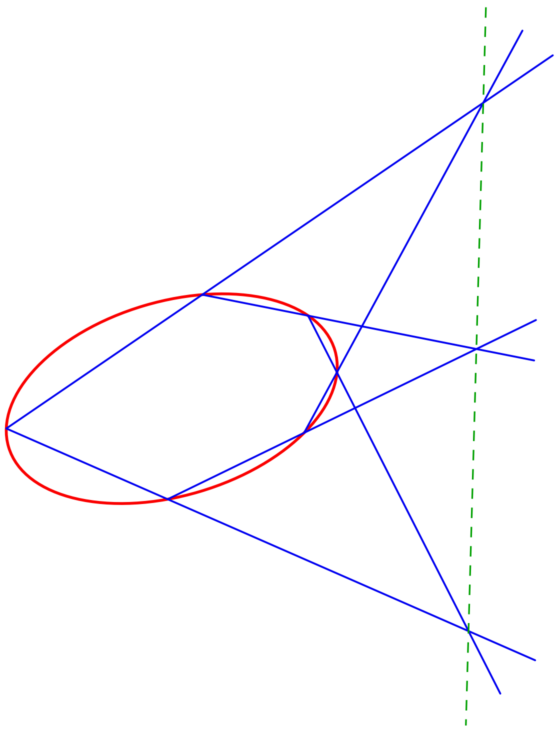
Projektív geometria

előadásjegyzet

matematikatanári szakos hallgatóknak



Verhóczki László

ELTE TTK Matematikai Intézet

Geometriai Tanszék

2021

Előszó

A jegyzet az ELTE matematikatanári szakos hallgatóinak tartott Projektív geometria c. előadáshoz készült a 2020/2021-es tanév 2. félévében. Mivel követi a tanárszakos tantárgy tematikáját, nem csupán projektív geometriai ismereteket tartalmaz.

A jegyzet első fejezetében a közönséges kúpszeletek, vagyis az ellipszis, a hiperbola és a parabola részletes tárgyalására kerül sor. Analitikus eszközöket alkalmazva belátjuk, hogy a kör merőleges vetülete ellipszis. Az ellipszis és a hiperbola esetében bevezetésre kerül a vezérkör és a főkör fogalma, majd tárgyaljuk ezek szerepét. Szintetikus módszerekkel (az úgynevezett Dandelin–gömböket felhasználva) igazoljuk, hogy ezek a görbék egy forgáskúp síkmetszeteiként állnak elő.

A második fejezetben a koordinátatranszformációkat és a másodrendű görbéket tanulmányozzuk az euklideszi síkban. Megmutatjuk, hogy az új koordináta–rendszerre való áttérésnél a koordináták közötti kapcsolat két lineáris összefüggéssel írható le, melyeket egyetlen mátrixegyenletbe lehet foglalni. Ezt követően bevezetjük a másodrendű görbe fogalmát. Megmutatjuk, hogy amennyiben alkalmas koordináta–rendszerre térünk át, akkor a másodrendű görbe egyenlete egy speciális alakot ölt. Tárgyaljuk az úgynevezett főtengelytranszformációt, amelynek lényege, hogy az új alapvektorokat a másodrendű görbe szimmetriatengelyeivel párhuzamosnak választjuk. A tanulmányozás során kiderül, hogy a nem elfajuló másodrendű görbék éppen a közönséges kúpszeletek.

A harmadik fejezet elején azt tárgyaljuk, hogy a centrális vetítés tulajdonságainak vizsgálata miért indokolja a párhuzamos egyenesosztályokhoz rendelt ideális pontok fogalmának a bevezetését. Ennek alapján az euklideszi térből kiindulva kibővítéssel értelmezzük a projektív egyeneseket, a projektív síkokat és a projektív teret. Mivel bijektív megfeleltetés adódik egy projektív sík pontjai és egy sugárnyaláb egyenesei között, a projektív sík pontjaihoz (és egyeneseihez) meghatározó vektorokat rendelhetünk, amelyek csak számszorzótól eltekintve egyértelműek. A meghatározó vektorokat alkalmazva a projektív síkon bevezetjük a homogén koordinátákat. A fejezet végén Desargues tételét tárgyaljuk két háromszög perspektivitásával kapcsolatban.

A negyedik fejezetben előbb a kollineáris pontnégyesek és a sugárnégyesek kettősviszonyának a fogalmát értelmezzük. Igazoljuk Papposz–tételét, amelynek egy következménye, hogy a centrális vetítés megőrzi a kettősviszonyt. Tanulmányozzuk a síkbeli projektív transzformációkat, vagy más szóval a kollineációkat. Kiderül, hogy a síkok közötti centrális vetítésekkel szoros kapcsolatban állnak az úgynevezett centrális–tengelyes kollineációk. Bebizonyítjuk, hogy a síkbeli kollineációt egy általános helyzetű pontnégyes és annak a képe már egyértelműen meghatározzák.

Az ötödik fejezetben a projektív sík másodrendű görbéit vizsgáljuk. Bevezetjük a közönséges projektív kúpszelet fogalmát, továbbá értelmezzük, hogy két pontot mikor mondunk egymáshoz konjugáltnak egy adott kúpszeletre nézve. Megmutatjuk, hogy a sík egy pontjához konjugált pontok egy egyenest alkotnak és a konjugáltság kapcsolatban áll a harmonikus pontnégyesekkel. Kiderül, hogy a közönséges kúpszelet egy adott pontjához konjugált pontok egyenese megegyezik a pontbeli érintővel. Értelmezzük a köri pontnégyes kettőviszonyát, majd azt követően a kúpszeleti kettősviszonyt. Bebizonyítjuk a kúpszeletekre vonatkozó Pascal–tételt és kimondjuk a Brianchon–tételt. Többek között igazoljuk, hogy a sík öt általános helyzetű pontján pontosan egy közönséges kúpszelet halad át.

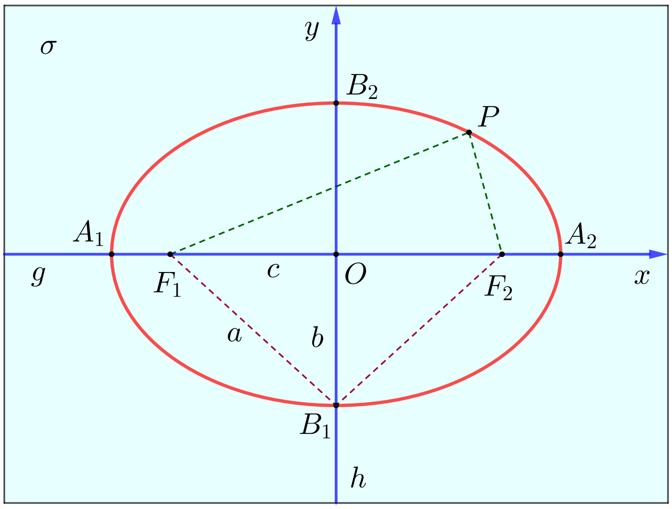
1) Kúpszeletek

Az ellipszis, a hiperbola és a parabola fogalmát már ismerjük. Az Analitikus geometria tárgy keretében meghatároztuk ezen alakzatok kanonikus egyenletét. A korábbi ismeretek felidézését követően ezúttal részletesen is tanulmányozzuk ezeket a speciális síkbeli alakzatokat, vagy más szóval mértani helyeket. Kiderül, hogy ezek a másodfokú egyenlettel leírt görbék előállnak egy forgáskúp síkmetszeteként, és emiatt nevezik őket kúpszeleteknek.

Az ellipszis

1.1. Definíció. Egy σ síkban legyenek adva az $F_1,\ F_2$ pontok és egy a pozitív valós szám, amelyre fennáll $2a > F_1F_2$. Az $F_1,\ F_2$ fókuszpontokkal és a $2a$ nagytengelyhosszal meghatározott σ–beli ellipszisen a sík azon pontjainak halmazát értjük, melyeknél a fókuszpontoktól mért távolságok összege $2a$.

Megjegyzés. A fenti definíciót a következő formában is kimondhatjuk. Az $F_1,\ F_2$ fókuszpontokkal és a $2a$ nagytengelyhosszal meghatározott σ–beli ellipszisen az $\mathcal{E} = \{\ P \in \sigma \mid F_1P + F_2P = 2a\ \}$ alakzatot értjük.



1. ábra. *Ellipszis az $F_1,\ F_2$ fókuszpontokkal és a $2a = A_1A_2$ nagytengelyhosszal.*

Megjegyzés. Amennyiben az $F_1,\ F_2$ fókuszpontok egybeesnek ($F_1 = F_2$), akkor a fenti definícióval leírt ellipszis megegyezik egy a sugarú körrel. Eszerint a köröket úgy is tekinthetnénk, mint speciális ellipsziseket. Azonban megállapodás szerint a továbbiakban mindig feltesszük, hogy az ellipszis fókuszpontjai különbözőek, azaz $F_1 \neq F_2$.

A σ síkban vegyünk egy ellipszist, amelynek fókuszpontjai F_1 és F_2, nagytengelyhossza pedig $2a$. Könnyű belátni, hogy a $g = \langle F_1, F_2 \rangle$ egyenesre és az $\overline{F_1F_2}$ szakasz h felező merőlegesére való tükrözés az ellipszist önmagába viszi. Ugyanis, a g egyenesre történő tükrözés a két fókuszpontot fixen hagyja, a h egyenesre történő tükrözés pedig felcseréli.

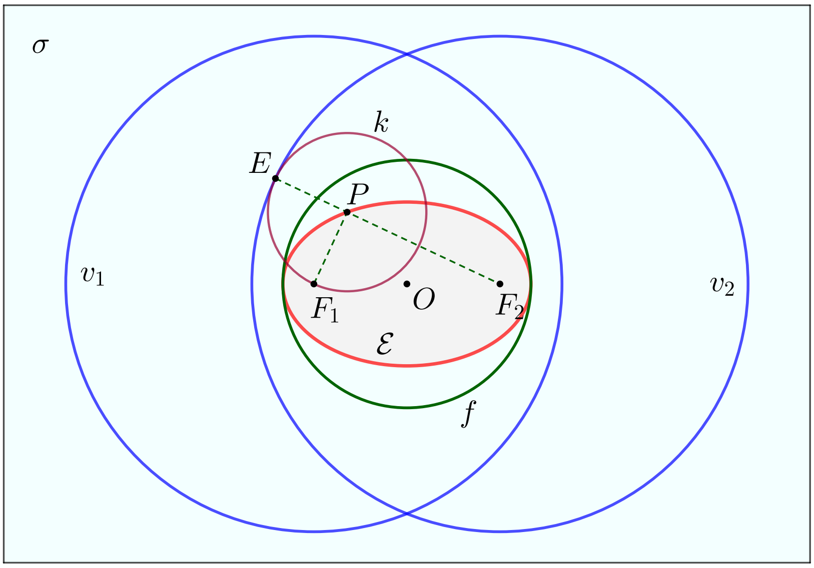
Mivel az egyenesre történő tükrözés egy távolságtartó transzformáció, ezen tükrözéseknél az ellipszis pontjainak képei szintén az ellipszisen vannak. Emiatt ezeket a g, h egyeneseket az ellipszis szimmetriatengelyeinek nevezzük. Az $\overline{F_1F_2}$ szakasz felezőpontja legyen O. Világos, hogy az O pontra történő tükrözés is önmagába képezi az ellipszist. Az O pontot az ellipszis centrumának (vagy középpontjának) mondjuk.

A két fókuszon átmenő $g = \langle F_1, F_2 \rangle$ egyenesen vegyük azon A_1, A_2 pontokat, amelyekre fennáll $OA_1 = a$, $OA_2 = a$. Nyilvánvaló, hogy az A_1, A_2 pontok esetében a fókuszoktól mért távolságok összege $2a$, tehát rajta vannak az ellipszisen. A $2a$ hosszúságú $\overline{A_1A_2}$ szakaszt az ellipszis nagytengelyének nevezzük. (Lásd az 1. ábrát.)

Tekintsük azon B_1, B_2 pontokat, amelyek a két fókuszponttól egyaránt a távolságra vannak. Kézenfekvő, hogy B_1 és B_2 az ellipszis azon pontjai, amelyek az $\overline{F_1F_2}$ szakasz h felező merőlegesére esnek. A $\overline{B_1B_2}$ szakaszt az ellipszis kistengelyének mondjuk. Jelölje b a kistengely hosszának felét (azaz legyen $b = \frac{1}{2}\, B_1B_2$), c pedig a fókuszpontok távolságának felét (azaz legyen $c = \frac{1}{2}\, F_1F_2$). Az $F_1OB_1\triangle$ derékszögű háromszög alapján az $a^2 = b^2 + c^2$ összefüggést nyerjük.

Az ellipszis vezérkörei

1.2. Definíció. Egy σ síkban legyen adva egy ellipszis az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a$ nagytengelyhosszal. Az F_1, F_2 fókuszpontok köré írt $2a$ sugarú köröket az ellipszis vezérköreinek nevezzük.



2. ábra. *Az $\mathcal{E}$ ellipszis v_1, v_2 vezérkörei és f főköre.*

Megjegyzés. A továbbiakban az F_1 centrumú vezérkört v_1, az F_2 centrumút pedig v_2 fogja jelölni. Világos, hogy az ellipszis a vezérkörök belsejében van.

Mint ismeretes, két egyazon σ síkban lévő körről akkor mondjuk, hogy érintik egymást, ha a két körnek pontosan egy közös pontja van. Könnyen belátható, hogy az O_1 középpontú r_1 sugarú kör abban az esetben érinti az O_2 középpontú ($O_2 \neq O_1$) és r_2 sugarú kört, ha az $r_1 + r_2 = O_1O_2$, $|r_1 - r_2| = O_1O_2$ összefüggések egyike teljesül. $r_1 + r_2 = O_1O_2$ fennállása esetén a körök kívülről érintik egymást, ha pedig $|r_1 - r_2| = O_1O_2$ igaz, akkor az egyik kör belülről érinti a másikat.

Amennyiben a két kör érinti egymást, akkor O_1, O_2 és a közös E pont egy egyenesre illeszkednek, továbbá a köröknek az E pontbeli érintője megegyezik.

1.3. Állítás. *A síkban legyen adott egy ellipszis, amelynek fókuszpontjai F_1, F_2 és nagytengelyhossza $2a$. Egy P pont rajta van az ellipszisen akkor és csak akkor, ha a P centrumú és $r = PF_1$ sugarú kör érinti az F_2 középpontú v_2 vezérkört.*

Bizonyítás.
Vegyük a síknak egy P pontját és a P centrumú $r = PF_1$ sugarú k kört. A P pont pontosan akkor van rajta az ellipszisen, ha fennáll a $PF_1 + PF_2 = 2a$ egyenlőség, vagyis ha teljesül $2a - r = PF_2$. Ez az összefüggés pedig akkor és csak akkor áll fenn, ha a k kör belülről érinti a v_2 vezérkört. (Lásd a 2. ábrát.) Ezzel az állításunk igazolást nyert. □

Az ellipszis kanonikus egyenlete

A σ síkban legyen adott egy ellipszis, amelynek nagytengelyhossza $2a$, kistengelyhossza pedig $2b$. A síkban vegyük azt az $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ Descartes–féle koordináta–rendszert, ahol az O megegyezik az ellipszis centrumával, az $\mathbf{i}$ egységvektor párhuzamos a nagytengellyel és a $\mathbf{j}$ alapvektor párhuzamos a kistengellyel. Eszerint az x, y koordinátatengelyek az ellipszisnek a szimmetriatengelyei.

A korábbi tanulmányok során már igazoltuk az alábbi állítást.

1.4. Állítás. *A σ sík egy P pontja rajta van az ellipszisen akkor és csak akkor, ha a P koordinátái kielégítik az* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *egyenletet.*

Megjegyzés. Az előző állítás szerint amennyiben a síkbeli koordináta-rendszert úgy választjuk meg, hogy annak tengelyei essenek egybe az ellipszis szimmetriatengelyeivel, akkor az ellipszist az $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ egyenlet írja le. Ezt szokás az ellipszis kanonikus (vagy más szóval középponti) egyenletének nevezni.

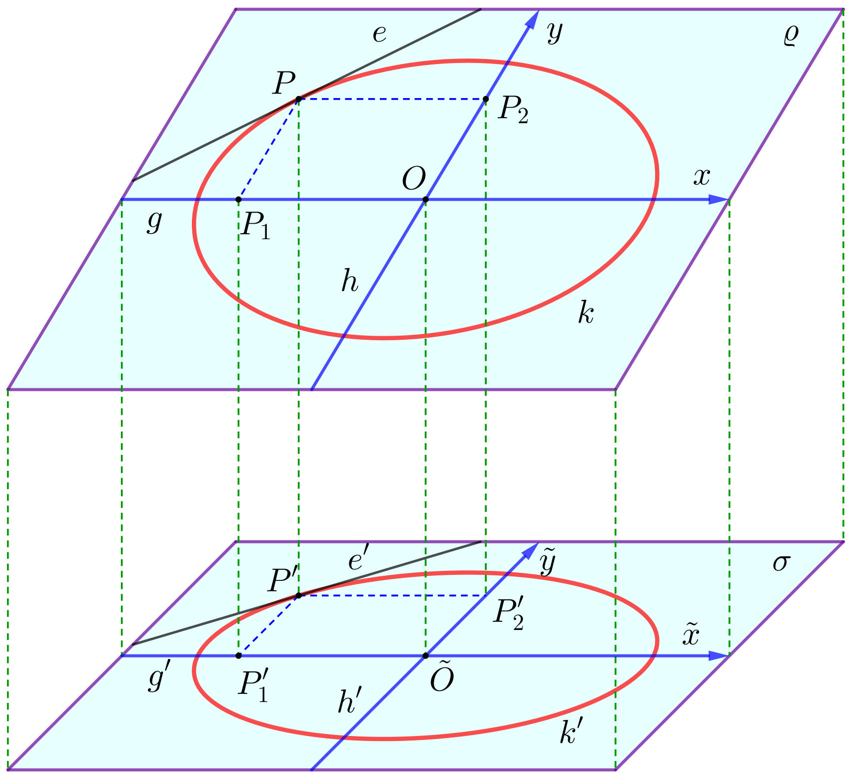
A kanonikus egyenlet alapján már azt is be lehet bizonyítani, hogy a kör merőleges vetülete egy ellipszis.

1.5. Állítás. *A térnek egy ϱ síkjában legyen adva egy k kör, amelynek centruma O és sugara a. Tekintsünk egy a ϱ-t metsző σ síkot, amelynek a ϱ-val vett hajlásszöge φ ($\varphi < 90°$). A k körnek a σ-ra eső k' merőleges vetülete egy olyan ellipszis, amelynek nagytengelyhossza $2a$, a kistengelyhossza pedig $2b = 2a \cdot \cos\varphi$.*

Bizonyítás.
A ϱ síkban legyen g az az O centrumon átmenő egyenes, amely párhuzamos a σ síkkal. Jelölje h azt az O–n áthaladó ϱ–beli egyenest, amely merőleges g–re. Világos, hogy h–nak a σ–val bezárt szöge éppen φ.

A ϱ síkban vegyük azt a derékszögű koordináta–rendszert, amelynek x tengelye a g egyenes, az y tengelye pedig a h egyenes. Ebben a speciális koordináta–rendszerben a k

kört az $x^2+y^2=a^2$ egyenlet írja le.



3. ábra. *A ϱ síkbeli k körnek a σ síkra eső k' merőleges vetülete egy ellipszis.*

A g, h egyeneseknek a σ síkra eső merőleges vetületei legyenek g' és h'. Vegyük észre, hogy a g', h' egyenesek is merőlegesek egymásra. A ϱ síkban vegyük azt a derékszögű koordináta–rendszert, amelynek $\tilde{x}$ tengelye a g' egyenes, az $\tilde{y}$ tengelye pedig a h' egyenes. A tengelyek irányítása feleljen meg a ϱ síkbeli tengelyek irányításának. A σ–beli koordináta–rendszer $\tilde{O}$ kezdőpontja tehát megegyezik a ϱ síkbeli O origó vetületével, azaz $\tilde{O}=O'$.

Vegyünk a ϱ síkban egy tetszőleges P pontot, továbbá annak P' vetületét σ–ban. A P pontból a koordinátatengelyekhez húzott merőleges szakaszok talppontjai legyenek P_1 és P_2. Mint ismeretes, a P pont x_P, y_P koordinátáira fennáll $OP_1=|x_P|$ és $OP_2=|y_P|$. Mivel az OP_1 szakasz párhuzamos σ–val, az OP_2 szakasz pedig φ szöget zár be vele, a vetületi szakaszok hosszaira

$$\tilde{O}P_1'=OP_1, \qquad \tilde{O}P_2'=OP_2\cdot\cos\varphi$$

teljesül. Ennek következtében a P, P' pontok koordinátái között fennállnak az $\tilde{x}_{P'}=x_P$ és $\tilde{y}_{P'}=y_P\cdot\cos\varphi$ összefüggések.

A P' pont rajta van a kör k' vetületén akkor és csak akkor, ha a P pont rajta van a k körön. Ez utóbbi pedig akkor áll fenn, ha a P pont $x_P = \tilde{x}_{P'}$ és $y_P = \dfrac{1}{\cos\varphi}\,\tilde{y}_{P'}$ koordinátáira teljesül az

$$(\tilde{x}_{P'})^2 + \left(\frac{\tilde{y}_{P'}}{\cos\varphi}\right)^2 = a^2$$

egyenlőség. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát az $\dfrac{1}{a^2}$ pozitív számmal és vezessük be a $b = a \cdot \cos\varphi$ jelölést. Azt kapjuk, hogy a P' vetületi pont pontosan akkor van rajta a k' vetületi görbén, ha a koordinátái kielégítik az

$$\frac{(\tilde{x}_{P'})^2}{a^2} + \left(\frac{\tilde{y}_{P'}}{a\ \cos\varphi}\right)^2 = 1$$

egyenletet. Ebből már következik, hogy a σ síkban a k' vetületi alakzatot az $\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1$ egyenlet írja le. Az 1.4. Állítás szerint a k' vetületi görbe egy olyan ellipszis, amelynél a nagytengelyhossz megegyezik a k kör $2a$ átmérőjével, a kistengelyhossz pedig
$2b = 2a \cdot \cos\varphi$. $\square$

Az ellipszis érintői

1.6. Definíció. Egy σ síkban legyen adva egy ellipszis az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a$ nagytengelyhosszal. A sík egy Q pontját az ellipszis külső pontjának mondjuk, ha fennáll az $F_1Q + F_2Q > 2a$ egyenlőtlenség.

Egy σ–beli R pontot az ellipszis belső pontjának nevezünk, ha teljesül $F_1R + F_2R < 2a$.

1.7. Definíció. Az ellipszis síkjába eső egyenest az ellipszis érintőjének mondjuk, ha az egyenesnek egyetlen közös pontja van az ellipszissel. Az egyetlen közös pontot érintési pontnak nevezzük.

Az alábbi állítás azt mondja ki, hogy az ellipszisnek tetszőleges pontjához pontosan egy érintőegyenes tartozik.

1.8. Állítás. *Az ellipszist bármely pontjában pontosan egy egyenes érinti.*

Bizonyítás.

Az előzőek során az 1.5. Állításnál már igazoltuk, hogy egy ellipszis mindig előáll egy kör merőleges vetületeként. (Lásd a 3. ábrát.) A merőleges vetítés egy bijektív, egyenestartó és osztóviszonytartó megfeleltetést létesít a k kört tartalmazó ϱ sík és a k' vetületi ellipszist tartalmazó σ sík között. Ez a merőleges vetítés megfelelteti egymásnak a k kör és a k' ellipszis érintőegyeneseit. Mivel a k körnek bármely P pontjához egyértelműen tartozik érintő, ugyanez igaz az ellipszis esetében is. $\square$

Az 1.5. Állítás alapján könnyen beláthatóak a következő kijelentések.

Következmény. *Tekintsük az ellipszis egy P pontját és abban az érintőegyenest. Az érintőnek a P–től különböző pontjai az ellipszisnek külső pontjai.*

Következmény. *Két olyan egyenes halad át egy külső ponton, amely érinti az ellipszist.*

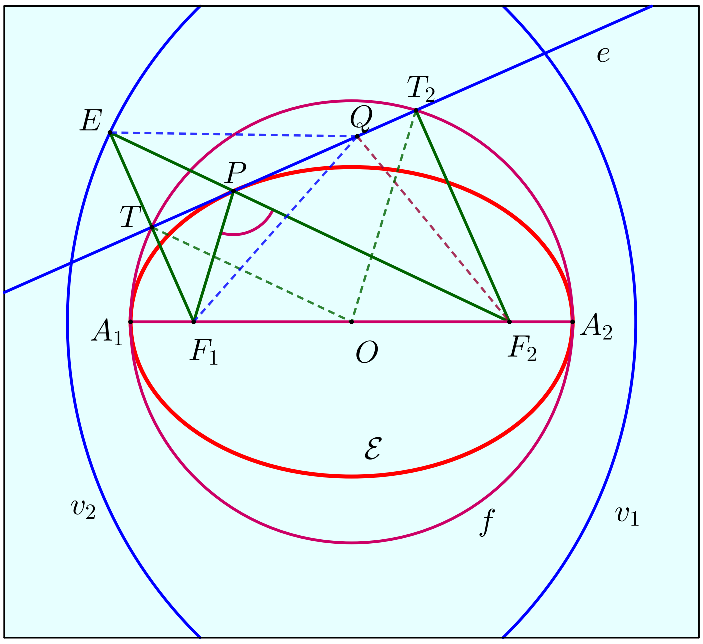
Az ellipszisnek egy adott pontbeli érintőjét a fókuszpontok ismeretében meg is tudjuk szerkeszteni az alábbi állítás szerint.

1.9. Állítás. *A σ síkban legyen adott egy ellipszis, amelynek fókuszpontjai F_1, F_2 és nagytengelyhossza $2a$. Vegyük az ellipszis egy P pontját. Az $F_1PF_2\sphericalangle$ szög mellékszögeinek a szögfelező egyenese megegyezik az ellipszis P–beli érintőegyenesével.*

Bizonyítás.
Az F_2P szakasz P ponton túli meghosszabbítására mérjük fel az F_1P hosszt és a felméréssel kapott pontot jelölje E. Eszerint igaz $F_1P = PE$. (Lásd a 4. ábrát.) Világos, hogy fennáll $F_2E = F_2P + PE = F_2P + F_1P = 2a$, vagyis az E pont rajta van az F_2 centrumú v_2 vezérkörön.

Jelölje e az $\overline{F_1E}$ szakasz felezőmerőleges egyenesét. Mivel az $F_1PE\triangle$ egy egyenlő szárú háromszög, az e egyenes felezi az $F_1PE\sphericalangle$ szöget, amely az $F_1PF_2\sphericalangle$ szög egyik mellékszöge.

Tekintsük az e egyenesnek egy a P–től különböző Q pontját. Világos, hogy az $F_2EQ\triangle$ háromszögre fennáll az $EQ + F_2Q > F_2E$ egyenlőtlenség. A Q pont rajta rajta van az $\overline{F_1E}$ szakasz felező merőlegesén, tehát igaz $F_1Q = EQ$ és $F_2E = 2a$. Ezt felhasználva az $F_1Q + F_2Q > 2a$ egyenlőtlenséghez jutunk, ami azt mutatja, hogy Q egy külső pontja az ellipszisnek.



4. ábra. *Az ellipszis P pontbeli e érintője az $F_1PF_2\sphericalangle$ mellékszögeinek a szögfelező egyenese.*

Ezzel pedig beláttuk, hogy az e egyenesnek az ellipszissel egyetlen közös pontja van, nevezetesen a P pont. Tehát az $F_1PF_2\sphericalangle$ szög mellékszögeinek e szögfelelző egyenese az ellipszisnek a P pontbeli érintője. $\square$

Az előző állítás bizonyítása során beláttuk azt is, hogy az F_1 fókusznak az e érintőre vonatkozó tükörképe az E pont, amely rajta van a v_2 vezérkörön. Emiatt igaz az alábbi kijelentés is.

Következmény. *Legyen adott egy ellipszis, amelynek fókuszpontjai F_1, F_2 Az F_1–nek az érintőegyenesekre vonatkozó tükörképei befutják a v_2 vezérkört, az F_2–nek az érintőegyenesekre vonatkozó tükörképei pedig leírják a v_1 vezérkört.*

1.10. Definíció. Legyen adva a síkban egy ellipszis, amelynek középpontja O és nagytengelyhosszának fele a. Az O centrumú és a sugarú kört az ellipszis főkörének nevezzük.

A főkör és az érintők kapcsolatát világítja meg a következő állítás.

1.11. Állítás. *Az ellipszis fókuszaiból az érintőkhöz húzott merőleges szakaszok talppontjai rajta vannak az f főkörön.*

Bizonyítás.

Alkalmazzuk az előző állítás igazolása során bevezetett jelölést. (Lásd a 4. ábrát.) Tekintsük az ellipszis egy P pontját. Legyen E az $[F_2, P\rangle$ félegyenes azon pontja amelyre fennáll $F_2E = 2a$ és $PE = PF_1$. Beláttuk, hogy az $\overline{F_1E}$ szakasz e felező merőlegese adja a P pontbeli érintőt. Emiatt az F_1 fókuszból az e érintőhöz húzott merőleges szakasz T talppontja megegyezik az $\overline{F_1E}$ szakasz felezőpontjával.

Az alábbiak során megmutatjuk, hogy a T pontnak az ellipszis O középpontjától mért távolsága éppen a. Vegyük az $F_1OT\triangle$ és $F_1F_2E\triangle$ háromszögeket, melyeknek az F_1 csúcsbeli szöge azonos. Az F_1 csúcsból kiinduló oldalakra pedig fennáll $F_1O = \frac{1}{2} \cdot F_1F_2$ és $F_1T = \frac{1}{2} \cdot F_1E$. Emiatt a két háromszög hasonló egymással és a harmadik oldalakra fennáll $OT = \frac{1}{2} \cdot F_2E = a$. Ezzel igazoltuk, hogy a T talppont rajta van az O centrumú és a sugarú körön, azaz az f főkörön.

Világos, hogy az F_2 fókuszból az e érintőegyeneshez húzott merőleges szakasz T_2 végpontja ugyancsak az f főkörre esik. □

Megjegyzés. Az előző állítás bizonyítása kapcsán vegyük észre, hogy az $\overline{OT}$ szakasz az $F_1F_2E\triangle$ háromszögnek középvonala. Ily módon az $OT = \frac{1}{2} \cdot F_2E = a$ összefüggés mellett még az is teljesül, hogy az $\langle O, T\rangle$ és $\langle F_2, E\rangle$ egyenesek párhuzamosak egymással.

1.12. Definíció. Legyen adva egy ellipszis, amelynél a nagytengelyhossz $2a$ és a fókuszpontok távolsága $2c$. Az ellipszis numerikus excentricitásán a $\varepsilon = c/a$ hányadost értjük.

Megjegyzés. Könnyű belátni, hogy két ellipszis egymással hasonló akkor és csak akkor, ha a numerikus excentricitásuk megegyezik.

Az ellipszislemez

1.13. Definíció. Egy σ síkban legyen adva egy $\mathcal{E}$ ellipszis az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a$ nagytengelyhosszal. Az általa határolt ellipszislemezen az
$\mathcal{L} = \{\ P \in \sigma \mid F_1P + F_2P \leq 2a\ \}$ alakzatot értjük.

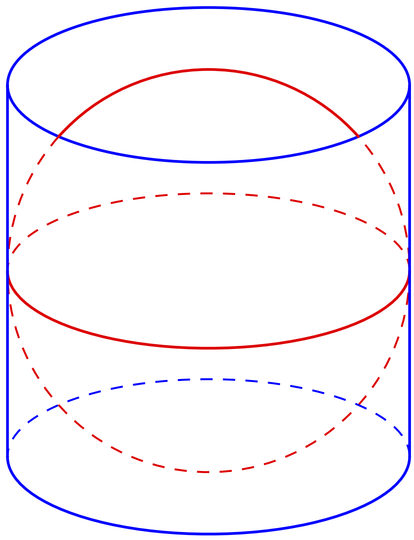
Megjegyzés. Könnyű belátni, hogy az ellipszislemez egy olyan síkbeli alakzat, amely konvex. Ez egyébként következik abból is, hogy a merőleges vetítés konvex alakzatot konvex alakzatba képez és az ellipszislemez előáll egy körlemez merőleges vetületeként. (Lásd az 1.5. Állítást.)

Igazolható továbbá, hogy amennyiben az ellipszis féltengelyhosszai a és b, akkor az $\mathcal{L}$ ellipszislemez területe $T(\mathcal{L}) = a\,b\,\pi$.

Az ellipszis gyakori megjelenése a vetülettel történő ábrázolásban

A térbeli alakzatokat gyakran szokás síkbeli merőleges vetületekkel ábrázolni. Mivel a kör merőleges vetülete ellipszis, a peremkörrel rendelkező alakzatok vetületeinél ellipsziseket találunk.

Az 5. ábrán egy gömb és az őt befoglaló körhenger merőleges vetülete szerepel. A forgáshenger magassága azonos a gömb átmérőjével, és a henger az egyik főköre mentén érinti a gömböt.



5. ábra. *A gömb és a befoglaló henger egyik merőleges vetülete.*

A hiperbola

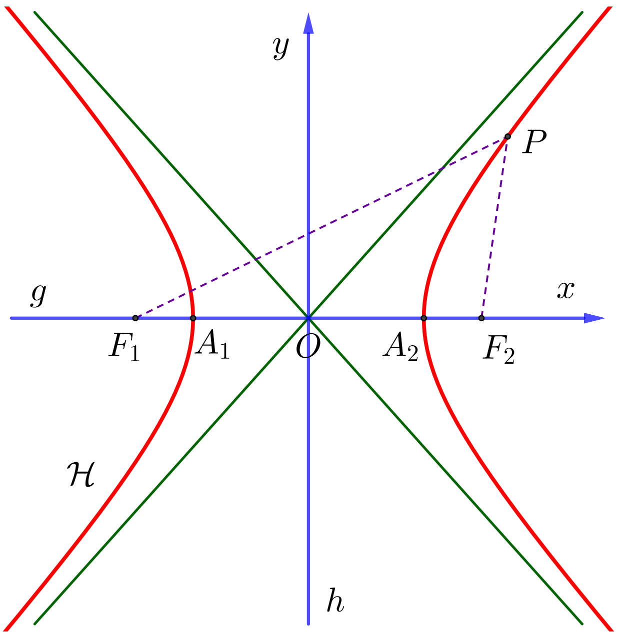
1.14. Definíció. Egy σ síkban legyenek adva az F_1, F_2 pontok és egy a pozitív valós szám, amelyre fennáll $2a < F_1F_2$. Az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a$ valós tengelyhosszal meghatározott σ–beli hiperbolán a sík azon pontjainak halmazát értjük, melyeknél a fókuszpontoktól mért távolságok különbségének az abszolút értéke $2a$.

Megjegyzés. A fenti definíciót a következő formában is kimondhatjuk. Az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a$ valós tengelyhosszal meghatározott σ–beli hiperbolán a $\mathcal{H} = \{\ P \in \sigma \mid |F_1P - F_2P| = 2a\ \}$ alakzatot értjük.

A σ síkban tekintsünk egy hiperbolát, amelynek fókuszpontjai F_1 és F_2, a tengelyhossza pedig $2a$. Akárcsak az ellipszis esetében, ezúttal is alkalmazzuk a $c = \frac{1}{2}\,F_1F_2$ jelölést. Könnyen be lehet látni, hogy a $g = \langle\, F_1, F_2 \,\rangle$ egyenes és az $\overline{F_1F_2}$ szakasz h felezőmerőleges egyenese egyaránt szimmetriatengelye a hiperbolának. A hiperbola szimmetriacentruma az $\overline{F_1F_2}$ szakasz O felezőpontja lesz, mivel az O–ra történő tükrözés önmagába viszi a hiperbolát.

A $g = \langle\, F_1, F_2 \,\rangle$ egyenesen vegyük azon A_1, A_2 pontokat, amelyekre fennáll $OA_1 = a$, $OA_2 = a$. A definíció alapján azonnal adódik, hogy az A_1, A_2 pontok rajta vannak a hiperbolán. A $2a$ hosszúságú $\overline{A_1A_2}$ szakaszt mondjuk a hiperbola valós tengelyének. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy az $\overline{F_1F_2}$ szakasz h felezőmerőlegesén a hiperbolának nincs pontja.

A hiperbolának az egyik fókuszhoz közelebbi pontjai alkotják a hiperbola egyik ágát. A hiperbola két ágát a h egyenes elválasztja egymástól.



6. ábra. *Hiperbola az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a = A_1A_2$ valós tengelyhosszal.*

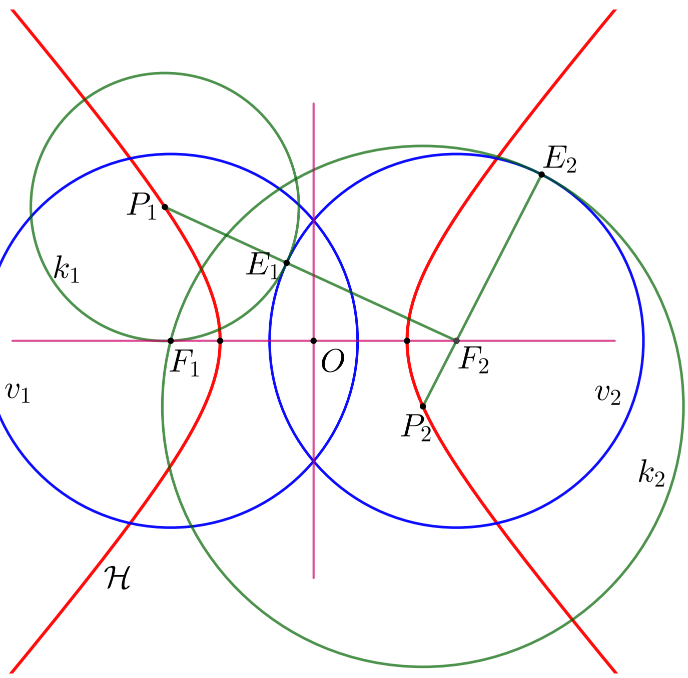
A hiperbola vezérköreinek szerepe

1.15. Definíció. Egy σ síkban legyen adva egy hiperbola az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a$ valós tengelyhosszal. Az F_1, F_2 fókuszpontok köré írt $2a$ sugarú köröket a hiperbola vezérköreinek nevezzük.

A továbbiakban az F_1 centrumú vezérkört v_1, az F_2 középpontú vezérkört pedig v_2 fogja jelölni. Ahogyan az ellipszis esetében, ezúttal is megadható egy egyszerű kritériuma annak, hogy a sík valamely pontja illeszkedjen a hiperbolára.

1.16. Állítás. *A síkban legyen adott egy hiperbola, amelynek fókuszpontjai F_1, F_2 és valós tengelyhossza $2a$. Egy P pont rajta van a hiperbolán akkor és csak akkor, ha a P centrumú és $r = PF_1$ sugarú kör érinti az F_2 középpontú v_2 vezérkört.*

Bizonyítás.
Világos, hogy a sík egy P pontja akkor és csak akkor van rajta az F_1 fókuszhoz közelebbi hiperbolaágon, ha fennáll az $F_2P - F_1P = 2a$ egyenlőség, vagyis ha igaz $PF_1 + 2a = F_2P$. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha a P centrumú és $r = PF_1$ sugarú k kör kívülről érinti az F_2 középpontú v_2 vezérkört. (Lásd a 7. ábrán a P_1 pontot.)



7. ábra. *A hiperbola egy P pontja köré írt PF_1 sugarú k kör érinti a v_2 vezérkört.*

Egy síkbeli P pont akkor van rajta az F_2 fókuszhoz közelebbi hiperbolaágon, ha igaz az $F_1P - F_2P = 2a$ összefüggés, azaz ha $PF_1 - 2a = PF_2$ teljesül. Ez viszont akkor áll fenn, ha az F_2 centrumú v_2 vezérkör belülről érinti a k kört. $\square$

A hiperbola kanonikus egyenlete

A tér egy σ síkjában legyen adott egy hiperbola, amelynek fókuszpontjai F_1, F_2 és valós tengelyhossza $2a$. A fókuszpontok távolságának felét jelölje c, azaz legyen $c = \frac{1}{2}F_1F_2$. Tekintsük a $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ összefüggéssel meghatározott b pozitív számot. A $2b$ hosszt nevezik a hiperbola képzetes tengelyhosszának.

A hiperbola síkjában vegyünk egy olyan (O, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$) derékszögű koordináta–rendszert, ahol az O kezdőpont megegyezik a hiperbola centrumával, az $\mathbf{i}$ egységvektor pedig párhuzamos a fókuszpontok egyenesével. Világos, hogy ez esetben az x, y koordinátatengelyek a hiperbolának szimmetriatengelyei. (Lásd a 6. ábrát.) A továbbiakban majd ezt a koordináta–rendszert alkalmazzuk.

Az analitikus geometriai tanulmányok során már igazoltuk az alábbi állítást.

1.17. Állítás. *A sík egy P pontja rajta van a hiperbolán akkor és csak akkor, ha a P koordinátái kielégítik az* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *egyenletet.*

Megjegyzés. Az előző állítás szerint amennyiben a síkbeli koordináta–rendszert úgy választjuk meg, hogy annak tengelyei essenek egybe a hiperbola szimmetriatengelyeivel, akkor a hiperbolát az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenlet írja le. Ezt nevezik a hiperbola kanonikus (vagy más szóval középponti) egyenletének.

Tekintsük az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ egyenletet. Könnyű belátni, hogy az általa leírt síkbeli alakzat megegyezik két olyan egyenes uniójával, amelyek áthaladnak az O kezdőponton. Ugyanis, az egyenlet jobb oldalán szereplő kifejezés felírható szorzat alakban: $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$. Ez alapján célszerű bevezetni az alábbi fogalmat.

1.18. Definíció. Az $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ és $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ egyenletekkel leírt síkbeli egyeneseket a hiperbola aszimptotáinak mondjuk.

Megjegyzés. Világos, hogy az aszimptotáknak nincs a hiperbolára eső pontjuk, továbbá az aszimptoták összes pontja a hiperbolának külső pontja. (A 6. ábrán fel vannak tüntetve az aszimptoták is.) Analitikus módszerrel azt is be lehet bizonyítani, hogy ha veszünk egy tetszőlegesen kis ε pozitív valós számot, akkor mindig meg lehet adni a hiperbolát az aszimptotákkal összekötő olyan szakaszokat, amelyek hossza kisebb ε–nál.

Emiatt szokás azt mondani, hogy a hiperbolaágak a végtelenben hozzásimulnak a két aszimptotához.

A hiperbola érintői

1.19. Definíció. Egy σ síkban legyen adva egy hiperbola az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a$ valós tengelyhosszal. A sík egy Q pontját a hiperbola külső pontjának mondjuk, ha fennáll az $|F_1Q - F_2Q| < 2a$ egyenlőtlenség.
Egy σ–beli R pontot a hiperbola belső pontjának nevezünk, ha teljesül $|F_1R - F_2R| > 2a$.

Megjegyzés. Világos, hogy az O centrum a hiperbolának egy külső pontja, az F_1, F_2 fókuszok pedig belső pontok.

1.20. Definíció. A hiperbola síkjában lévő egyenest a hiperbola érintőjének mondjuk, ha egyetlen közös pontja van a hiperbolával és az egyenes összes többi pontja a hiperbolának külső pontja. Az egyetlen közös pontot érintési pontnak nevezzük.

Megjegyzés. Koordinátageometriai eszközökkel igazolható, hogy a hiperbola bármely pontján át három olyan egyenes is halad, amelynek a hiperbolával egyetlen közös pontja van. Azonban a három egyenes közül csak az egyik érinti a hiperbolát az adott pontban. A másik két egyenes az aszimptotákkal párhuzamos és ezeken belső pontok is vannak.

A hiperbola egy adott pontbeli érintőjét szögfelezőként is megkaphatjuk az az alábbi állítás szerint.

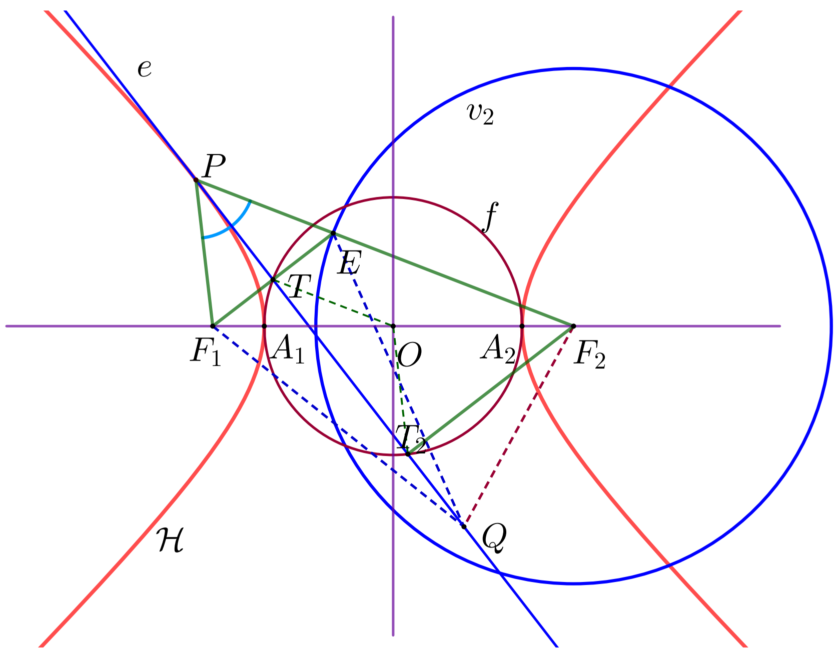
1.21. Állítás. *A síkban legyen adott egy hiperbola, amelynek fókuszpontjai F_1, F_2 és valós tengelyhossza $2a$. Vegyük a hiperbola egy P pontját. Az $F_1PF_2\sphericalangle$ szög szögfelező egyenese megegyezik a hiperbola P–beli érintőegyenesével.*

Bizonyítás.

Az általánosság elvének megsértése nélkül feltehetjük, hogy a kiválasztott P pont a hiperbola F_1–hez közelebbi ágán van. Ily módon teljesül $F_2P - F_1P = 2a$.

A $\overline{PF_2}$ szakaszra a P pontból mérjük fel az F_1P hosszt és a felméréssel kapott pontot jelölje E. Világos, hogy $F_1P = PE$ következtében fennáll $F_2E = F_2P - PE = F_2P - F_1P = 2a$, Eszerint az E pont rajta van az F_2 centrumú v_2 vezérkörön. (Lásd a 8. ábrát.)

Legyen e az $\overline{F_1E}$ szakasz felezőmerőleges egyenesét. Mivel az $F_1PE\triangle$ egy egyenlő szárú háromszög, az e egyenes felezi az $F_1PE\sphericalangle$ szöget.



8. ábra. *A hiperbola P pontbeli e érintője az $F_1PF_2\sphericalangle$ szög szögfelező egyenese.*

Mint ismeretes, egy háromszögben két oldal különbsége mindig kisebb a harmadik oldalnál. Tekintsük az e egyenesnek egy a P–től különböző Q pontját. Világos, hogy az $F_2EQ\triangle$ háromszögben teljesül az $|EQ - F_2Q| < F_2E$ egyenlőtlenség. A Q pont rajta rajta van az $\overline{F_1E}$ szakasz felező merőlegesén, tehát igaz $F_1Q = EQ$ és $F_2E = 2a$. Ezt felhasználva az $|F_1Q - F_2Q| < 2a$ egyenlőtlenséghez jutunk, ami azt mutatja, hogy Q egy külső pontja az ellipszisnek. Mivel az e szögfelező egyenesnek a P–től különböző pontjai a hiperbolának külső pontjai, az előző definíció alapján az e egyenes adja a P pontbeli érintőt. □

A fenti bizonyítás során igazoltuk azt is, hogy az F_1 fókusznak az e érintőre vonatkozó tükörképe az E pont, amely rajta van a v_2 vezérkörön. Ennek következtében az alábbi kijelentést tehetjük.

Következmény. *Legyen adott egy hiperbola, amelynek F_1 és F_2 a fókuszpontjai. Az F_1–nek az érintőegyenesekre vonatkozó tükörképei a v_2 vezérkörre esnek, az F_2–nek az érintőegyenesekre vonatkozó tükörképei pedig rajta vannak a v_1 vezérkörön.*

A korábbi vizsgálatok során azt is beláttuk, hogy igaz az alábbi kijelentés.

Következmény. *Tekintsük a hiperbola egy P pontját és abban az e érintőegyenest. A F_1 fókusznak az e érintőre vonatkozó tükörképe legyen E. Ekkor a P centrumú és $r = PF_1$ sugarú k kör az E pontban érinti a v_2 vezérkört, továbbá az F_2, P, E pontok kollineárisak.*

Megjegyzés. Emlékezzünk rá, hogy mivel az ellipszis mindig előállítható egy kör merőleges vetületeként, egy külső pontból mindig két érintőegyenes húzható az ellipszishez.

A hiperbola esetében azonban már más a helyzet. Vegyük észre, hogy a hiperbolának nincs olyan érintője, amely áthalad az O középponton, amely egy kitüntetett külső pont. Ugyanis, ha egy O–n átmenő egyenesnek a hiperbolával van egy közös pontja, akkor annak az O centrumra vonatkozó tükörképe szintén egy közös pont.

1.22. Definíció. Legyen adva a síkban egy hiperbola, amelynek középpontja O és valós tengelyhosszának fele a. Az O centrumú és a sugarú kört a hiperbola főkörének nevezzük.

A továbbiakban a hiperbola főkörét jelölje f. (Lásd a 8. ábrát). A következő állítás és annak bizonyítása megfelel az ellipszis esetében szereplő tárgyalásnak.

1.23. Állítás. *A hiperbola fókuszaiból az érintőkhöz húzott merőleges szakaszok talppontjai rajta vannak az f főkörön.*

Bizonyítás.
Az előző állítás igazolása során bevezetett jelölést fogjuk használni. (Lásd a 8. ábrát.) Vegyük a hiperbola egy tetszőleges P pontját. Legyen E az $[F_2, P\rangle$ félegyenes azon pontja amelyre fennáll $F_2E = 2a$ és $PE = PF_1$. Megmutattuk, hogy az $\overline{F_1E}$ szakasz e felező merőlegese adja a P pontbeli érintőt. Ennek következtében az F_1 fókuszból az e érintőhöz húzott merőleges szakasz T talppontja megegyezik az $\overline{F_1E}$ szakasz felezőpontjával.

Azt kellene belátnunk, hogy a T pontnak a hiperbola O középpontjától mért távolsága éppen a. Ennek céljából tekintsük az $F_1OT\triangle$ és $F_1F_2E\triangle$ háromszögeket, melyeknek az F_1 csúcsbeli szöge azonos. Az F_1 csúcsból kiinduló oldalakra pedig fennáll $F_1O = \frac{1}{2} \cdot F_1F_2$ és $F_1T = \frac{1}{2} \cdot F_1E$. Emiatt a két háromszög hasonló egymással és a harmadik oldalakra teljesül az $OT = \frac{1}{2} \cdot F_2E = a$ összefüggés. Ezzel már igazoltuk, hogy a T talppont rajta van az O centrumú és a sugarú f főkörön. □

1.24. Definíció. Legyen adva egy hiperbola, amelynél a valós tengelyhossz $2a$ és a fókuszpontok távolsága $2c$. A hiperbola numerikus excentricitásán az $\varepsilon = c/a$ hányadost értjük.

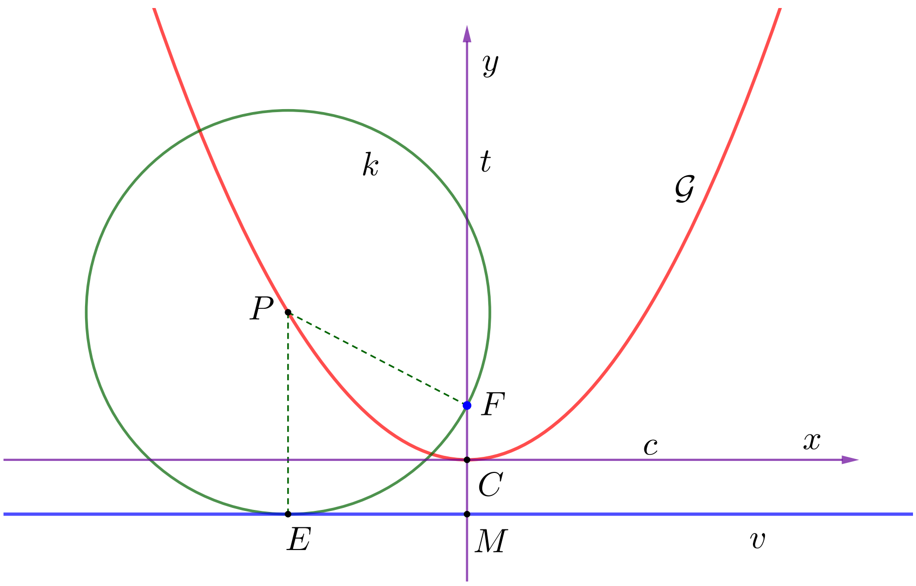
Megjegyzés. Igazolható, hogy két hiperbola egymással hasonló akkor és csak akkor, ha a numerikus excentricitásuk megegyezik.

A parabola

1.25. Definíció. Egy σ síkban legyen adva egy F pont és egy az F–re nem illeszkedő v egyenes. Az F fókuszponttal és a v vezéregyenessel meghatározott parabolán a sík azon pontjainak halmazát értjük, melyeknek a F fókusztól mért távolsága megegyezik a v egyenestől mért távolsággal.

Megjegyzés. A sík egy P pontjának a v egyenestől való távolságát jelölje $d(v, P)$. A fenti definíciót a következő formában is kimondhatjuk. Az F fókuszpontokkal és a v vezéregyenessel meghatározott σ–beli parabolán a
$\mathcal{G} = \{\ P \in \sigma \mid FP = d(v, P)\ \}$ alakzatot értjük.

Megjegyzés. A parabola vezéregyenesét szokás direktrixnek is nevezni.



9. ábra. *Az F fókuszponttal és a v vezéregyenessel $\mathcal{G}$ meghatározott parabola.*

1.26. Definíció. A síkban legyen adva egy parabola, melynek fókuszpontja F és vezéregyenese v. Az F fókuszpont és a v egyenes $p = d(v, F)$ távolságát a parabola paraméterének mondjuk.

A σ síkban vegyünk egy parabolát, amelynek fókuszpontja F és vezéregyenese v. Legyen t az az egyenes, amely áthalad az F ponton és merőleges v–re. Nyilvánvaló, hogy a t egyensre történő tükrözés az F fókuszt fixen hagyja és a v–t önmagába képezi, tehát a parabolát önmagába viszi. Emiatt a t egyenest a parabola szimmetriatengelyének (rövidebben a parabola tengelyének) nevezzük.

Az egymásra merőleges t, v egyenesek metszéspontja legyen M. Világos, hogy az $\overline{FM}$ szakasz hossza megegyezik a parabola p paraméterével, vagyis fennáll $p = FM$. Jelölje C az $\overline{FM}$ szakasz felezőpontját. A definícióból adódik, hogy C a t tengely azon pontja, amelyet a parabola tartalmaz. Ezen C pontot a parabola csúcspontjának vagy tengelypontjának nevezzük. (Lásd a 9. ábrát.)

Világos, hogy egy pont és egy egyenes távolsága megegyezik azon kör sugarával, melynek centruma az adott pont és amely érinti az adott egyenest. Ennek következtében igaz az alábbi állítás. (Lásd a 9. ábrát.)

1.27. Állítás. *A sík egy P pontja rajta van a parabolán akkor és csak akkor, ha a P középpontú $r = PF$ sugarú kör érinti a v vezéregyenest.*

A parabola kanonikus egyenlete

A σ síkban legyen adott egy parabola, amelynek paramétere p. Vegyük azt a σ–beli $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j})$ Descartes–féle koordináta–rendszert, ahol az O megegyezik a parabola C csúcspontjával (vagyis $O = C$) az $\mathbf{i}$ egységvektor párhuzamos a v vezéregyenessel és a $\mathbf{j}$ alapvektor megegyező irányú a $[C, F\rangle$ félegyenessel. A parabola egyenletét könnyen le lehet vezetni ebben a speciális koordináta–rendszerben.

1.28. Állítás. *A σ sík egy P pontja rajta van a parabolán akkor és csak akkor, ha a P koordinátái kielégítik a $2py = x^2$ egyenletet.*

Megjegyzés. A fenti állításban szereplő $2py = x^2$ egyenletet a parabola kanonikus (vagy más szóval csúcsponti) egyenletének mondják.

A parabola érintői

1.29. Definíció. Egy σ síkban legyen adva egy parabola az F fókuszponttal és a v vezéregyenessel. A sík egy Q pontját a parabola külső pontjának mondjuk, ha az FQ távolság nagyobb a Q pontnak a v egyenestől mért távolságánál, vagyis ha fennáll $FQ > d(v, Q)$.

Egy σ síkbeli R pont a parabolának belső pontja, ha az FR távolság kisebb az R pontnak a v egyenestől mért távolságánál, azaz ha $FR < d(v, R)$ teljesül.

Megjegyzés. Világos, hogy a síkban a parabola elválasztja a külső pontok tartományát a belső pontok tartományától.

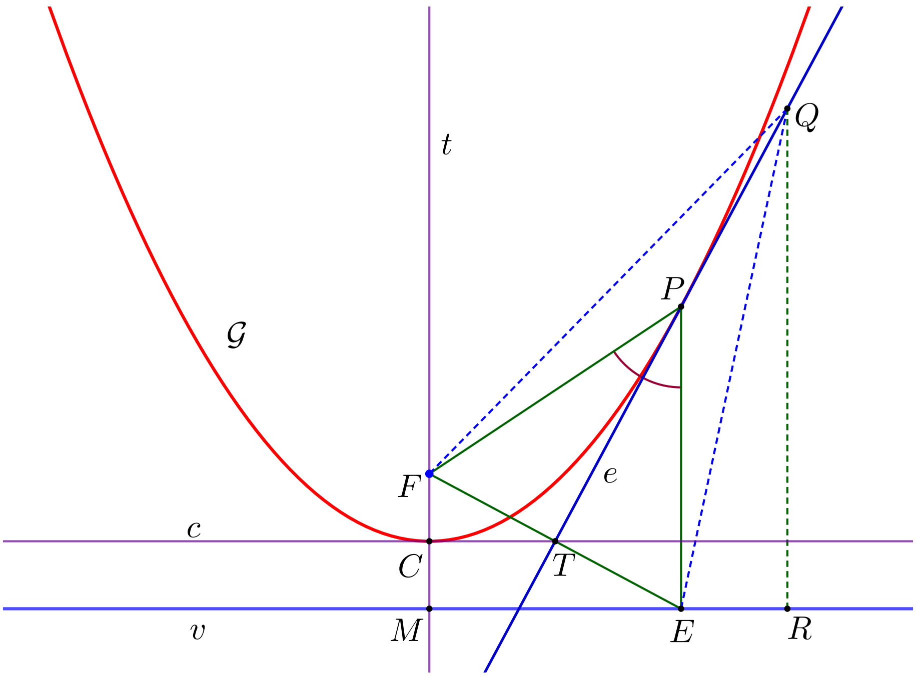
1.30. Definíció. A parabola síkjában lévő egyenest a parabola érintőjének mondjuk, ha egyetlen közös pontja van a parabolával és az egyenes összes többi pontja a parabolának külső pontja. Az egyetlen közös pontot érintési pontnak nevezzük.

Megjegyzés. Koordinátageometriai eljárással könnyen igazolható, hogy a parabola bármely pontján át két olyan egyenes halad, amelynek a parabolával egyetlen közös pontja van. Ezek közül csak az egyik érintője a parabolának, a másik pedig a parabola tengelyével párhuzamos egyenes, amelyen belső pontok is vannak.

A parabola egy adott pontbeli érintőjét szögfelezőként is megkaphatjuk az az alábbi állítás szerint.

1.31. Állítás. *A síkban legyen adott egy parabola, amelynek fókuszpontja F és vezéregyenese v. Vegyük a parabola egy P pontját. A P pontból a v–hez húzott merőleges szakasz talppontja legyen E. Ekkor az $FPE\sphericalangle$ szög szögfelező egyenese megegyezik a parabola P–beli érintőjével.*

Bizonyítás.
Világos, hogy fennáll az $FP = EP$ egyenlőség és a P centrumú $r = PF$ sugarú kör az E pontban érinti a vezéregyenest. Mivel az $FPE\triangle$ háromszög egyenlő szárú, az $\overline{EF}$ szakasz e felezőmerőleges egyenese megegyezik a $FPE\sphericalangle$ szög szögfelező egyenesével.



10. ábra. *A parabola P pontbeli e érintője az $FPE\sphericalangle$ szög szögfelezője.*

Tekintsük az e egyenes egy a P–től különböző Q pontját. Nyilvánvaló, hogy fennáll az $FQ = EQ$ egyenlőség. A Q pontból a v egyeneshez húzott merőleges szakasz végpontját jelölje R. Az $EQR\triangle$ derékszögű háromszögben az EQ átfogó hosszabb az RQ befogónál, azaz $EQ > RQ$. Ennek következtében $FQ > d(v, Q)$ teljesül, vagyis a Q pont közelebb van a v vezéregyeneshez, mint az F fókuszhoz. Eszerint az e egyenesnek a P–től különböző pontjai külső pontok, ami azt jelenti, hogy az e egyenes a parabola P pontbeli érintője. □

Az előző állítás bizonyítása során beláttuk, hogy az e érintőegyenes az $\overline{FE}$ szakasz felező merőlegese. Tehát az F fókusznak az e érintőre vonatkozó tükörképe az E pont, amely rajta van a v vezéregyenesen. Emiatt igaz az alábbi kijelentés is.
Következmény. *Legyen adott egy parabola, amelynek fókuszpontja F és vezéregyenese v. Az F fókusznak az érintőegyenesekre vonatkozó tükörképei befutják a v vezéregyenest.*

1.32. Definíció. A síkban legyen adva egy parabola. Ennek a C tengelypontban vett c érintőjét a parabola csúcsérintőjének mondjuk.

Világos, hogy a c csúcsérintő merőleges a parabola t tengelyére. Emellett ez a c egyenes rendelkezik az alábbi állításban szereplő tulajdonsággal is.
1.33. Állítás. *A parabola fókuszpontjából az érintőkhöz húzott merőleges szakaszok talppontjai rajta vannak a c csúcsérintőn.*
Bizonyítás.
Az 1.31. Állítás bizonyítása során beláttuk, hogy az e érintőegyenes megegyezik az $\overline{FE}$ szakasz felező merőlegesével. (Lásd a 10. ábrát.) Ebből adódik, hogy az F fókuszból az e érintőhöz húzott merőleges szakasz T talppontja az $\overline{FE}$ szakasz felezőpontja. Mivel a C csúcspont felezi az $\overline{FM}$ szakaszt, a v vezéregyenessel párhuzamos c csúcsérintő a felezőpontjában, azaz a T pontban metszi az $\overline{FE}$ szakaszt. Ezzel igazoltuk, hogy T rajta van a c egyenesen. $\square$

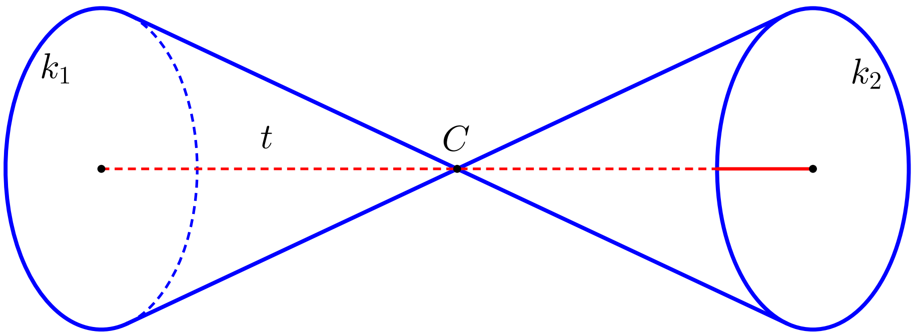
Megjegyzés. A parabolát a p paramétere az egybevágóság erejéig határozza meg. Ez azt jelenti, hogy amennyiben két parabolának a paramétere egyenlő, akkor azok egybevágóak.
Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a síkbeli parabola megadható az F fókuszpontjával és a C csúcspontjával, hiszen ezekből könnyen megszerkeszthető a v vezéregyenes. Ennek alapján igazolható, hogy bármely két parabola hasonló egymással, azaz van olyan hasonlósági transzformáció, amely az első parabolát a másodikba viszi.

A forgáskúp

1.34. Definíció. Legyen adva a térben egy t egyenes és azon egy C pont, továbbá egy φ szög ($0 < \varphi < \pi/2$). A C ponton áthaladó és a t–vel φ szöget bezáró egyenesek unióját forgáskúpnak mondjuk.

A t egyenes a forgáskúp tengelye, a C pont a csúcsa és φ a félnyílásszöge. A forgáskúp által tartalmazott egyeneseket alkotóknak nevezzük.

Megjegyzés. Világos, hogy a t egyenes körüli tetszőleges szögű elforgatás a forgáskúpot önmagába viszi. A forgáskúp helyett szokás alkalmazni a forgáskúpfelület elnevezést is.



11. ábra. *A t tengelyű és C centrumú forgáskúp egy darabja.*

Megjegyzés. Forgáskúpot kaphatunk az alábbi eljárással. A térben legyen adott egy α sík és abban egy O centrumú, r sugarú körvonal, melyet jelöljön $k_\alpha(O, r)$. Az O–n átmenő és az α síkra merőleges t egyenesen vegyünk egy az O–tól különböző C pontot. A $k_\alpha(O, r)$ körvonal pontjain áthaladó és a C–hez illeszkedő egyenesek $\mathcal{K}$ uniójaként egy forgáskúpot nyerünk, amelynek t a tengelye és C a centruma, a φ félnyílásszögre pedig fennáll a $\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{CO}$ egyenlőség.

A gömb érintőkúpjának értelmezése

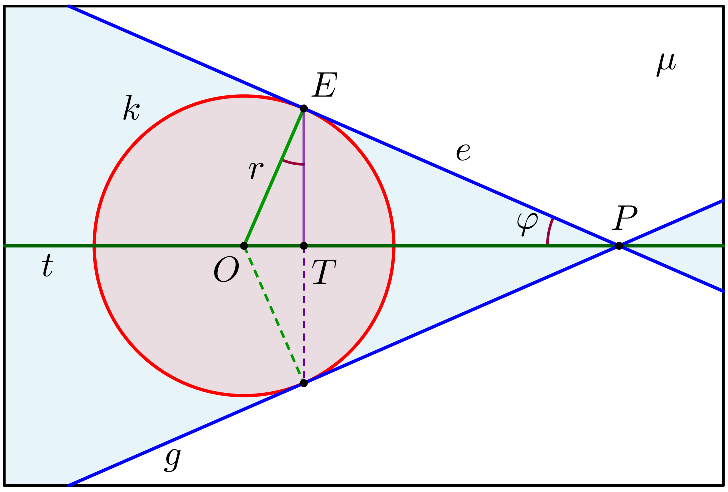
Mint ismeretes, az O centrumú és r sugarú $\mathcal{G}(O, r)$ gömbfelület a tér azon pontjainak halmaza, amelyek az O középponttól r távolságra vannak. A gömb érintőegyeneseiről és érintősíkjairól szól az alábbi kézenfekvő definíció.

1.35. Definíció. Legyen adott a térben egy gömbfelület. Egy egyenest a gömb érintőjének mondunk, ha egyetlen közös pontja van a gömbbel. A közös pontot érintési pontnak nevezzük.

Egy síkról azt mondjuk, hogy érintősíkja a gömbnek (vagy más szóval érinti a gömböt), ha a a gömbbel egyetlen közös pontja van.

Megjegyzés. Vegyünk egy O centrumú és r sugarú $\mathcal{G}(O, r)$ gömbfelületet. Nyilvánvaló, hogy egy egyenes akkor érintője a $\mathcal{G}(O, r)$ gömbfelületnek, ha az O középponttól mért távolsága r. Egy sík pedig akkor érintősíkja a gömbnek, ha az O–nak a síktól mért távolsága r.

Az alábbi állítást a forgáskúp síkmetszeteinek vizsgálatánál fogjuk majd felhasználni.
1.36. Állítás. *A térben legyen adva egy O centrumú és r sugarú $\mathcal{G}(O,r)$ gömb. Tekintsünk a térben egy olyan P pontot, amelyre fennáll $OP > r$. Igazak az alábbi kijelentések.*
(1) A gömbnek a P ponton áthaladó érintőegyenesei egy forgáskúpot alkotnak, amelynek P a csúcsa és tengelye a $t = \langle O, P\rangle$ egyenes.
(2) A P pontot az érintési pontokkal összekötő szakaszok hossza egyenlő.
(3) Az érintési pontok egy gömbi kört képeznek.
Bizonyítás.
Vegyük az O és P pontokon áthaladó t egyenest. Legyen e egy olyan érintője a $\mathcal{G}(O,r)$ gömbnek, amely áthalad a P ponton. Jelölje E az érintési pontot az e egyenesen. Tekintsük azt a μ síkot, amely tartalmazza az egymást metsző t, e egyenseket. Világos, hogy ez a μ sík egy főkörben metszi el a gömböt, melyet jelöljön k.



12. ábra. *Az 1.36. Állítás bizonyításának szemléltetése* $(\mu \cap \mathcal{G}(O,r) = k)$.

Vegyük észre, hogy az $OPE\triangle$ derékszögű háromszöget az OP átfogó és az $r = OE$ befogó egybevágóság erejéig már meghatározzák. Ezen $OPE\triangle$ derékszögű háromszög alapján azt kapjuk, hogy a t, e egyenesek $\varphi = OPE\sphericalangle$ szögére fennáll a $\sin\varphi = \frac{r}{OP}$ összefüggés, vagyis az $OPE\sphericalangle$ szög független az e egyenes megválasztásától. Eszerint a P ponton átmenő összes érintőegyenes ezt a φ szöget zárja be a t egyenessel. Világos az is, hogy bármely olyan egyenes érinti a gömböt, amely áthalad P–n és amelynek a t–vel vett hajlásszöge φ, hiszen egy ilyen egyenesnek O centrumtól mért távolsága r. Ezzel igazoltuk az állításban szereplő (1) kijelentést.

Ha tekintünk egy olyan a P ponton átmenő e érintőegyenest, amely az E pontban érinti a gömböt, akkor az $OPE\triangle$ derékszögű háromszögre alkalmazva a Pitagorasz–tételt az $OE = \sqrt{OP^2 - r^2}$ egyenlőséghez jutunk. Tehát a P pontot az E érintési ponttal összekötő szakasz nem függ az érintő megválasztásától.

Az e érintőre eső E érintési pontból a t egyeneshez húzott merőleges összekötő szakasz talppontja legyen T. A befogó tétel alapján a $OPE\triangle$ derékszögű háromszögre teljesül $r^2 = OT \cdot OP$, amiből az $OT = \frac{r^2}{OP}$ összefüggés adódik. Világos, hogy fennáll a $TE = \sqrt{r^2 - OT^2}$ egyenlőség is. Eszerint a T talppont sem függ az érintő megválasztásától, és az E érintési pont rajta van azon a körön, amelyet a T ponton átmenő és a t–re merőleges sík metsz ki a gömbből. $\square$

1.37. Definíció. Legyen adott a térben egy gömbfelület. Egy forgáskúpot a gömb érintőkúpjának nevezünk, ha a kúp összes alkotóegyenese érinti a gömböt.

A forgáskúp síkmetszetei

A továbbiakban azt tárgyaljuk, hogy egy forgáskúpot síkokkal elmetszve milyen síkbeli alakzatokat (vagy más szóval síkbeli görbéket) kaphatunk. A vizsgálatokban fontos szerepet játszanak majd azon gömbfelületek, amelyeknek az adott forgáskúp egy érintőkúpja. Ezen gömbök alkalmazásának ötlete egy francia matematikus, G. P. Dandelin nevéhez fűződik.

1.38. Definíció. Legyen adott a térben egy $\mathcal{K}$ forgáskúpfelület és egy olyan σ sík, amely nem megy át a $\mathcal{K}$ kúp csúcspontján. A $\mathcal{K}$ forgáskúp és a σ sík metszetéhez tartozó Dandelin–féle gömbön egy olyan gömbfelületet értünk, amelyet érint a σ sík és amelynek a $\mathcal{K}$ érintőkúpja.

Könnyű belátni, hogy igaz az alábbi kijelentés.

1.39. Állítás. *Legyen adva egy $\mathcal{K}$ forgáskúp és egy olyan σ sík, amely nem megy át a kúp C csúcspontján és derékszögben metszi el a kúp t tengelyét. Ekkor a sík a kúpot egy körben metszi, amelynek centruma megegyezik σ és t metszéspontjával.*

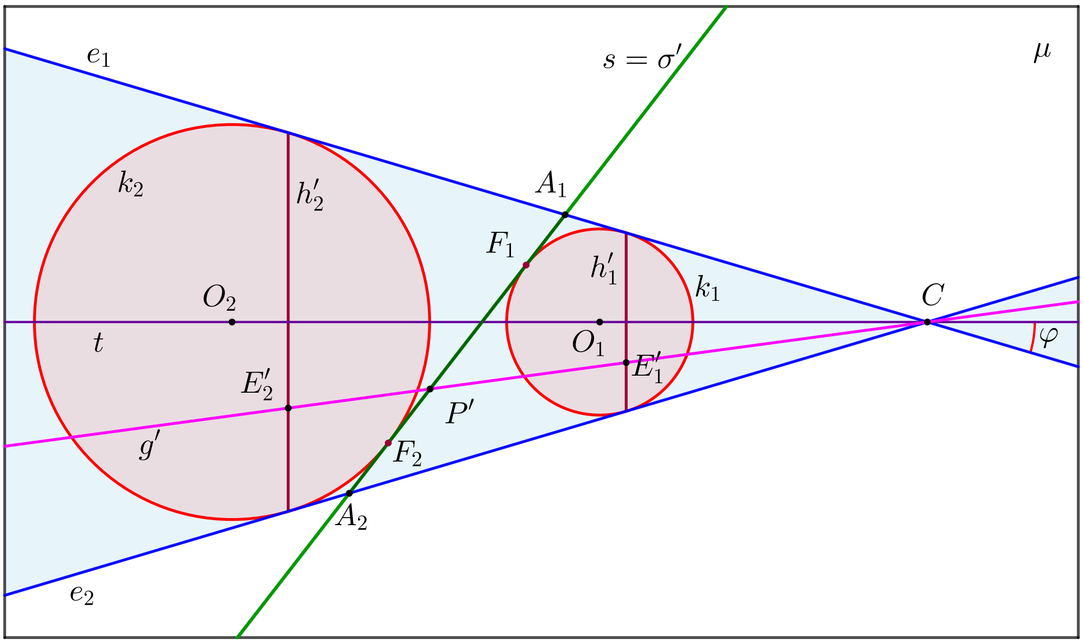
Vizsgálataink egyik alapvető eredménye a következő tétel, amelynek bizonyítását is részletesen kifejtjük.

1.40. Tétel. *Legyen adva egy $\mathcal{K}$ forgáskúp, amelynek tengelye t, csúcspontja C és félnyílásszöge φ. Tekintsünk egy σ síkot, amely metszi a t tengelyt, nem halad át a C csúcsponton és nem merőleges t–re. Jelölje β a t tengely és a σ sík szögét. Ekkor igazak az alábbi kijelentések.*
(1) Amennyiben $\beta > \varphi$ teljesül, akkor a sík és a kúp $\sigma \cap \mathcal{K}$ metszete egy ellipszis a σ síkban.
(2) Ha a $\beta < \varphi$ egyenlőtlenség áll fenn, akkor a $\sigma \cap \mathcal{K}$ metszet egy hiperbola.
(3) Ha a $\beta = \varphi$ egyenlőség teljesül, a sík és a kúp $\sigma \cap \mathcal{K}$ metszete egy parabola.

Bizonyítás.
(1) Vegyük azt az esetet, amikor a szögekre fennáll $\beta > \varphi$. Mivel t nem merőleges a σ síkra, egyértelműen létezik egy olyan μ sík, amely tartalmazza a t tengelyt és merőleges σ–ra. A bizonyításban fontos szerep jut majd ezen μ síknak. (Lásd a 13. ábrát.)

A μ sík által a kúpból kimetszett alkotóegyeneseket jelölje e_1 és e_2, a μ–nek a σ síkkal vett metszete pedig legyen az s egyenes. Világos, hogy a σ síknak a μ–re eső merőleges vetülete éppen s, ami azonos a t tengelynek a σ–ra eső merőleges vetületével. Ennek következtében a β szög megegyezik a t, s egyenesek hajlásszögével.

Ha vesszük a kúpalkotók merőleges vetületeit a μ síkon, akkor azok egy csúcsszögtartományt képeznek, amelyet az e_1, e_2 egyenesek határolnak. Ebből már adódik, hogy a σ sík az összes kúpalkotót elmetszi és a $\sigma \cap \mathcal{K}$ metszet rajta van az egyik félkúpon.



13. ábra. *A forgáskúp és a σ sík ellipszis metszetének szemléltetése ($\beta = (t, s)\sphericalangle$, $\beta > \varphi$).*

Az s egyenesnek az e_1, e_2 alkotókkal vett metszéspontjai legyenek A_1 és A_2. Vegyük az $A_1A_2C\triangle$ háromszög k_1 beírt körét, melynek centruma rajta van t–n. Ez a k_1 kör érintse az A_1A_2 oldalt az F_1 pontban. Tekintsük most az $A_1A_2C\triangle$ háromszög A_1A_2 oldalhoz hozzáírt k_2 körét, amely érintse az A_1A_2 oldalt (illetve az s egyenest) az F_2 pontban. A k_1, k_2 köröknek a t tengelyre eső centrumait jelölje O_1 és O_2.

Világos, hogy az e_1, e_2 alkotóknak a t körüli megforgatásával a forgáskúphoz jutunk. Legyenek $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ azok az O_1, O_2 centrumú gömbök, amelyeknek a k_1, k_2 körök a μ síkbeli főkörei. Tehát a $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ gömbök sugara megegyezik a k_1, k_2 körök sugarával. Ezeket a gömböket úgy is megkaphatjuk, ha a k_1, k_2 köröket megforgatjuk a t tengely körül. Könnyű belátni, hogy a $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ gömböknek a $\mathcal{K}$ forgáskúp egy érintőkúpja, és a σ sík ezen gömböket az F_1, F_2 pontokban érinti. Ebből adódik, hogy a $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ gömbök a $\mathcal{K}$ kúp és a σ sík metszetéhez tartozó Dandelin–gömbök. A $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ gömböket a $\mathcal{K}$ forgáskúp alkotói egy–egy gömbi kör mentén érintik, melyek legyenek h_1 és h_2. Mivel a h_1, h_2 gömbi körök síkja merőleges a t tengelyre, ezeknek a μ síkra eső h_1', h_2' merőleges vetülete egy–egy szakasz lesz. Vegyük azt is észre, hogy a kúpalkotókból a h_1, h_2 körökkel lemetszett szakaszok hossza állandó. Ezen közös hossz felét a továbbiakban jelölje a.

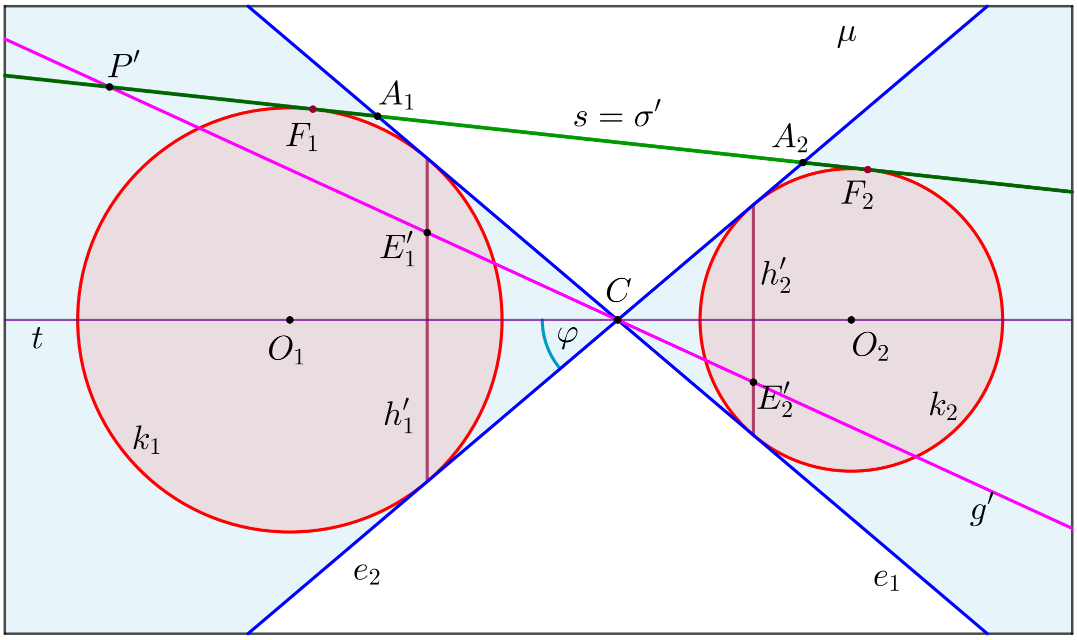
Tekintsük a kúpnak egy tetszőleges g alkotóegyenesét, amely a P pontban metszi el a σ síkot. A g egyenes érintse a $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ gömböket az E_1, E_2 pontokban, melyeknél az összekötő szakasz hossza $E_1E_2 = 2a$ nem függ g megválasztásától. A $\mathcal{G}_1$ gömböt a $\langle P, F_1\rangle$ egyenes az F_1 pontban érinti, továbbá a $\mathcal{G}_2$ gömböt is érinti a $\langle P, F_2\rangle$ egyenes az F_2 pontban. Az 1.36. Állításban szereplő (2) kijelentés szerint egy külső pontból egy adott gömbhöz húzott érintőszakaszok hossza állandó, emiatt fennáll $PF_1 = PE_1$ és $PF_2 = PE_2$. Ennek következtében

$$F_1P + F_2P = E_1P + PE_2 = E_1E_2 = 2a$$

teljesül, hiszen P az $\overline{E_1E_2}$ szakasznak egy belső pontja. A leírtakból adódik, hogy a $\sigma \cap \mathcal{K}$ metszetet azon σ–beli pontok alkotják, melyeknél az F_1, F_2 pontoktól mért távolságok összege megegyezik a h_1, h_2 körök által az alkotókból lemetszett szakaszok $2a$ hosszával. Eszerint a $\sigma \cap \mathcal{K}$ metszetgörbe egy ellipszis, melynek fókuszai az F_1, F_2 pontok.

(2) Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor a szögekre a $\beta < \varphi$ teljesül. Ezúttal is vegyük azt a μ síkot, amely tartalmazza a t tengelyt és merőleges σ metszősíkra. A μ síkot által kimetszett alakzatokat, illetve az alakzatoknak a μ–re eső merőleges vetületeit tüntettük fel a mellékelt 14. ábrán.

Legyenek e_1 és e_2 a μ sík által a kúpból kimetszett alkotóegyenesek. A μ és σ síkok metszésvonalát jelölje s. Ezúttal is igaz az, hogy σ síknak a μ–re eső σ' merőleges vetülete megegyezik s–sel, és a β szög megegyezik a t, s egyenesek hajlásszögével.



14. ábra. *A forgáskúp és a σ sík hiperbola metszetének szemléltetése ($\beta = (t, s)\sphericalangle$, $\beta < \varphi$).*

A kúpalkotók μ síkra eső merőleges vetületei egy csúcsszögtartományt képeznek, amelyet az e_1, e_2 egyenesek határolnak. Világos, hogy a $\beta < \varphi$ következtében a σ sík a $\mathcal{K}$ forgáskúp mindkét félkúpját elmetszi.

Az s egyenesnek az e_1, e_2 alkotókkal vett metszéspontjai legyenek A_1 és A_2. Tekintsük a μ síkbeli $A_1A_2C\triangle$ háromszöget, továbbá ezen háromszögnek az A_1C, A_2C oldalakhoz hozzáírt k_1 és k_2 körét. A köröknek a t tengelyre eső középpontjait jelölje O_1 és O_2. Az $A_1A_2C\triangle$ háromszög s oldalegyenese érintse a k_1, k_2 köröket az F_1, F_2 pontokban.

Tekintsük azokat az O_1, O_2 centrumú $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ gömböket, melyeknek a k_1, k_2 körök a μ síkbeli főkörei. Ha a k_1, k_2 köröket megforgatjuk a t tengely körül, ezeket a gömböket írják le a forgatás során. Világos, hogy $\mathcal{K}$ a $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ gömböknek érintőkúpja, és a σ sík ezen gömböket az F_1, F_2 pontokban érinti.

A gömböket a $\mathcal{K}$ forgáskúp alkotói egy–egy gömbi kör mentén érintik, melyek jelöljön h_1 és h_2. Nyilvánvaló, hogy a h_1, h_2 gömbi körök síkja merőleges a kúp t tengelyére. Ez esetben is fel fogjuk használni, hogy a kúpalkotókból a h_1, h_2 körökkel lemetszett szakaszok hossza állandó. Ennek a közös szakaszhossznak a felét jelölje a.

Vegyük a $\sigma \cap \mathcal{K}$ metszetgörbének egy olyan P pontját, amely a $\mathcal{G}_1$ gömbhöz tartozó (vagyis a $\mathcal{G}_1$–t érintő) félkúpon van. A P ponton áthaladó g alkotóegyenes érintse a $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ gömböket az E_1, E_2 pontokban. Ezek az E_1, E_2 pontok nyilván a h_1, h_2 körökre esnek. Mint már említettük, az összekötő szakasz hossza $E_1E_2 = 2a$ nem függ a P megválasztásától.

Az 1.36. Állítás szerint a P pontból a $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ gömbökhöz húzott érintőszakaszok hossza azonos, tehát fennáll $PF_1 = PE_1$ és $PF_2 = PE_2$, mivel a σ–beli $\langle P, F_1\rangle$, $\langle P, F_2\rangle$ egyenesek is érintik a gömböket. Jelen esetben az E_1 egy belső pontja az $\overline{PE_2}$ szakasznak. Ezek alapján pedig azt nyerjük, hogy teljesül

$$F_2P - F_1P = E_2P - E_1P = E_1E_2 = 2a.$$

Látható, hogy amennyiben a $\sigma \cap \mathcal{K}$ metszetgörbének a másik félkúpra eső P pontját választjuk, akkor az $F_1P - F_2P = 2a$ összefüggést kapjuk. A leírtak alapján a $\sigma \cap \mathcal{K}$ metszetet azon σ–beli pontok alkotják, melyekre fennáll az

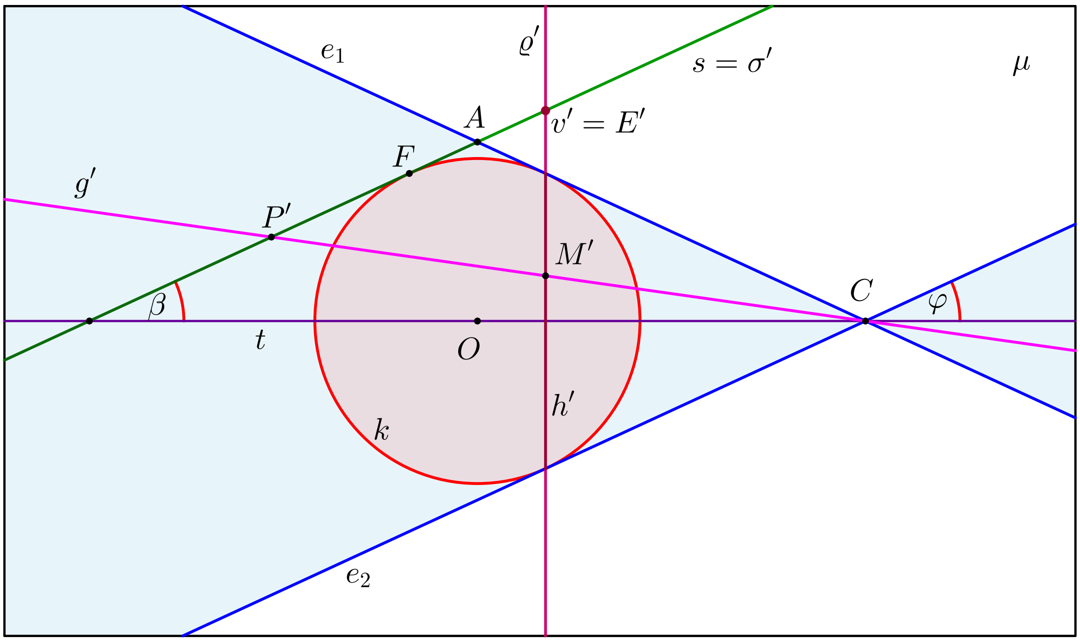
$$|F_1P - F_2P| = 2a$$

egyenlőség, amelyben $2a$ a h_1, h_2 körök által a kúpalkotókból lemetszett szakaszok közös hossza. Ezáltal igazoltuk, hogy a $\sigma \cap \mathcal{K}$ metszetgörbe egy hiperbola, melynek fókuszai az F_1 és F_2 érintési pontok.

(3) Tegyük fel, hogy a σ metsző síknak a t tengellyel vett β hajlásszöge egyenlő a kúp φ félnyílásszögével. Ez esetben is alkalmazzuk azt a μ síkot, amely tartalmazza a t tengelyt és merőleges a σ síkra. (Lásd a 15. ábrát.) A μ sík a $\mathcal{K}$ kúpfelületet metssze el az e_1, e_2 alkotókban. A σ és μ síkok metszésvonalát ezúttal is jelölje s. Ezúttal is igaz, hogy a t, s egyenesek hajlásszöge adja a β szöget. Mivel fennáll a $\beta = \varphi$ egyenlőség, az s egyenes párhuzamos az egyik μ síkbeli alkotóval, a másikat pedig elmetszi egy A pontban.

A mellékelt 15. ábrán azon alakzatok esetében, amelyek nincsenek benne a μ síkban, a μ síkra eső merőleges vetületet tüntettük fel. Világos, hogy a σ síknak a μ–re eső σ' vetülete megegyezik az s egyenessel. A kúpnak a μ síkra vonatkozó vetülete az e_1, e_2 egyenesekkel határolt csúcsszögtartomány. Vegyük észre, hogy a $\sigma \cap \mathcal{K}$ metszetgörbe rajta van az egyik félkúpon.

Egyetlen olyan k kör van a μ síkban, amelynek O centruma a t egyenesre esik és amelyet érintenek az e_1, e_2, s egyenesek. A k kör és az s egyenes érintési pontját jelölje



15. ábra. *A forgáskúp és a σ sík parabola metszetének szemléltetése* ($\beta = \varphi$).

F. Vegyük azt az O centrumú $\mathcal{G}$ gömböt, amelynek k az egyik főköre. Ezt a gömböt kapjuk leírt alakzatként, ha a k kört a t tengely körül megforgatjuk. Világos, hogy a $\mathcal{G}$ gömbnek $\mathcal{K}$ érintőkúpja, és a σ sík az F pontban érinti $\mathcal{G}$–t.

A kúp alkotóinak a $\mathcal{G}$ gömbbel vett érintési pontjai egy h gömbi kört alkotnak. Ezen h kör síkja legyen ϱ. A ϱ sík merőleges a t tengelyre és ezáltal a μ síkra is, tehát a ϱ' vetület egy egyenes. Tekintsük a ϱ és σ síkok v metszésvonalát. Mivel a v egyenes merőleges a μ síkra, az arra eső v' vetülete egyetlen pont.

Vegyük a $\sigma \cap \mathcal{K}$ metszetgörbe egy P pontját. Ezen P ponton áthaladó kúpalkotó legyen a g egyenes, amely érintse a $\mathcal{G}$ Dandelin–gömböt az M pontban. A P pontot a v egyenessel összekötő merőleges szakasz talppontját jelölje most E. Tehát a P pontnak a v egyenestől mért távolsága a PE szakaszhossz.

Az 1.36. Állítás alapján a P pontból a $\mathcal{G}$ gömbhöz húzott $\overline{PF}$, $\overline{PM}$ érintőszakaszok hossza egyenlő, azaz $PF = PM$. Ugyanakkor a $\overline{PM}$ szakasz rajta van a g kúpalkotón, amely φ szöget zár be a t tengellyel. Emiatt a g egyenesnek a ϱ síkkal vett hajlásszöge $90° - \varphi$. Fontos észrevenni, hogy a ϱ és σ síkok hajlásszöge ugyancsak $90° - \varphi$. Ebből viszont adódik, hogy a v metszésvonalra merőleges $\langle P, E \rangle$ egyenenesnek a ϱ síkkal vett szöge szöge $90° - \varphi$. Mivel a $\overline{PM}$, $\overline{PE}$ szakaszok a P pontot úgy kötik össze a ϱ síkkal, hogy vele bezárt szögük egyaránt $90° - \varphi$, ezek hossza egyenlő, vagyis fennáll $PM = PE$. Ebből pedig a $PF = PE$ egyenlőséget nyerjük.

A fentiek során igazoltuk, hogy a P pontnak az F–től mért FP távolsága egyenlő a P–nek a v egyenestől mért $d(v, P) = EP$ távolságával. Ebből viszont az következik, hogy a $\sigma \cap \mathcal{K}$ metszetgörbe megegyezik azzal a σ–beli parabolával, amelynek fókuszpontja az F és vezéregyenese a $v = \sigma \cap \varrho$ metszésvonal. $\square$

Megjegyzés. Az 1.40. Tétel bizonyítása során azon μ síkkal vett metszetet alkalmaztuk, amely tartalmazza a kúp t tengelyét és merőleges a σ metszősíkra. Világos, hogy a μ síkra történő tükrözés a $\mathcal{K}$ kúpot és a σ síkot önmagába viszi. Emiatt a $\sigma \cap \mathcal{K}$ metszetgörbének a μ szimmetriasíkja, az $s = \sigma \cap \mu$ egyenes pedig a szimmetriatengelye. Célszerű kiemelni, hogy a kapott kúpszeletek fókuszpontjai azok a pontok, amelyekben a σ sík érinti a metszetekhez tartozó Dandelin–gömböket.

Az (1) esetben az s egyenesre eső A_1, A_2 görbepontok összekötő szakasza megegyezik a kúpból kimetszett ellipszis nagytengelyével.

A (2) esetben az s által tartalmazott $\overline{A_1A_2}$ szakasz azonos a kúpból kimetszett hiperbola valós tengelyével.

A (3) esetben a $\sigma \cap \mathcal{K}$ metszetnek az s–re illeszkedő A pontja megegyezik a parabola csúcspontjával.

A fenti tétel (2) kijelentésének bizonyítása alapján igaz az alábbi kijelentés is.

Következmény. *Legyen adva egy $\mathcal{K}$ forgáskúp és egy olyan σ sík, amely párhuzamos a kúp tengelyével. Ekkor a $\sigma \cap \mathcal{K}$ metszet egy hiperbola.*

A teljesség érdekében a forgáskúp azon síkmetszeteit is tárgyaljuk, amikor a metsző sík áthalad a kúp csúcspontján. Világos, hogy amennyiben egy σ sík átmegy a $\mathcal{K}$ kúp C csúcsán és tartalmazza a kúpalkotónak egy a C–től különböző pontját, akkor tartalmazza a teljes alkotóegyenest. Ez alapján már könnyű igazolni a következő állítást.

1.41. Állítás. *Legyen adva egy $\mathcal{K}$ forgáskúp, amelynek tengelye t, csúcspontja C és félnyílásszöge φ. Vegyünk egy olyan σ síkot, amely áthalad a C csúcsponton. Jelölje β a t tengely és a σ sík szögét. Ekkor igazak az alábbi kijelentések.*

(1) Amennyiben $\beta > \varphi$ teljesül, akkor a sík és a kúp $\sigma \cap \mathcal{K}$ metszete a C csúcspont.

(2) Ha a $\beta < \varphi$ egyenlőtlenség áll fenn, akkor a sík két alkotóban metszi a kúpot.

(3) Ha a $\beta = \varphi$ egyenlőség teljesül, a sík és a kúp $\sigma \cap \mathcal{K}$ metszete egyetlen kúpalkotó.

2) Síkbeli koordinátatranszformációk. Másodrendű görbék

A koordinátázással kapcsolatos fogalmak felidézése

A térben legyen adott egy σ sík. A térbeli szabad vektorok terét jelölje $\mathcal{V}$, a σ síkkal párhuzamos szabad vektorok alterét pedig jelölje $\mathcal{V}_\sigma$.

Mint ismeretes, a σ síkban úgy adhatunk meg egy derékszögű koordináta–rendszert, ha kijelölünk σ–ban egy O pontot és a 2–dimenziós $\mathcal{V}_\sigma$ vektortérben rögzítünk egy $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ortonormált bázist. Ekkor az $(O, \mathbf{i},\ \mathbf{j})$ hármas egy síkbeli koordináta–rendszert képez, amelynek O a kezdőpontja (vagy más szóval az origója) és az egymásra merőleges $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ egységvektorok az alapvektorai.

Legyenek E_1, E_2 azok a síkbeli pontok, melyekre fennáll $\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{i}$, $\overrightarrow{OE_2} = \mathbf{j}$. Az $\langle O, E_1\rangle$ és $\langle O, E_2\rangle$ egyeneseket a koordináta–rendszer tengelyeinek mondjuk. Ezeket x tengelynek és y tengelynek nevezzük. A tengelyeket irányított egyeneseknek tekintjük oly módon, hogy az irányításokat az $[O, E_1\rangle$, $[O, E_2\rangle$ félegyenesekkel adjuk meg.

Ezen koordináta–rendszerben a sík tetszőleges P pontjához egy valós számpárt rendehetünk az alábbiak szerint. A P pont O–ra vonatkozó $\overrightarrow{OP}$ helyvektora egyértelműen áll elő az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ alapvektorok lineáris kombinációjaként az $\overrightarrow{OP} = x_P\,\mathbf{i} + y_P\,\mathbf{j}$ alakban. Az x_P, y_P együtthatókat mondjuk a P pont koordinátáinak.

Azt a $\xi : \sigma \to \mathbb{R}^2$ bijektív leképezést, amelyet a $\xi(P) = (x_P,\ y_P)$ összefüggés ír le, a σ sík $(O, \mathbf{i},\ \mathbf{j})$ koordináta–rendszerre vonatkozó koordinátázásának mondjuk.

Rögzítsünk a σ síkban egy $(O, \mathbf{i},\ \mathbf{j})$ koordináta–rendszert. Fontosnak tartjuk kiemelni a koordinátákra vonatkozó egyenlettel leírt alakzatnak a fogalmát.

2.1. Definíció. Legyen adva egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ valós függvény és egy $k \in \mathbb{R}$ szám. Az $f(x, y) = k$ egyenlettel leírt σ–beli alakzaton az $\mathcal{A} = \{\, P \in \sigma \mid f(x_P, y_P) = k\,\}$ ponthalmazt értjük.

A síkbeli koordinátákra vonatkozó $f(x, y) = k$ egyenletet az $\mathcal{A}$ alakzat egyik egyenletének mondjuk az $(O, \mathbf{i},\ \mathbf{j})$ koordináta–rendszerben.

Megjegyzés. Célszerű itt megjegyezni, hogy az alakzat egyenletét csakis az alakzathoz tartozó pontok koordinátái elégítik ki.

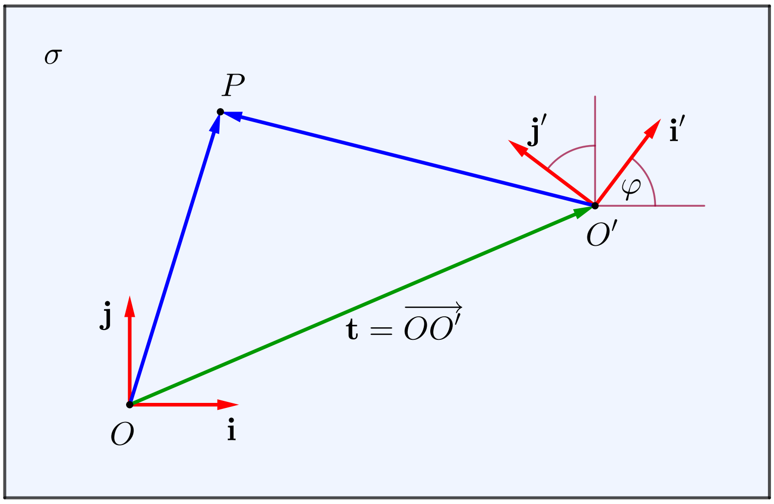
Világos, hogy egy alakzathoz nem egyértelműen tartozik leíró egyenlet. Például, az $x^2 + y^2 = 1$ és $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 1$ egyenletek ugyanazt a kört írják le a síkban.

A koordinátatranszformáció

Nyilvánvaló, hogy amennyiben egy síkban két eltérő koordináta–rendszert veszünk, akkor a pontok ezekre vonatkozó koordinátái különböznek egymástól. Emiatt ugyanazt az alakzatot más–más egyenlettel lehet leírni a két koordináta–rendszerben. A koordinátatranszformáción azt értjük, hogy az egyik koordináta–rendszerről áttérünk a másikra és ennek kapcsán meghatározzuk a pontok koordinátái közötti összefüggéseket, illetve az alakzatokat leíró egyenleteknek a kapcsolatát.

A σ síkban legyen adva van egy $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ koordináta–rendszer, amelyet a kezdeti (vagy más szóval kiindulási) koordináta–rendszernek tekintünk. Vegyünk σ–ban egy másik $(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ koordináta–rendszert, melynek alapvektorait és kezdőpontját a kezdeti koordináta–rendszer alkalmazásával adjuk meg, vagyis abban írjuk le.

A koordinátatranszformáció alapfeladatát a következőképpen lehet megfogalmazni. A sík egy tetszőleges P pontjának az $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ és $(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ rendszerekre vonatkozó koordinátapárjai legyenek (x, y) és (x', y'). Határozzuk meg azokat az összefüggéseket, amelyek kifejezik az (x', y') koordinátákat az (x, y) koordinátákból. Emellett arra a kérdésre is választ kell adni, hogy amennyiben egy síkbeli alakzatnak ismerjük az egyenletét az eredeti $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ rendszerben, akkor miképpen kapható meg az alakzat egyenlete a másik koordináta–rendszerben.



16. ábra. *A síkbeli koordinátatranszformáció szemléltetése.*

A transzformációs feladat tárgyalását az alábbiak szerint kezdhetjük el. Az $(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ koordináta–rendszer alapvektorait fejezzük ki az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok lineáris kombinációjaként az

$$\mathbf{i}' = c_{11}\,\mathbf{i} + c_{21}\,\mathbf{j}, \qquad \mathbf{j}' = c_{12}\,\mathbf{i} + c_{22}\,\mathbf{j}$$

alakban. A c_{rs} $(r,\ s = 1,\ 2)$ együtthatók által meghatározott $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ mátrixot mondjuk az alapvektorok transzformációját leíró mátrixnak.

Tekintsük az O' kezdőpont koordinátáit az eredeti koordináta–rendszerben, melyek legyenek t_1 és t_2. Eszerint az origók által meghatározott $\overrightarrow{OO'}$ vektorra fennáll $\overrightarrow{OO'} = t_1\,\mathbf{i} + t_2\,\mathbf{j}$. A továbbiakban majd $\mathbf{t}$–vel is jelölni fogjuk az $\overrightarrow{OO'}$ vektort.

Fontosnak tűnik annak megállapítása, hogy a második koordináta–rendszernek az eredetihez viszonyított helyzetét az alapvektorok transzformációját leíró $\mathbf{C}$ mátrix és az O' kezdőpont (t_1, t_2) koordinátái már meghatározzák.

Világos, hogy $\mathbf{C}$ csakis egy speciális mátrix lehet. A továbbiakban jelölje $\mathbf{E}$ a 2×2–es egységmátrixot, továbbá a $\mathbf{C}$ mátrix transzponáltját jelölje $\mathbf{C}^T$.

2.2. Állítás. *Az alapvektorok transzformációját leíró* $\mathbf{C}$ *mátrix ortogonális, azaz fennáll* a $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{E}$ *egyenlőség.*

Bizonyítás.

Közvetlen számolással adódik, hogy teljesül

$$\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}\,c_{11} + c_{21}\,c_{21} & c_{11}\,c_{12} + c_{21}\,c_{22} \\ c_{12}\,c_{11} + c_{22}\,c_{21} & c_{12}\,c_{12} + c_{22}\,c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}' \\ \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j}' \end{pmatrix} .$$

Mivel $\mathbf{i}'$ és $\mathbf{j}'$ egymásra merőleges egységvektorok, a fentiek szerint igaz $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{E}$. $\square$

Vizsgáljuk meg, hogy miként lehet meghatározni a koordináták közötti összefüggéseket. Legyen P egy tetszőleges σ–beli pont, amelynek az O–ra vonatkozó helyvektora az $\overrightarrow{OP} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ alakban áll elő, tehát az $(O, \mathbf{i},\ \mathbf{j})$ koordináta–rendszerbeli koordinátapárja (x, y).

A másik kezdőpontra vonatkozó $\overrightarrow{O'P}$ helyvektort fejezzük ki az alapvektorok lineáris kombinációjaként az $\overrightarrow{O'P} = x'\,\mathbf{i}' + y'\,\mathbf{j}'$ formában. Eszerint P–nek az $(O', \mathbf{i}',\ \mathbf{j}')$ rendszerbeli koordinátái x' és y'.

Világos, hogy az $\overrightarrow{OP}$ helyvektorra fennáll

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OO'} + x'\,\mathbf{i}' + y'\,\mathbf{j}' .$$

Amennyiben felhasználjuk a vektoroknak az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ alapvektorok szerinti lineáris kombinációs kifejezéseit, akkor azt kapjuk, hogy teljesül

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= t_1\,\mathbf{i} + t_2\,\mathbf{j} + x'\,(c_{11}\,\mathbf{i} + c_{21}\,\mathbf{j}) + y'\,(c_{12}\,\mathbf{i} + c_{22}\,\mathbf{j}) \\ &= (c_{11}\,x' + c_{12}\,y' + t_1)\,\mathbf{i} + (c_{21}\,x' + c_{22}\,y' + t_2)\,\mathbf{j} . \end{aligned}$$

Mivel az $\overrightarrow{OP}$ helyvektor egyértelműen állítható elő az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ bázisvektorok lineáris kombinációjaként, így fennáll

$$\begin{aligned} x &= c_{11}\,x' + c_{12}\,y' + t_1, \\ y &= c_{21}\,x' + c_{22}\,y' + t_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ez a két egyenlet pedig egyenértékű az alábbi mátrixegyenlettel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} . \tag{2.1}$$

Ezzel kifejeztük az eredeti koordinátákat az újakból. Nézzük, miként lehet megkapni az új koordinátákat a régiekből. A fenti (2.1) mátrixegyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg balról a $\mathbf{C}$ mátrix transzponáltjával. Ily módon a

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

egyenlőséghez jutunk. A 2.2. Állítás szerint igaz $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, amiből $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ adódik. Ezáltal az

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

egyenlethez jutunk. Vezessük be

$$\tau_1 = c_{11}\, t_1 + c_{21}\, t_2, \qquad \tau_2 = c_{12}\, t_1 + c_{22}\, t_2$$

konstansokat, amelyeket a $\mathbf{C}$ mátrixból és a $t_1,\ t_2$ koordinátákból származtatunk. Ezekkel a fenti összefüggést a tömörebb

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

alakban írhatjuk fel. Evidens, hogy a (2.2) mátrixegyenlet megfelel az

$$x' = c_{11}\, x + c_{21}\, y - \tau_1, \qquad y' = c_{12}\, x + c_{22}\, y - \tau_2.$$

egyenleteknek.

A feni levezetések alapján a következő kijelentést tehetjük.

2.3. Állítás. *Legyen adva egy σ sík és abban egy $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ derékszögű koordináta–rendszer. Vegyünk a síkban egy másik $(O', \mathbf{i}',\ \mathbf{j}')$ koordináta–rendszert. Tekintsük az élvektorok transzformációját leíró $\mathbf{C}$ mátrixot és az O' új kezdőpont (t_1, t_2) koordinátáit az eredeti koordináta–rendszerben. Ekkor tetszőleges P pont koordinátáira teljesülnek a (2.1) és (2.2) egyenletek.*

A (2.1) összefüggés alapján az egyenlettel megadott alakzatnak az új koordináta–rendszerbeli egyenlete is egyszerűen meghatározható. Erről szól az alábbi állítás.

2.4. Állítás. *A σ síkbeli $\mathcal{A}$ alakzatot az $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ koordináta–rendszerben írja le az $f(x, y) = k$ egyenlet, amelyben f egy kétváltozós valós függvény és k egy valós szám. Ekkor az $(O', \mathbf{i}',\ \mathbf{j}')$ koordináta–rendszerben az*
$f(c_{11}\, x' + c_{12}\, y' + t_1, c_{21}\, x' + c_{22}\, y' + t_2) = k$ egyenlet írja le az $\mathcal{A}$ alakzatot.

Bizonyítás.
Válasszunk ki a síkon egy P pontot, amelynek az eredeti koordinátái legyenek (x_P, y_P) az új koordinátái pedig (x'_P, y'_P). A P pontosan akkor van rajta az $\mathcal{A}$ alakzaton, ha az f valós függvénynek az $\mathbb{R}^2$–beli (x_P, y_P) helyen felvett értéke k, vagyis ha $f(x_P, y_P) = k$ teljesül.

Azonban P–nek az eredeti koordinátáit a (2.1) összefüggés alapján lehet kifejezni az újakból, miszerint fennáll $x_P = c_{11}\, x'_P + c_{12}\, y'_P + t_1$ és $y_P = c_{21}\, x'_P + c_{22}\, y'_P + t_2$. Emiatt a P pontot pontosan akkor tartalmazza az $\mathcal{A}$ alakzat, ha az új koordinátáival teljesül az $f(c_{11}\, x'_P + c_{12}\, y'_P + t_1, c_{21}\, x'_P + c_{22}\, y'_P + t_2) = k$ egyenlőség. $\square$

Megjegyzések a koordinátatranszformációról

Korábban már beláttuk, hogy élvektorok transzformációját leíró $\mathbf{C}$ mátrix ortogonális, vagyis fennáll $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{E}$. Alkalmazva a determináns tulajdonságait, ebből $(det\,\mathbf{C})^2 = 1$ adódik. Eszerint vagy $det\,\mathbf{C} = 1$ vagy pedig $det\,\mathbf{C} = -1$ teljesül. A $det\,\mathbf{C} = 1$ esetben azt mondjuk, hogy a $\mathcal{V}_\sigma$ altérbeli $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ bázisok a síknak ugyanazt az irányítását képviselik. Ha pedig a $det\,\mathbf{C} = -1$ egyenlőség áll fenn, akkor a két bázis ellentétes irányítást képvisel.

A σ síkot irányítsuk oly módon, hogy a $\pi/2$ szögű elforgatás vigye az $\mathbf{i}$ vektort a $\mathbf{j}$ vektorba. Tegyük fel, hogy fennáll $det\,\mathbf{C} = 1$. Legyen φ az az előjeles szög, amellyel történő síkbeli elforgatás az $\mathbf{i}$ egységvektort az $\mathbf{i}'$ alapvektorba viszi. (Lásd a 16. ábrát.) Ez azt jelenti, hogy ezen φ szöggel fennáll az $\mathbf{i}' = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}$ egyenlőség. Mivel a $\mathbf{j}'$ az $\mathbf{i}'$–nak a $\pi/2$ szögű elforgatottja, $\mathbf{j}' = -\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j}$ teljesül. Ily módon azt kapjuk, hogy az élvektorok transzformációját leíró mátrix a $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ alakot ölti. Szokás egyébként azt is mondani, hogy az új alapvektorokat az eredeti bázisvektorok φ szögű elforgatásával nyerjük.

Tekintsük most a $det\,\mathbf{C} = -1$ esetet. Ezúttal is vegyük azt a φ előjeles szöget, amelyre igaz $\mathbf{i}' = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j}$. Ekkor $\mathbf{j}'$ az $\mathbf{i}'$ alapvektor $-\pi/2$ szögű elforgatottja, emiatt fennáll $\mathbf{j}' = \sin\varphi\,\mathbf{i} - \cos\varphi\,\mathbf{j}$. A fentiek alapján az élvektorok transzformációját ezúttal a $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ mátrix írja le.

Speciális koordinátatranszformációk

Az egyik speciális koordinátatramszformációnak azt tekintjük, amikor az új koordináta–rendszerben csak az alapvektorokat módosítjuk, vagyis amikor O' origó megegyezik az O–val. Világos, hogy ekkor fennáll $t_1 = 0$ és $t_2 = 0$. Ez esetben a koordináták kapcsolatát az

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{C}^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

összefüggés adja meg.

A másik speciális koordinátatranszformáció az, amikor csak a kezdőpont változik, tehát az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ alapvektorok fixen maradnak. Az O' új kezdőpont helyét annak (t_1, t_2) koordinátái, illetve az $\overrightarrow{OO'} = t_1\,\mathbf{i} + t_2\,\mathbf{j}$ vektor határozzák meg. Világos, hogy ez esetben $\mathbf{C}$ megegyezik az $\mathbf{E}$ egységmátrixszal. A koordináták kapcsolatát az egyszerű

$$x' = x - t_1, \qquad y' = x - t_2$$

egyenletek adják meg. Szokás ekkor azt mondani, hogy ennél a transzformációnál csak a kezdőpontot toljuk el a $\mathbf{t} = t_1\,\mathbf{i} + t_2\,\mathbf{j}$ vektorral.

A másodrendű görbék

Tekintsük a tér egy σ síkját és abban vegyünk egy $(O,\, \mathbf{i},\, \mathbf{j})$ Descartes–féle koordináta–rendszert.

2.5. Definíció. Legyenek $a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ b_1,\ b_2,\ d$ olyan valós számok, amelyekre teljesül az $(a_{11})^2 + (a_{12})^2 + (a_{22})^2 > 0$ feltétel. Az

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, x\, y + a_{22}\, y^2 + 2\, b_1\, x + 2\, b_2\, y + d = 0 \tag{MFE}$$

egyenlettel leírt másodrendű görbén a σ sík azon pontjainak $\mathcal{M}$ halmazát értjük, amelyek koordinátái kielégítik az egyenletet.

Megjegyzés. Az $a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ b_1,\ b_2,\ d$ valós számokat mondjuk az (MFE) másodfokú egyenlet együtthatóinak.

Az együtthatókra vonatkozó $(a_{11})^2 + (a_{12})^2 + (a_{22})^2 > 0$ feltétel biztosítja azt, hogy az egyenletben szerepel legalább egy másodfokú tag.

Megjegyzés. Amennyiben a fenti (MFE) egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk egy μ $(\mu \neq 0)$ valós számmal, akkor a kapott egyenlet ugyanazt az $\mathcal{M}$ alakzatot fogja leírni.

2.6. Definíció. Egy σ–beli $\mathcal{M}$ alakzatot másodrendű görbének mondunk, ha vannak olyan $a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ b_1,\ b_2,\ d$ valós együtthatók, melyekre igaz $(a_{11})^2 + (a_{12})^2 + (a_{22})^2 > 0$ és az

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, x\, y + a_{22}\, y^2 + 2\, b_1\, x + 2\, b_2\, y + d = 0$$

másodfokú egyenletet éppen az $\mathcal{M}$ alakzatot írja le.

A 2.4. Állításból azonnal következik, hogy a másodrendű görbe fogalma nem függ a koordináta–rendszer megválasztásától.

2.7. Következmény. *Legyen $\mathcal{M}$ egy olyan síkbeli alakzat, amelyet a sík $(O,\, \mathbf{i},\, \mathbf{j})$ koordináta–rendszerében az (MFE) másodfokú egyenlet ír le valamely együtthatók mellett. Ekkor $\mathcal{M}$ a sík bármely koordináta–rendszerében leírható egy másodfokú egyenlettel.*

Megjegyzés. A későbbiek során majd azt tárgyaljuk, hogy amennyiben adva van egy másodrendű görbe az egyenletével az eredeti koordináta–rendszerben, akkor miként lehet áttérni egy olyan koordináta-rendszerre, amelyben a leíró egyenlet a legegyszerűbb alakot veszi fel.

Példák másodrendű görbékre

A fenti definíciók alapján az ellipszisek, a hiperbolák és a parabolák mind másodrendű görbék, hiszen ezek kanonikus egyenlete egy másodfokú egyenlet.

Tekintsük a síkban olyan $g,\ h$ egyeneseket, melyeknek az $(O,\, \mathbf{i},\, \mathbf{j})$ koordináta–rendszerre vonatkozó lineáris egyenletei $A_1\, x + B_1\, y + C_1 = 0$, illetve $A_2\, x + B_2\, y + C_2 = 0$ az $A_1,\ B_1,\ C_1$ és $A_2,\ B_2,\ C_2$ valós együtthatókkal.

Nyilvánvaló, hogy az $(A_1\, x + B_1\, y + C_1)(A_2\, x + B_2\, y + C_2) = 0$ egyenlettel leírt $\mathcal{M}$ másodrendű görbére fennáll $\mathcal{M} = g \cup h$. Eszerint két metsző egyenes uniója, két párhuzamos egyenes uniója és egyetlen egyenes is egy másodrendű görbét képez.

A másodrendű görbék szimmetriatulajdonságai

Tegyük fel, hogy a σ síkban rögzítve van egy $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ derékszögű koordináta–rendszer. Tekintsünk egy $\mathcal{M}$ másodrendű görbét, amelyet az (MFE) egyenlet ír le valamely
a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, d együtthatókkal.

2.8. Állítás. *Igazak az alábbi kijelentések.*
(1) Ha az (MFE) egyenletben szereplő együtthatókra fennáll $a_{12} = 0$ és $b_1 = 0$, akkor az y koordinátatengely szimmetriatengelye az $\mathcal{M}$ másodrendű görbének.
(2) Amennyiben $a_{12} = 0$ és $b_2 = 0$ teljesül, akkor az x koordinátatengely az $\mathcal{M}$ görbének szimmetriatengelye.
(3) Ha az (MFE) egyenletben fennáll $b_1 = 0$ és $b_2 = 0$, akkor az O origó szimmetriacentruma az $\mathcal{M}$ másodrendű görbének.

Bizonyítás.
(1) Tegyük fel, hogy $a_{12} = 0$ és $b_1 = 0$. Ekkor az (MFE) egyenlet az

$$a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + 2\,b_2\,y + d = 0$$

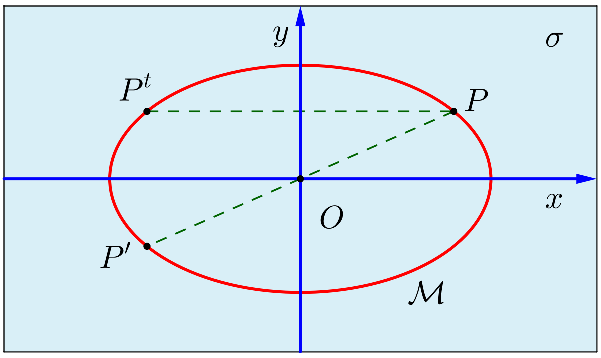
alakra egyszerűsödik. Vegyünk a síkban egy $P(x_P, y_P)$ pontot. Világos, hogy P–t az y tengelyre tükrözve a $P^t(-x_P, y_P)$ pontot kapjuk. Látható, hogy P koordinátái pontosan akkor elégítik ki az (MFE) egyenletet, amikor ez igaz a P^t pontra. Ebből adódik, hogy az y tengelyre történő tükrözés az $\mathcal{M}$ görbét önmagába képezi.

(2) kijelentés igazolása teljesen analóg (1) bizonyításával.

(3) Tegyük fel, hogy fennáll $b_1 = 0$ és $b_2 = 0$. Ez esetben (MFE) egyenletünk az

$$a_{11}\,x^2 + 2a_{12}\,x\,y + a_{22}\,y^2 + d = 0$$

alakot ölti. Az O kezdőpontra történő centrális tükrözés a sík egy tetszőleges $P\,(x_P, y_P)$ pontját azon P' pontba viszi, melynek koordinátái $(-x_P, -y_P)$. Látható, hogy $P \in \mathcal{M}$ pontosan akkor teljesül, amikor P' koordinátái kielégítik az egyenletet. Ez pedig azt jelenti, hogy O szimmetriacentruma az $\mathcal{M}$ másodrendű görbének. $\square$



17. ábra. *Egy síkbeli P pont tükrözése az y tengelyre és az O origóra.*

Speciális másodfokú egyenletek és az általuk leírt másodrendű görbék

A továbbiakban is feltesszük, hogy a síkban adva van egy $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ derékszögű koordináta–rendszer. Az alábbiak során felsorolunk 9 speciális másodfokú egyenletet és jellemezzük az általuk leírt $\mathcal{M}$ másodrendű görbét. Az egyenletekben szereplő a, b és p konstansok valamely pozitív valós számok.

(SE1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$ Az egyenlettel leírt $\mathcal{M}$ alakzat egy ellipszis.

(SE2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$ Nincs olyan pont, amelynek koordinátái kielégítik az egyenletet, vagyis $\mathcal{M} = \emptyset$.

(SE3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$ Az O kezdőpont koordinátáira igaz az egyenlet, vagyis $\mathcal{M} = \{O\}$.

(SE4) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$ Az egyenlettel leírt $\mathcal{M}$ alakzat egy hiperbola.

(SE5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$ Az $\mathcal{M}$ alakzat két egymást metsző egyenes uniója.

(SE6) $x^2 - 2\,p\,y = 0.$ A leírt $\mathcal{M}$ alakzat egy parabola.

(SE7) $x^2 - a^2 = 0.$ Az $\mathcal{M}$ alakzat két párhuzamos egyenes uniója.

(SE8) $x^2 + a^2 = 0.$ Nincs olyan pont, amelynek koordinátái kielégítik az egyenletet, vagyis $\mathcal{M} = \emptyset$.

(SE9) $x^2 = 0.$ A leírt $\mathcal{M}$ alakzat egy egyenes.

A másodrendű görbe mátrixos egyenlete egy új koordináta–rendszerben

A térben vegyünk egy σ síkot és abban egy $(O,\, \mathbf{i},\, \mathbf{j})$ derékszögű koordináta–rendszert. Legyenek adva az $a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ b_1,\ b_2,\ d$ valós számok. Ezúttal tegyük fel, hogy fennáll $a_{12} \neq 0$. Tekintsük a fenti együtthatókkal meghatározott

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, x\, y + a_{22}\, y^2 + 2\, b_1\, x + 2\, b_2\, y + d = 0 \qquad \text{(MFE)}$$

másodfokú egyenletet és az általa leírt $\mathcal{M}$ másodrendű görbét. Az egyenletben szereplő $2\, a_{12}\, x\, y$ kifejezést nevezzük vegyes másodfokú tagnak.

Az egyenlet másodfokú tagjainak együtthatóiból képezzük az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ szimmetrikus mátrixot, amelyben $a_{21} = a_{12}$. Vegyük észre, hogy az (MFE) másodfokú egyenlet felírható az

$$(x,\, y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\, (b_1,\, b_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + d = 0 \qquad \text{(MFE)}$$

mátrixos alakban.

Hajtsunk végre egy olyan koordináta–transzformációt, amelynél csak az alapvektorokat változtatjuk meg, tehát az O kezdőpont fixen marad. Az új alapvektorok legyenek $\mathbf{i}'$ és $\mathbf{j}'$, a bázisvektorok transzformációját leíró mátrix pedig legyen $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$.

Az $(O,\, \mathbf{i}',\, \mathbf{j}')$ koordináta–rendszerben a síkbeli pontok koordinátáit jelölje x' és y'. Ekkor a (2.1) összefüggésnek megfelelően az $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ mátrixegyenlettel lehet kifejezni az eredeti $x,\ y$ koordinátákat az újakból. Amennyiben az egyenletben transzponálást hajtunk végre, akkor azt kapjuk, hogy fennáll $(x, y) = (x', y')\, \mathbf{C}^T$. Ezen összefüggések alapján adódik, hogy az új koordináta–rendszerben az

$$(x',\, y')\, \mathbf{C}^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \mathbf{C} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2\, (b_1,\, b_2)\, \mathbf{C} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + d = 0 \qquad \text{(TMFE)}$$

mátrixegyenlet írja le az $\mathcal{M}$ másodrendű görbét. Mivel a mátrixok szorzása asszociatív művelet, nem szükséges zárójelezést alkalmazni az egyenletben.

Megjegyzés. Az összefüggésre alkalmazott (TMFE) jelzés a transzformációs másodfokú egyenletre utal.

Világos, hogy amennyiben a $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$ szorzatmátrix diagonális, akkor a másodrendű görbe új egyenletében már nem szerepel vegyes másodfokú tag.

Megjegyzés. A további tárgyalás során meg fogjuk mutatni, hogy mindig át lehet térni egy olyan síkbeli koordináta–rendszerre, ahol a görbe egyenletéből eltűnik a vegyes másodfokú tag. Ehhez azonban lineáris algebrai eszközöket is kell alkalmaznunk.

Speciális lineáris transzformációk a síkbeli vektorok terén

A továbbiakban néhány lineáris algebrai fogalmat és összefüggést idézünk fel, illetve alkalmazzuk ezeket a síkbeli vektorok 2–dimenziós terére.

Legyen adva a térben egy σ sík. A σ–val párhuzamos (vagy más szóval a σ–beli) szabad vektorok terét jelölje $\mathcal{V}_\sigma$. Rögzítsünk a $\mathcal{V}_\sigma$ vektortérben egy $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ortonormált bázist.

A $\mathcal{V}_\sigma$ téren legyen adott egy $\alpha : \mathcal{V}_\sigma \to \mathcal{V}_\sigma$ lineáris transzformáció. Mint ismeretes, ez azt jelenti, hogy az α leképezésre tetszőleges $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorok és $\mu \in \mathbb{R}$ valós szám esetén fennállnak az $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u}) + \alpha(\mathbf{v})$ és $\alpha(\mu \cdot \mathbf{u}) = \mu \cdot \alpha(\mathbf{u})$ egyenlőségek.

Az $\alpha(\mathbf{i})$, $\alpha(\mathbf{j})$ képvektorokat fejezzük ki az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ bázisvektorok lineáris kombinációjaként az

$$\alpha(\mathbf{i}) = a_{11}\,\mathbf{i} + a_{21}\,\mathbf{j}, \qquad \alpha(\mathbf{j}) = a_{12}\,\mathbf{i} + a_{22}\,\mathbf{j} \tag{2.3}$$

alakban. Az a_{rs} $(r,\, s = 1,\, 2)$ együtthatók meghatároznak egy 2×2–es $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mátrixot. Ezt nevezzük az α lineáris transzformáció $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ bázisra vonatkozó mátrixának. Szokás azt is mondani, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix írja le α–t az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ alapvektorokra nézve.

Az $\mathbf{A}$ mátrix már egyértelműen meghatározza az α transzformációt. Ugyanis, amennyiben veszünk egy tetszőleges $\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j}$ vektort, akkor az $\alpha(\mathbf{u}) = u_1'\,\mathbf{i} + u_2'\,\mathbf{j}$ képvektor koordinátáira fennáll az $\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ összefüggés.

Világos az is, hogy rögzített $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ bázisvektorok mellett bármely 2×2–es $\mathbf{A}$ mátrixnak megfelel egy $\alpha : \mathcal{V}_\sigma \to \mathcal{V}_\sigma$ lineáris transzformáció, amelyre teljesülnek a (2.3) összefüggések.

2.9. Definíció. Egy ϱ valós számot az α lineáris transzformáció sajátértékének mondunk, ha van olyan $\mathbf{w}$ $(\mathbf{w} \neq \mathbf{0})$ vektor, amellyel fennáll az $\alpha(\mathbf{w}) = \varrho \cdot \mathbf{w}$ egyenlőség. Ennek teljesülése esetén $\mathbf{w}$–t az α transzformáció egyik sajátvektorának nevezzük.

Egy $\mathbf{w} = w_1\,\mathbf{i} + w_2\,\mathbf{j}$ vektor pontosan akkor sajátvektora α–nak a ϱ sajátértékkel, ha a koordinátáiból képzett oszlopmátrixra teljesül az $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \varrho \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ egyenlőség. Vegyük észre, hogy ezzel egyenértékű az

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

összefüggés. A fenti (2.4) mátrixegyenletet tekintsük úgy, mint a w_1, w_2 ismeretlenekre felírt homogén lineáris egyenletrendszert, amelyben az együtthatók mátrixa $\mathbf{A} - \varrho\,\mathbf{E}$. Világos, hogy a ϱ valós szám akkor pontosan akkor sajátértéke α–nak, ha ennek az egyenletrendszernek van nem triviális megoldása.

Ebből pedig az következik, hogy egy ϱ valós szám pontosan akkor sajátértéke az α transzformációnak, ha az $\mathbf{A} - \varrho\,\mathbf{E}$ mátrix determinánsára $det \begin{pmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho \end{pmatrix} = 0$ teljesül.

A továbbiakban λ–val egy polinom változóját fogjuk jelölni. Mint ismeretes, a

$$k_{\mathbf{A}}(\lambda) = det\,(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})$$

polinomot az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomjának mondjuk.

A fentiekből már következik, hogy igaz az alábbi kijelentés.

2.10. Következmény. *Egy ϱ valós szám sajátértéke az $\mathbf{A}$ mátrix által meghatározott α lineáris transzformációnak akkor és csak akkor, ha ϱ gyöke a $k_{\mathbf{A}}(\lambda)$ karakterisztikus polinomnak.*

Megjegyzés. Világos, hogy amennyiben az $\mathbf{A}$ mátrix diagonális, vagyis fennáll $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$, akkor az a_{11}, a_{22} mátrixelemek sajátértékek és az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ alapvektorok sajátvektorai az α–nak.

A továbbiakban már végig feltesszük, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, vagyis $a_{12} = a_{21}$, és $a_{12} \neq 0$ teljesül.

Ezt követően a könnyebb értelmezés céljából a $\mathcal{V}_\sigma$–beli $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorok skaláris szorzatát $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ fogja jelölni. Az alábbi kijelentést közvetlen számolással igazolni lehet.

2.11. Állítás. *Az $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix által leírt $\alpha : \mathcal{V}_\sigma \to \mathcal{V}_\sigma$ lineáris transzformációra tetszőleges $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorok esetén fennáll $\langle \alpha(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \alpha(\mathbf{v}) \rangle$.*

Bizonyítás.

Az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorokat adjuk meg az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ortonormált bázisvektorok lineáris kombinációjaként az $\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j}$ és $\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j}$ alakban. Az $\langle \alpha(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle$ skaláris szorzatot ki lehet fejezni a vektorok koordinátáival és az $\mathbf{A}$ mátrix elemeivel. Ehhez felhasználhatjuk, hogy az $\alpha(\mathbf{u})$ képvektorra fennáll

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{u}) &= u_1\,\alpha(\mathbf{i}) + u_2\,\alpha(\mathbf{j}) = u_1\,(a_{11}\,\mathbf{i} + a_{12}\,\mathbf{j}) + u_2\,(a_{12}\,\mathbf{i} + a_{22}\,\mathbf{j}) \\ &= (a_{11}\,u_1 + a_{12}\,u_2)\mathbf{i} + (a_{12}\,u_1 + a_{22}\,u_2)\mathbf{j}\,.\end{aligned}$$

Ennek következtében a skaláris szorzat értékére az

$$\langle \alpha(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = a_{11}\,u_1\,v_1 + a_{12}(u_1\,v_2 + u_2\,v_1) + a_{22}\,u_2\,v_2$$

összefüggést nyerjük. Látható, hogy ez szimmetrikus az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorok koordinátáira nézve, vagyis $\langle \alpha(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \alpha(\mathbf{v}) \rangle$ teljesül. $\square$

Legyen $\mathbf{A}$ egy olyan mátrix, amelyre igaz $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ és $a_{12} \neq 0$. A következő eredményt majd alkalmazni fogjuk abból a célból, hogy koordinátatranszformációval egyszerűbb alakra hozzuk a másodrendű görbe egyenletét.

2.12. Állítás. *Az $\mathbf{A}$ mátrixszal leírt $\alpha : \mathcal{V}_\sigma \to \mathcal{V}_\sigma$ lineáris transzformációra igazak az alábbi kijelentések.*

(1) Az α transzformációnak két különböző valós sajátértéke van.

(2) Legyenek λ_1 és λ_2 az α transzformáció sajátértékei. Ha az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ vektorokra igaz $\alpha(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \cdot \mathbf{e}_1$ és $\alpha(\mathbf{e}_2) = \lambda_2 \cdot \mathbf{e}_2$, akkor fennáll $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$.

Bizonyítás.

Tekintsük az $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomját, amelyre

$$k_{\mathbf{A}}(\lambda) = det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-(a_{12})^2 = \lambda^2-(a_{11}+a_{22})\,\lambda+(a_{11}\,a_{22}-(a_{12})^2)$$

teljesül. Eszerint a $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + (a_{11}\,a_{22} - (a_{12})^2) = 0$ másodfokú egyenlet valós gyökei lesznek az α sajátértékei.

Ismeretes, hogy egy másodfokú egyenletnek akkor van két különböző valós gyöke, ha a diszkriminánsa egy pozitív szám. Mivel $a_{12} \neq 0$, jelen esetben azt kapjuk, hogy a fenti másodfokú egyenlet diszkriminánánsára

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4\,(a_{11}\,a_{22} - (a_{12})^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4\,(a_{12})^2 > 0$$

teljesül, ami már igazolja az állításban szereplő (1) kijelentést.

Legyenek λ_1 és λ_2 az α különböző sajátértékei. Vegyük az α transzformáció olyan $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ sajátvektorait, melyekkel teljesül $\alpha(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \cdot \mathbf{e}_1$ és $\alpha(\mathbf{e}_2) = \lambda_2 \cdot \mathbf{e}_2$. A 2.11. Állítás szerint igaz az

$$\langle \alpha(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2 \rangle - \langle \mathbf{e}_1, \alpha(\mathbf{e}_2) \rangle = 0.$$

egyenlőség. Ha felhasználjuk, hogy $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ sajátvektorok a λ_1, λ_2 sajátértékekkel, akkor ebből

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$$

adódik. Mivel $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, azt nyerjük, hogy fennáll az $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$ összefüggés. $\square$

Megjegyzés. Az előző bizonyításban kihasználtuk, hogy a λ_1, λ_2 sajátértékek a $k_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$ másodfokú egyenlet gyökei. A gyökök és együtthatók kapcsolatából adódik, hogy a két sajátértékre fennáll $\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}$ és $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = det\,\mathbf{A}$.

A főtengelytranszformáció

A σ síkban legyen adott egy $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ derékszögű koordináta–rendszer. Legyenek adva az a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, d valós számok, melyekre igaz $a_{12} \neq 0$. Tekintsük a fenti együtthatókkal meghatározott

$$a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,x\,y + a_{22}\,y^2 + 2\,b_1\,x + 2\,b_2\,y + d = 0 \qquad \text{(MFE)}$$

másodfokú egyenletet és az általa leírt $\mathcal{M}$ másodrendű görbét.

A másodfokú tagok együtthatóiból képezzük az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ szimmetrikus mátrixot. Vegyük azt az $\alpha : \mathcal{V}_\sigma \to \mathcal{V}_\sigma$ lineáris transzformációt, amelynek az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ortonormált bázisra vonatkozó mátrixa megegyezik $\mathbf{A}$–val.

Mint ismeretes, az (MFE) egyenletet fel tudjuk írni az

$$(x,\, y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\,(b_1,\, b_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + d = 0$$

mátrixos alakban is.

Ennyi előkészítést követően már igazolni tudjuk az alábbi alapvető tételt. Ennek kimondásánál már felhasználjuk a 2.12. Állítást, miszerint az α–nak két valós sajátértéke van és a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok merőlegesek egymásra.

2.13. Tétel. *Legyenek λ_1, λ_2 az α lineáris transzformáció sajátértékei és $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ olyan ortonormált vektorok, amelyekre teljesül $\alpha(\mathbf{i}') = \lambda_1 \cdot \mathbf{i}'$, $\alpha(\mathbf{j}') = \lambda_2 \cdot \mathbf{j}'$. Tekintsük a $\mathcal{V}_\sigma$–beli $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ bázisok transzformációját leíró $\mathbf{C}$ mátrixot, melynek elemei az $\mathbf{i}' = c_{11}\,\mathbf{i} + c_{21}\,\mathbf{j}$*

és $\mathbf{j}' = c_{12}\,\mathbf{i} + c_{22}\,\mathbf{j}$ *lineáris kombinációkban szereplő együtthatók. Ekkor az* $(O,\, \mathbf{i}',\, \mathbf{j}')$ *koordináta–rendszerben az* $\mathcal{M}$ *másodrendű görbét a*

$$\lambda_1\,(x')^2 + \lambda_2\,(y')^2 + 2\,(c_{11}\,b_1 + c_{21}\,b_2)\,x' + 2\,(c_{12}\,b_1 + c_{22}\,b_2)\,y' + d = 0 \qquad \text{(FTE)}$$

egyenlet írja le.

Bizonyítás.

Korábban már megmutattuk, hogy az új $(O,\, \mathbf{i}',\, \mathbf{j}')$ koordináta–rendszerben az $\mathcal{M}$ másodrendű görbét az

$$(x',\, y')\,\mathbf{C}^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \mathbf{C} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2\,(b_1,\, b_2)\,\mathbf{C} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + d = 0 \qquad \text{(TMFE)}$$

egyenlet írja le. Mivel az $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ egységvektorok az α transzformációnak sajátvektorai a λ_1, λ_2 sajátértékekkel, a koordinátáikból képzett oszlopmátrixokra

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$$

teljesül. Vegyük észre, hogy ennek alapján az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{C}$ négyzetes mátrixok szorzatára igaz a

$$\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\,c_{11} & \lambda_2\,c_{12} \\ \lambda_1\,c_{21} & \lambda_2\,c_{22} \end{pmatrix}$$

egyenlőség. Ebből viszont már következik, hogy fennáll

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^T\mathbf{AC} &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1\,c_{11} & \lambda_2\,c_{12} \\ \lambda_1\,c_{21} & \lambda_2\,c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(c_{11}\,c_{11} + c_{21}\,c_{21}) & \lambda_2(c_{11}\,c_{12} + c_{21}\,c_{22}) \\ \lambda_1(c_{12}\,c_{11} + c_{22}\,c_{21}) & \lambda_2(c_{12}\,c_{12} + c_{22}\,c_{22}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot \langle \mathbf{i}', \mathbf{i}' \rangle & \lambda_2 \cdot \langle \mathbf{i}', \mathbf{j}' \rangle \\ \lambda_1 \cdot \langle \mathbf{j}', \mathbf{i}' \rangle & \lambda_2 \cdot \langle \mathbf{j}', \mathbf{j}' \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mivel $\mathbf{i}'$ és $\mathbf{j}'$ egymásra merőleges egységvektorok. Eszerint az új koordináta–rendszerben az

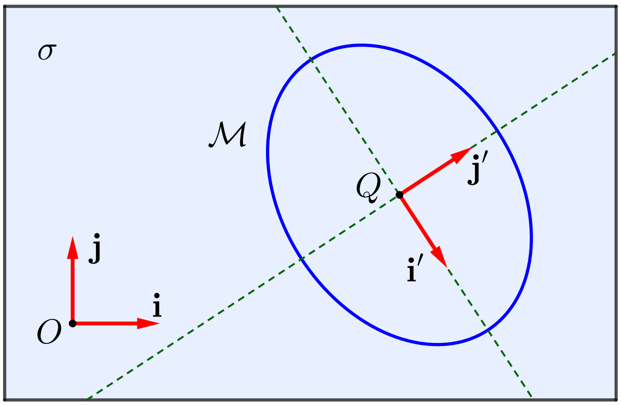
$$(x',\, y') \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2\,(b_1,\, b_2)\,\mathbf{C} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + d = 0$$

mátrixos egyenlet írja le az $\mathcal{M}$ másodrendű görbét. Ha ebben elvégezzük a mátrix–szorzásokat, akkor a tételben megadott

$$\lambda_1\,(x')^2 + \lambda_2\,(y')^2 + 2\,(c_{11}\,b_1 + c_{21}\,b_2)\,x' + 2\,(c_{12}\,b_1 + c_{22}\,b_2)\,y' + d = 0 \qquad \text{(FTE)}$$

egyenletet kapjuk. □

Megjegyzés. Az (MFE) másodfokú egyenletre vonatkozó főtengelytranszformáción azt értjük, hogy olyan új bázisvektorokat veszünk, amelyek koordináta–rendszerében már eltűnik az egyenletből a vegyes másodfokú tag. Ez lényegében azt jelenti, hogy olyan alapvektorokat alkalmazunk, amelyek közül az egyik (vagy mindkettő) párhuzamos a leírt $\mathcal{M}$ másodrendű görbe szimmetriatengelyével. (Lásd a 18. ábrát.)



18. ábra. *A főtengelytranszformációnál alkalmazott* $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ *alapvektorok.*

A kezdőpont eltolásával elérhető további egyszerűsítés az egyenletben

Tegyük fel, hogy az $\mathcal{M}$ másodrendű görbe esetében a főtengelytranszformációt már végrehajtottuk, és az $(O,\, \mathbf{i}',\, \mathbf{j}')$ koordináta–rendszerben $\mathcal{M}$–t az

$$\lambda_1\,(x')^2 + \lambda_2\,(y')^2 + 2\,b_1'\,x' + 2\,b_2'\,y' + d = 0 \tag{FTE}$$

egyenlet írja le, amelyben az elsőfokú tagok együtthatóira fennáll $b_r' = c_{1r}\,b_1 + c_{2r}\,b_2$ $(r = 1,\, 2)$. Nem nehéz észrevenni, hogy az origó megfelelő eltolásával az egyenlet még tovább egyszerűsíthető. Az eltolással azt lehet elérni, hogy vagy mindkét elsőfokú tag, vagy közülük az legalább az egyik, eltűnjön az egyenletből.

Tekintsük most azt az esetet, amikor az (FTE) egyenletben fennáll $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$. Ekkor az egyenlet átalakításával a

$$\lambda_1\left(x' + \frac{b_1'}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{b_2'}{\lambda_2}\right)^2 + d - \frac{(b_1')^2}{\lambda_1} - \frac{(b_2')^2}{\lambda_2} = 0$$

összefüggést nyerjük. Térjünk most át az $(O,\, \mathbf{i}',\, \mathbf{j}')$ koordináta–rendszerről azon $(Q,\, \mathbf{i}',\, \mathbf{j}')$ koordináta–rendszerre, amelynek kezdőpontját az $\overrightarrow{OQ} = -\dfrac{b_1'}{\lambda_1}\,\mathbf{i}' - \dfrac{b_2'}{\lambda_2}\,\mathbf{j}'$ vektor határozza meg. Azt kapjuk, hogy egy σ síkbeli P pontnak a $\overrightarrow{QP} = \tilde{x}\,\mathbf{i}' + \tilde{y}\,\mathbf{j}'$ helyvektorában szereplő együtthatókra

$\tilde{x} = x' + \dfrac{b_1'}{\lambda_1}$ és $\tilde{y} = y' + \dfrac{b_2'}{\lambda_2}$ teljesül. Ebből már adódik, hogy a $(Q,\, \mathbf{i}',\, \mathbf{j}')$ koordináta–rendszerben a

$$\lambda_1\,\tilde{x}^2 + \lambda_2\,\tilde{y}^2 + \tilde{d} = 0 \tag{2.5}$$

egyenlet írja le az $\mathcal{M}$ másodrendű görbét. A levezetés alapján a $\tilde{d}$ konstans értékére fennáll $\tilde{d} = d - \dfrac{(b_1')^2}{\lambda_1} - \dfrac{(b_2')^2}{\lambda_2}$.

Az euklideszi sík másodrendű görbéinek osztályozási tétele

Korábban már beláttuk, hogy a másodfokú egyenlettel leírt síkbeli alakzat lehet ellipszis, hiperbola, parabola, egyenespár, egyetlen egyenes, egyetlen pont és üres halmaz is. Felvetődhet a kérdés, hogy ezeken túl vannak–e még további másodrendű görbék. Mint látni fogjuk, a válasz nemleges.

A σ síkon legyen adott egy $(O,\, \mathbf{i},\, \mathbf{j})$ derékszögű koordináta–rendszer. Vegyünk olyan $a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ b_1,\ b_2,\ d$ valós számokat, melyekre igaz $(a_{11})^2 + (a_{12})^2 + (a_{22})^2 > 0$. Tekintsük ezen együtthatókkal meghatározott

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, x\, y + a_{22}\, y^2 + 2\, b_1\, x + 2\, b_2\, y + d = 0 \tag{MFE}$$

másodfokú egyenletet és az általa leírt $\mathcal{M}$ másodrendű görbét.

2.14. Tétel. *Megfelelő koordinátatranszformáció alkalmazásával és egy μ ($\mu \neq 0$) számmal való szorzással elérhető, hogy az új koordináta–rendszerben az $\mathcal{M}$ másodrendű görbe egyenlete azonos legyen az (SE1)–(SE9) speciális másodfokú egyenletek egyikével.*
Bizonyítás (vázlatos).
Alkalmazni fogjuk a 2.12. Állításnál és 2.13. Tételeknél bevezetett jelöléseket.

A főtengelytranszformációval azt el tudjuk érni, hogy a leíró egyenletből eltűnjön a vegyes másodfokú tag. Ily módon az $\mathcal{M}$ új egyenlete a

$$\lambda_1\, (x')^2 + \lambda_2\, (y')^2 + 2\, b_1'\, x' + 2\, b_2'\, y' + d = 0 \tag{FTE}$$

alakban írható fel.

Amennyiben $\det \mathbf{A} \neq 0$, akkor az α transzformáció λ_1 és λ_2 sajátértékei különböznek 0–tól, mivel igaz $\det \mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2$. Az előző tárgyalás alapján a kezdőpont megfelelő eltolásával elérhető, hogy az elsőfokú tagok is kiessenek és így a (2.5) szerinti

$$\lambda_1\, \tilde{x}^2 + \lambda_2\, \tilde{y}^2 + \tilde{d} = 0$$

egyenlet fogja leírni az $\mathcal{M}$ másodrendű görbét a legújabb $(Q,\, \mathbf{i}',\, \mathbf{j}')$ koordináta–rendszerben. Ezt az alkalmas μ ($\mu \neq 0$) számmal megszorozva egy olyan leíró egyenlethez jutunk, amely megfelel az (SE1)–(SE5) speciális másodfokú egyenletek egyikének.

Tekintsük a $\det \mathbf{A} = 0$ esetet. Ekkor a $\lambda_1,\ \lambda_2$ sajátértékek egyike 0. Az általánosság elvének megsértése nélkül feltehetjük, hogy $\lambda_1 \neq 0$. Az (FTE) egyenletünk a

$$\lambda_1\, (x')^2 + 2\, b_1'\, x' + 2\, b_2'\, y' + d = 0 \tag{2.6}$$

alakra egyszerűsödik. Világos, hogy amennyiben $b_2' \neq 0$, akkor a fenti egyenlet egy parabolát ír le, és megfelelő transzformációt alkalmazva az (SE6) egyenlethez jutunk.

Amennyiben a (2.6) egyenletben $b_2' = 0$ áll fenn, akkor az

$$\lambda_1\, (x')^2 + 2\, b_1'\, x' + d = 0$$

egyenlet írja le az $\mathcal{M}$ alakzatot. Vegyük észre, hogy ekkor a kezdőpont megfelelő eltolásával el tudjuk tüntetni az elsőfokú tagot és a konstanssal való szorzást követően az (SE7)–(SE9) egyenletek egyike fogja leírni az $\mathcal{M}$ másodrendű görbét. $\square$

Konkrét példa a kanonikus egyenlet meghatározására

Feladat. A síkban adva van egy $(O,\, \mathbf{i},\, \mathbf{j})$ derékszögű koordináta–rendszer. Tekintsünk a

$$7\,x^2 - 8\,x\,y + y^2 - 32\,x + 26\,y + 43 = 0$$

egyenlettel leírt $\mathcal{M}$ másodrendű görbét. Koordinátatranszformáció alkalmazásával határozzuk meg $\mathcal{M}$–nek egy kanonikus egyenletét, és jellemezzük a görbét.

Az alábbiak során megoldjuk a feladatot.
Világos, hogy az (MFE) egyenletben szereplő együtthatók értékei a következők:
$a_{11} = 7,\ a_{12} = -4,\ a_{22} = 1,\ b_1 = -16,\ b_2 = 13,\ d = 43.$
Első lépésben az alapvektorok megfelelő transzformációjával elérjük, hogy az új egyenletben eltűnjön a vegyes másodfokú tag. Vegyük a másodfokú tagok együtthatóiból képzett $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot. A síkbeli vektorok $\mathcal{V}_\sigma$ terének $\mathbf{i},\ \mathbf{j}$ bázisára nézve az $\mathbf{A}$ mátrix leír egy $\alpha : \mathcal{V}_\sigma \to \mathcal{V}_\sigma$ lineáris transzformációt. A főtengelytranszformációra vonatkozó tétel szerint olyan alapvektorokat kell alkalmaznunk, amelyek az α lineáris transzformációnak sajátvektorai. Ennek érdekében kiszámítjuk az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomját és annak gyökeit. A λ változójú $k_{\mathbf{A}}(\lambda)$ polinomra fennáll

$$k_{\mathbf{A}}(\lambda) = det\,(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = det\,\begin{pmatrix} 7-\lambda & -4 \\ -4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 8\,\lambda - 9\,.$$

Könnyű belátni, hogy a $\lambda^2 - 8\,\lambda - 9 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei a $\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = -1$ értékek. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j}$ vektor az α lineáris transzformációnak a λ_1 értékhez tartozó sajátvektora, vagyis fennáll $\alpha(\mathbf{u}) = \lambda_1\,\mathbf{u}$. Ismeretes, hogy ez esetben az $\mathbf{u}$ koordinátái kielégítik az $(\mathbf{A} - \lambda_1\,\mathbf{E})\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mátrixegyenletet. Jelen esetben az $u_1,\ u_2$ koordinátákra a

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenlet adódik. Ennek egyik megoldása $u_1 = 2,\ u_2 = -1$. Eszerint az $\mathbf{u} = 2\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$ vektorra teljesül $\alpha(\mathbf{u}) = 9\,\mathbf{u}$. Válasszuk az $\mathbf{i}'$ alapvektort az $\mathbf{u}$–val egyirányú egységvektornak, vagyis legyen $\mathbf{i}' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,(2\,\mathbf{i} - \mathbf{j})$. A másik alapvektor pedig legyen az $\mathbf{i}'$–re merőleges $\mathbf{j}' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,(\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j})$ egységvektor. Közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy $\mathbf{j}'$ is sajátvektora az α–nak a $\lambda_2 = -1$ sajátértékkel.

Térjünk át az eredeti $(O,\, \mathbf{i},\, \mathbf{j})$ koordináta–rendszerről az $(O,\, \mathbf{i}',\, \mathbf{j}')$ koordináta–rendszerre. A fentiek alapján az alapvektorok transzformációját a $\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix írja le. Mivel a kezdőpont nem változott a (2.1) összefüggésnek megfelelően az

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}}\,x' + \frac{1}{\sqrt{5}}\,y', \qquad y = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\,y'\,.$$

egyenletek adják meg az eredeti és az új koordináták kapcsolatát.

A 2.13. Tételt alkalmazva azt nyerjük, hogy a görbét az $(O,\, \mathbf{i}',\, \mathbf{j}')$ koordináta–rendszerben a

$$9\,(x')^2 - (y')^2 - 18\sqrt{5}\,x' + 4\sqrt{5}\,y' + 43 = 0$$

egyenlet írja le. Ugyanis, az elsőfokú tagok együtthatóira a $b'_r = c_{1r}\,b_1 + c_{2r}\,b_2$ $(r = 1, 2)$ összefüggés és $b_1 = -16,\ \ b_2 = 13$ alapján $2\,b'_1 = -18\sqrt{5},\ \ 2\,b'_2 = 4\sqrt{5}$ adódik.

A koordináta–rendszer kezdőpontjának megfelelő eltolásával az elsőfokú tagokat is ki lehet ejteni az egyenletből, hiszen a $\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = -1$ sajátértékek különböznek 0–tól.

A fenti egyenletet írjuk át a

$$9\,(x' - \sqrt{5})^2 - 45 - (y' - 2\sqrt{5})^2 + 20 + 43 = 0$$

alakba. A konstans tagokat összevonva a

$$9\,(x' - \sqrt{5})^2 - (y' - 2\sqrt{5})^2 + 18 = 0$$

összefüggéshez jutunk. Vegyük a síkban azt a Q pontot, amelynek az O–ra vonatkozó helyvektorára igaz

$$\overrightarrow{OQ} = \sqrt{5}\,\mathbf{i}' + 2\sqrt{5}\,\mathbf{j}'.$$

Térjünk át az $(O,\, \mathbf{i}',\, \mathbf{j}')$ rendszerből a $(Q,\, \mathbf{i}',\, \mathbf{j}')$ koordináta-rendszerre, amelyben egy tetszőleges P síkbeli pont koordinátái a $\overrightarrow{QP} = \tilde{x}\,\mathbf{i}' + \tilde{y}\,\mathbf{i}'$ lineáris kombinációban szereplő $\tilde{x},\ \tilde{y}$ együtthatók. Ezúttal az alapvektorokat nem módosítjuk, csak a kezdőpontot toljuk el a $\mathbf{t} = \overrightarrow{OQ}$ vektorral. Emiatt a koordináták között fennáll az

$$\tilde{x} = x' - \sqrt{5}, \qquad \tilde{y} = y' - 2\sqrt{5}$$

kapcsolat. Ily módon azt kapjuk, hogy a $(Q,\, \mathbf{i}',\, \mathbf{j}')$ koordináta-rendszerben a

$$9\,\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + 18 = 0$$

egyenlet írja le az $\mathcal{M}$ görbét. Ebből átrendezéssel az

$$\frac{\tilde{y}^2}{18} - \frac{\tilde{x}^2}{2} = 1$$

egyenlethez jutunk. Világos, hogy ez egy hiperbola kanonikus egyenlete. Az $\mathcal{M}$ hiperbola centruma a Q pont, valós féltengelyének hossza $a = 3\sqrt{2}$, a fókuszpontoknak a Q centrumtól mért távolsága pedig $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Ez esetben a hiperbola valós tengelye a $\tilde{y}$ koordinátatengely és a képzetes tengelyt adja az $\tilde{x}$ koordinátatengely.

Megjegyzés. Az alapvektorok $\mathbf{i}^\vee = \mathbf{j}',\ \mathbf{j}^\vee = \mathbf{i}'$ felcserélésével elérhető, hogy a hiperbola valós tengelye az új $\hat{x}$ koordinátatengelyre essen. A $(Q,\, \mathbf{i}^\vee,\, \mathbf{j}^\vee)$ koordináta-rendszerben az $\mathcal{M}$ másodrendű görbét az $\dfrac{\hat{x}^2}{18} - \dfrac{\hat{y}^2}{2} - 1 = 0$ egyenlet írja le.

A másodrendű görbék típusainak meghatározása

Vizsgálatainkhoz feltesszük, hogy a tekintett síkban adva van egy derékszögű koordináta–rendszer. Mint ismeretes, a másodrendű görbére vonatkozó (MFE) egyenletet fel tudjuk írni az

$$(x,\, y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\,(b_1,\, b_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + d = 0$$

mátrixos alakban is. A másodfokú tagok együtthatóiból képzett $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ szimmetrikus mátrixszal kapcsolatosan a következőket lehet észrevenni.

Amennyiben egy koordináta–transzformáció során módosítjuk az alapvektorokat, akkor a görbe új egyenletében a másodfokú tagok együtthatóval megadott $\mathbf{A}'$ mátrixra a (TMFE) egyenlet szerint fennáll az $\mathbf{A}' = \mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C}$ egyenlőség, amelyben $\mathbf{C}$ az alapvektorok transzformációját leíró 2×2–es mátrix. Mivel $\mathbf{C}$ ortogonális mátrix, vagyis $\mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{E}$, a determinánsára igaz $(det\,\mathbf{C})^2 = 1$. Ennek alapján teljesül $det\,\mathbf{A}' = det\,\mathbf{A}$.

Ha az (MFE) egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk egy μ $(\mu \neq 0)$ valós számmal, akkor a másodfokú együtthatók új mátrixa $\mu\cdot\mathbf{A}$ lesz. Ennek determinánsára igaz $det(\mu\cdot\mathbf{A}) = \mu^2 \cdot det\,\mathbf{A}$.

Megállapíthatjuk tehát, hogy sem koordinátatranszformáció esetén, sem pedig a konstanssal történő beszorzás esetén nem változik meg a másodfokú tagok együtthatóiból képzett $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix determinánsa. Ezen megállapítás és a 2.14. Tétel következtében igaz a következő kijelentés.

2.15. Állítás. A koordinátázott síkban az $\mathcal{M}$ másodrendű görbét írja le az (MFE) egyenlet. Megfelelő koordinátatranszformáció alkalmazásával és egy μ $(\mu \neq 0)$ számmal való szorzással elérhető, hogy az $\mathcal{M}$ egyenlete azonos legyen az (SE1)–(SE9) speciális másodfokú egyenletek közül az egyikkel.

(1) Ha fennáll $det\,\mathbf{A} > 0$, akkor az $\mathcal{M}$ görbe az (SE1), (SE2), (SE3) speciális egyenletek egyikével írható le.

(2) Amennyiben igaz $det\,\mathbf{A} < 0$, akkor az $\mathcal{M}$ görbét az (SE4), (SE5) speciális egyenletek egyikével lehet leírni.

(3) Ha $det\,\mathbf{A} = 0$ teljesül, akkor az $\mathcal{M}$ görbét az (SE6), (SE7), (SE8), (SE9) speciális egyenletek egyikével írhatjuk le.

A kúpszeletek kanonikus egyenleteinek ismeretében az előző eredmények alapján az alábbi megállapítást tehetjük.

2.16. Következmény. *A koordinátázott síkban az $\mathcal{M}$ másodrendű görbét írja le az (MFE) egyenlet. Igazak az alábbi kijelentések.*

(1) Ha az $\mathcal{M}$ görbe egy ellipszis, akkor a másodfokú tagok együtthatóiból képzett $\mathbf{A}$ mátrix determinánsára fennáll $det\,\mathbf{A} > 0$.

(2) Amennyiben az $\mathcal{M}$ görbe egy hiperbola, akkor $det\,\mathbf{A} < 0$ teljesül.

(3) Ha az $\mathcal{M}$ másodrendű görbe egy parabola, akkor fennáll $det\,\mathbf{A} = 0$.

3) A projektív tér értelmezése. A projektív sík koordinátázása

A térbeli alakzatok síkon történő ábrázolásához kézenfekvő vagy a parallel vetítés vagy a centrális vetítés módszerét alkalmazni. Mint ismeretes, az emberi szem által a térbeli tárgyakról alkotott kép a centrális vetületnek felel meg. Ily módon főként a festészet és az építészet számára már évszázadokkal ezelőtt szükségesnek mutatkozott a centrális vetítés törvényszerűségeinek feltárása. A centrális vetítés összefüggéseinek tanulmányozása egy új geometriai elmélet, a projektív geometria, kialakulásához vezetett.

Fogalmak, jelölések

Jelölje X az euklideszi tér pontjainak halmazát. Mint ismeretes, az X részhalmazait alakzatoknak mondjuk. Az egyenesek és a síkok kitüntetett alakzatok. A pontokat, egyeneseket és síkokat együttesen szokás térelemeknek is nevezni. Ezek illeszkedését a tartalmazás alapján értelmezzük. A továbbiakban az euklideszi tér összes egyenesének halmazát $\mathcal{E}$, az összes sík halmazát pedig $\mathcal{S}$ jelöli.

Ha A és B különböző pontok, $\langle A, B \rangle$ fogja jelölni azt az egyenest, amely az A–n és a B–n egyaránt áthalad. Amennyiben az A pont nem illeszkedik az e egyeneshez, $\langle e, A \rangle$ jelöli azt a síkot, amely tartalmazza az A pontot és az e egyenest.

Az alábbi definíció az egyazon pontra illeszkedő egyenesek, illetve síkok összességére ad egy–egy elnevezést.

3.1. Definíció. Legyen T az euklideszi tér egy tetszőleges pontja. A T–n áthaladó egyenesek $\mathcal{E}(T) = \{\, g \in \mathcal{E} \mid T \in g \,\}$ halmazát sugárnyalábnak nevezzük. A T pontot ezen sugárnyaláb tartópontjának mondjuk.
A T ponthoz illeszkedő síkok $\mathcal{S}(T) = \{\, \mu \in \mathcal{S} \mid T \in \mu \,\}$ összességét síknyalábnak mondjuk. A T pontot ezen síknyaláb tartópontjának hívjuk.

3.2. Definíció. Legyen adva egy σ sík és egy arra eső T pont. A σ síkra és a T pontra egyaránt illeszkedő egyenesek $\mathcal{E}(\sigma, T) = \{\, g \in \mathcal{E} \mid g \subset \sigma,\ T \in g \,\}$ halmazát sugársornak nevezzük.

Mint ismeretes, két egyenest egymással párhuzamosnak mondunk, ha nincs közös pontjuk és van olyan sík, amely mindkét egyenest tartalmazza. A g, h egyeneseket egyező állásúaknak nevezzük, ha g és h párhuzamosak egymással vagy fennáll $g = h$. Az egyező állás kapcsolata az euklideszi tér egyenesei között már egy ekvivalenciarelációt ad.

Emiatt osztályokba lehet sorolni az euklideszi tér egyező állású egyeneseit. Az alábbi definíciónak megfelelően az így nyert osztályokat párhuzamos egyenesosztályoknak fogjuk nevezni.

3.3. Definíció. Legyen adva a térben egy g egyenes. A g–vel reprezentált párhuzamos egyenesosztályon az egyenesek
$\mathcal{E}(g) = \{\, h \in \mathcal{E} \mid g,\ h \text{ párhuzamosak} \,\} \cup \{\, g \,\}$ halmazát értjük.

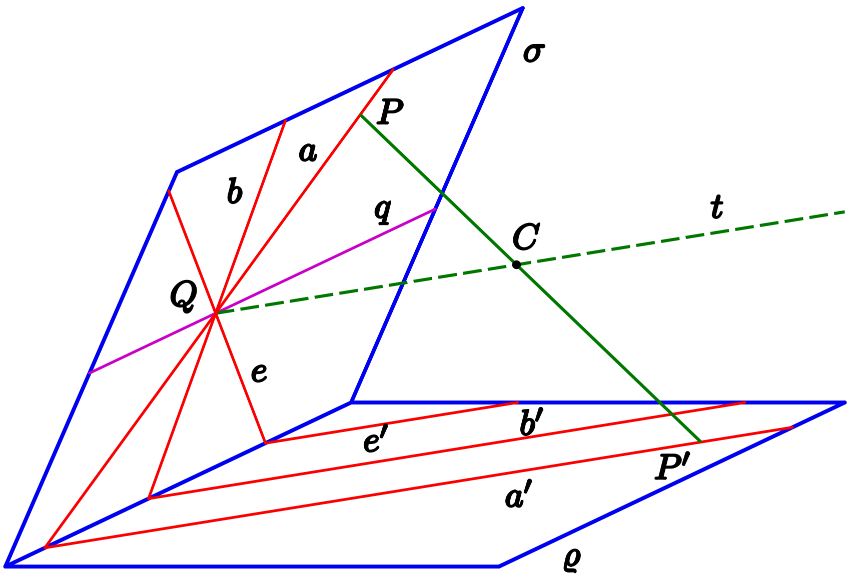
Megjegyzés. Világos, hogy a tér bármely egyenese pontosan egy párhuzamos egyenesosztályhoz tartozik.

A centrális vetítés problémája

Nem nehéz észrevenni, hogy a centrális vetítés, a parallel vetítéstől eltérően, két sík között nem nyújt bijektív megfeleltetést.

Az euklideszi térben tekintsük az egymást metsző σ és ϱ síkokat, továbbá egy C pontot, amely nincs rajta sem a σ, sem pedig a ϱ síkon. A σ síkot képezzük rá a ϱ síkra oly módon, hogy a σ egy P pontjához a $\langle C, P \rangle$ egyenes és a ϱ metszéspontját rendeljük. A $P' = \langle C, P \rangle \cap \varrho$ pontot nevezzük a P centrális vetületének. A fenti hozzárendelést a σ és a ϱ síkok közötti azon centrális vetítésnek mondjuk, amelynél a C pont a vetítési centruma. (Lásd a 19. ábrát.)

Tekintsük a C–n átmenő, a ϱ–val párhuzamos τ síkot és annak a σ–val vett q metszésvonalát. Válasszunk a q egyenesen egy tetszőleges Q pontot. Evidens, hogy a $t = \langle C, Q \rangle$ egyenes párhuzamos a ϱ síkkal, tehát a Q–hoz nem tudunk képpontot rendelni. Ebből már adódik, hogy a centrális vetítés nem ad bijektív megfeleltetést a σ és ϱ síkok között.



19. ábra. *A σ sík centrális vetítése a ϱ síkra a C pontból.*

Vegyünk a σ síkban egy olyan a $(a \neq q)$ egyenest, amely áthalad Q–n. Az a egyenes és a C pont által meghatározott $\langle a, C \rangle$ sík metssze el ϱ–t az a' egyenesben. Nyilvánvaló, hogy az a pontjainak a ϱ síkon vett centrális vetületei az a' egyenesre esnek. Emiatt az a' egyenes adja az a centrális vetületét. Amennyiben az a–ra illeszkedő P ponttal közelítünk a Q–hoz, akkor az a' egyenesen a P' képpont egyre távolabbra kerül a $\sigma \cap \varrho$ metszésvonaltól.

Célszerű még megjegyezni, hogy mivel az $\langle a, C \rangle$ sík tartalmazza a ϱ–val párhuzamos $t = \langle C, Q \rangle$ egyenest, az a' és t párhuzamosak egymással. Ez a párhuzamosság fennáll az összes Q–n áthaladó σ–beli egyenes centrális vetületére (a q egyenes kivételével). Ily módon azt mondhatjuk, hogy a centrális vetítés az $\mathcal{E}(\sigma, Q)$ sugársor egyeneseit a ϱ képsík egymással párhuzamos egyeneseibe képezi.

A centrális vetítésnél felvetődő probléma az alábbi ötletet adja: *Az euklideszi teret bővítsük ki további pontokkal oly módon, hogy minden egyeneshez hozzárendelünk még egy úgynevezett ideális pontot (vagy más szóval egy végtelen távoli pontot). Az egymással párhuzamos egyenesekhez ugyanazt az ideális pontot csatoljuk. Ekkor a fenti vetítésnél a* $t = \langle C, Q \rangle$ *egyenessel párhuzamos egyenesek közös végtelen távoli pontja lesz a* Q *pont* Q' *centrális vetülete a* ϱ *síkon. Ily módon el tudjuk érni, hogy a centrális vetítés a kibővített síkok között már egy bijektív, egyenestartó megfeleltetést adjon.*

A projektív tér származtatása az euklideszi térből

A projektív teret az euklideszi tér kibővítéseként értelmezzük az alábbiak szerint.

Az euklideszi tér összes párhuzamos egyenesosztályához rendeljünk hozzá egy–egy ideális pontot (vagy más szóval végtelen távoli pontot). A g egyenessel reprezentált $\mathcal{E}(g)$ párhuzamos egyenesosztályhoz rendelt ideális pontot jelölje I_g. Amennyiben a h egyenes párhuzamos g–vel, azaz fennáll $\mathcal{E}(h) = \mathcal{E}(g)$, akkor $I_h = I_g$ teljesül.

Különböző párhuzamos egyenesosztályokhoz különböző ideális pontokat rendelünk. Eszerint ha fennáll $\mathcal{E}(g) \neq \mathcal{E}(f)$, akkor $I_g \neq I_f$.

Az így definiált ideális pontok halmaza legyen ι. Az euklideszi térből származtatott projektív tér pontjainak halmazán az $\overline{X} = X \cup \iota$ halmazt értjük.

Tetszőleges $\mathcal{E}(g)$ párhuzamos egyenesosztály minden egyenesét bővítsük ki az egyenesosztályhoz rendelt I_g ideális ponttal. A bővítéssel nyert egyeneseket projektív egyeneseknek mondjuk. A g $(g \in \mathcal{E})$ által meghatározott projektív egyenest a megkülönböztetés céljából $\overline{g}$–vel fogjuk jelölni. *Ezen bővítés műveleti kifejezése:* $\overline{g} = g \cup \{I_g\}$.

Az euklideszi tér egy tetszőleges σ síkját a σ–beli egyenesekhez rendelt ideális pontokkal bővítjük. Ezen pontok $i_\sigma = \{\ I_g \mid g \subset \sigma\ \}$ halmazát a projektív tér egyik ideális egyenesének tekintjük. A σ kibővítésével nyert síkot projektív síknak nevezzük és $\overline{\sigma}$–val jelöljük. *A sík bővítésének műveleti kifejezése:* $\overline{\sigma} = \sigma \cup i_\sigma$.

Nyilvánvaló, hogy amennyiben a σ és μ síkok egymással párhuzamosak, akkor fennáll $i_\sigma = i_\mu$. Ily módon az euklideszi tér összes párhuzamos síkosztályának megfelel egy–egy ideális egyenes.

A bővítés során vett ideális pontok ι halmazát a projektív tér egyik síkjának tekintjük. Ezt a továbbiakban a tér ideális síkjának mondjuk. Evidens, hogy ι a projektív tér összes ideális egyenesét tartalmazza.

A megkülönböztetés érdekében az X–beli (azaz a nem ideális) pontokat közönséges pontoknak hívjuk, továbbá a projektív tér nem ideális egyeneseit (illetve a ι–tól különböző síkjait) közönséges egyeneseknek (illetve közönséges síkoknak) nevezzük.

A tartalmazás alapján a projektív tér pontjai, egyenesei és síkjai között is értelmezni tudjuk az illeszkedési relációt. Például, egy projektív egyenesről akkor mondjuk, hogy illeszkedik egy adott projektív síkhoz, ha a sík tartalmazza az egyenest. Egy pont akkor illeszkedik egy egyeneshez vagy egy síkhoz, ha annak az egyik eleme.

A bevezetett fogalmak alapján nem nehéz igazolni az alábbi tételt.

3.4. Tétel. *A projektív térben az illeszkedésre vonatkozóan igazak az alábbi kijelentések.*

(1) Két ponthoz egy és csak egy egyenes illeszkedik.

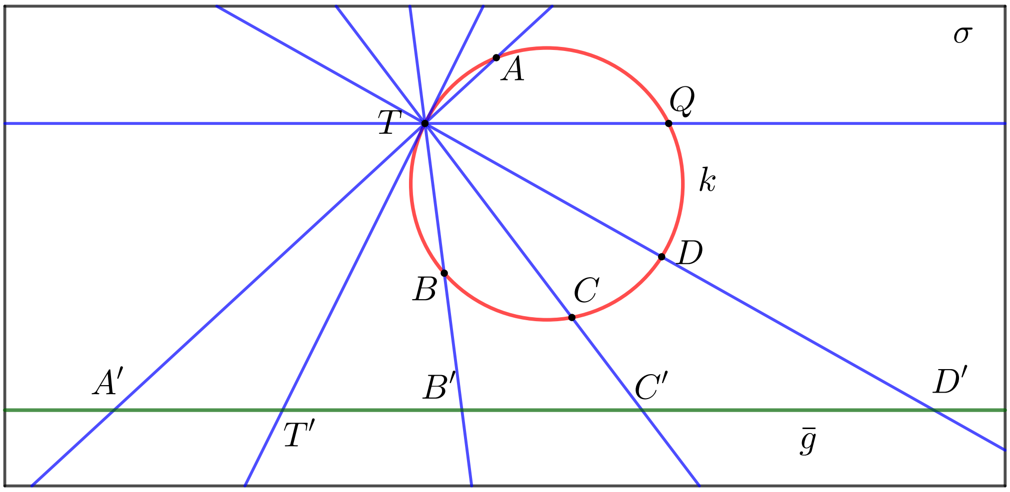
(2) Két síkhoz egy és csak egy egyenes illeszkedik.

(3) Ha adott egy egyenes és egy hozzá nem illeszkedő sík, akkor az egyenes és a sík metszete egyetlen pont.
(4) Ha két egyenes egyazon síkhoz illeszkedik, akkor a két egyenesnek van egy közös pontja.

Megjegyzés. Az 3.4. Tétel (3) kijelentéséből adódóan két projektív sík között a centrális vetítés már egy bijekív megfeleltetést létesít, amely egyben egyenestartó is.

Megjegyzés. A síkbeli centrális vetítés módszerével egy bijektív megfeleltetést lehet kapni egy k kör pontjai és egy $\overline{g}$ projektív egyenes pontjai között. A kör egyik T pontját kell a vetítés centrumának választani.

Ez a tény arra mutat rá, hogy a projektív egyenes egy záródó, körszerű alakzat.



20. ábra. *Bijektív megfeleltetés egy k kör és egy $\overline{g}$ egyenes pontjai között* ($Q' = I_g$).

Megjegyzés. A legtöbb szakkönyvben a projektív tér egyeneseit (akárcsak az euklideszi tér egyeneseit) latin kisbetűkkel jelölik, a felülvonás jelet nem használják.

Bijektív megfeleltetés egy projektív sík pontjai és egy sugárnyaláb egyenesei között

A továbbiakban feltesszük, hogy a térben adva van egy $\overline{\sigma}$ projektív sík, amelyet a σ euklideszi sík kibővítésével nyertünk ($\overline{\sigma} = \sigma \cup i_\sigma$). A projektív sík koordinátázása érdekében most rámutatunk arra, hogy egy természetes kapcsolatot lehet létesíteni a $\overline{\sigma}$ projektív sík és az euklideszi tér egy nyalábja között.

Legyen T egy olyan közönséges pont, amely nincs rajta a $\overline{\sigma}$ projektív síkon. Az euklideszi térben vett $\mathcal{E}(T)$ sugárnyaláb minden egyeneséhez hozzá tudunk rendelni egy $\overline{\sigma}$–beli pontot az alábbiak szerint:

Ha g az $\mathcal{E}(T)$ sugárnyaláb egy olyan egyenese, amely nem párhuzamos a σ–val, akkor g–hez a $P = g \cap \sigma$ pontot rendeljük. (Lásd a 21. ábrát.)

Amennyiben h az $\mathcal{E}(T)$ sugárnyaláb egy olyan egyenese, amely párhuzamos a σ síkkal, akkor h–hoz az $\mathcal{E}(h)$ párhuzamos egyenesosztálynak megfelelő I_h ideális pontot rendeljük, amely rajta van a $\overline{\sigma}$ kibővített síkon. Evidens, hogy az I_h pont éppen a $\overline{h}$ projektív egyenes és a $\overline{\sigma}$ projektív sík metszéspontja.

Könnyű belátni, hogy a fenti hozzárendelés egy bijekciót létesít az $\mathcal{E}(T)$ sugárnyaláb egyenesei és a $\overline{\sigma}$ sík pontjai között.

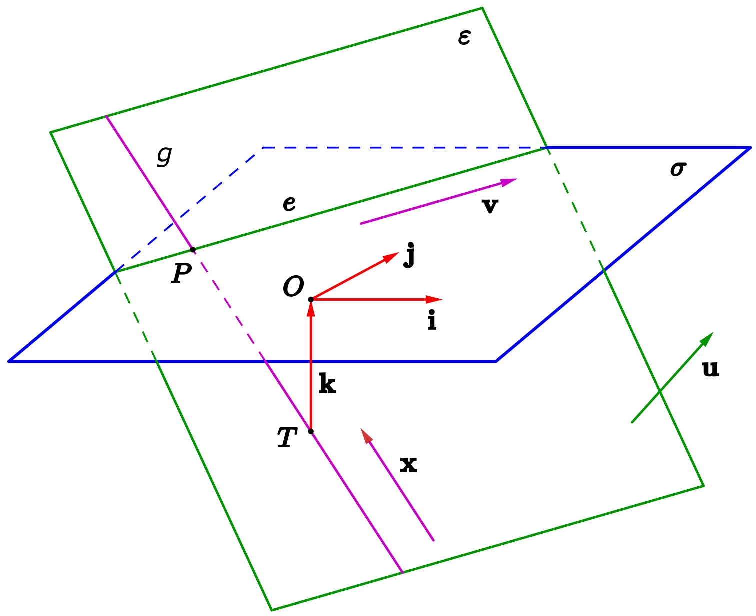
Az $\mathcal{S}(T)$ síknyaláb síkjai és a $\overline{\sigma}$ projektív sík egyenesei között is adódik egy bijektív megfeleltetés az alábbi módon:

Amennyiben a T–hez illeszkedő ε sík nem párhuzamos σ–val, akkor tekintsük az $e = \varepsilon \cap \sigma$ egyenest, és ε–hoz rendeljük hozzá az $\overline{e}$ projektív egyenest. (Lásd a 21. ábrát.)

A T–t tartalmazó és a σ–val párhuzamos μ síknak pedig feleltessük meg az i_σ ideális egyenest.

A projektív sík koordinátázása

A σ euklideszi síkon rögzítsünk egy $(O,\, \mathbf{i},\, \mathbf{j})$ derékszögű koordináta–rendszert. Mint ismeretes, egy σ–beli P pont esetén a helyvektor $\overrightarrow{OP} = x_P\,\mathbf{i} + y_P\,\mathbf{j}$ kifejezésében szereplő együtthatókat mondjuk a P síkbeli koordinátáinak. Ezáltal a σ sík egy $\xi : \sigma \to \mathbb{R}^2$ koordinátázásához jutunk, ahol a ξ bijektív leképezést a $\xi(P) = (x_P,\, y_P)$ összefüggéssel értelmezzük.



21. ábra. *A $\overline{\sigma}$ síkbeli pontok és egyenesek meghatározó vektorai:* $P \mapsto \mathbf{x}$, $I_e \mapsto \mathbf{v}$, $\overline{e} \mapsto \mathbf{u}$.

A $\overline{\sigma} = \sigma \cup i_\sigma$ projektív síkot úgy koordinátázzuk, hogy ahhoz a fenti Descartes–féle koordináta–rendszert vesszük alapul. Legyen $\mathbf{k}$ a σ–beli $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ortonormált vektorok vektoriális szorzata, azaz legyen $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$.

Az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektorok a szabad vektorok $\mathcal{V}$ terének egy ortonormált bázisát képezik, amelyet a továbbiakban rögzítettnek tekintünk. Vegyük az euklideszi térben azt a T pontot, amellyel fennáll a $\overrightarrow{TO} = \mathbf{k}$ egyenlőség.

A fentiek szerint a $\overline{\sigma}$ sík pontjai és az $\mathcal{E}(T)$ sugárnyaláb egyenesei között természetes módon adódik egy bijektív megfeleltetés. Ennek alapján értelmezzük a pontok meghatározó vektorait és homogén koordinátáit.

3.5. Definíció. Egy $P \in \overline{\sigma}$ közönséges pont meghatározó vektorain a $\langle T, P \rangle$ egyenes irányvektorait értjük. Ezen meghatározó vektoroknak az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisra vonatkozó koordináta–hármasait mondjuk a P pont homogén koordinátáinak.

Vegyük a $\overrightarrow{TP} = x_P\,\mathbf{i} + y_P\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektort. A $\langle T, P \rangle$ egyenes irányvektorai éppen a $\lambda \cdot \overrightarrow{TP}$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0)$ vektorok. Ebből adódóan a P pont homogén koordinátái megegyeznek a $[\lambda\, x_P,\ \lambda\, y_P,\ \lambda]$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0)$ számhármasokkal.

Fontos tény, hogy a meghatározó vektorok és a homogén koordináták csak számszorzótól eltekintve egyértelműek. Ezt abban a formában is jelezzük, hogy a homogén koordinátákat szögletes zárójelbe tesszük.

Megjegyzés. Tegyük fel, hogy egy $P \in \overline{\sigma}$ közönséges pontnak az $[x_1,\ x_2,\ x_3]$ számhármas az egyik homogén koordináta–hármasa. A fentiek alapján evidens, hogy $x_3 \neq 0$ teljesül. Azt is könnyű belátni, hogy ekkor a P derékszögű koordinátái *(a σ euklideszi sík* $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j})$ *Descartes–féle koordináta–rendszerében)* megegyeznek az
$x_P = \dfrac{x_1}{x_3}$, $y_P = \dfrac{x_2}{x_3}$ hányadosokkal.

3.6. Definíció. A $\overline{\sigma}$–beli $\overline{e}$ egyeneshez tartozó I_e ideális pont meghatározó vektorain az e egyenes irányvektorait értjük. A meghatározó vektorok koordináta–hármasait az I_e ideális pont homogén koordinátáinak nevezzük.

Az e egyenessel párhuzamos $\mathbf{v}$ vektort fejezzük ki az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisvektorok lineáris kombinációjaként: $\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$. A fenti definíció szerint az I_e pont homogén koordinátái a $[\lambda\, v_1,\ \lambda\, v_2,\ 0]$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0)$ számhármasok lesznek. A projektív sík ideális pontjainak a harmadik koordinátája tehát mindig 0.

A projektív síkon az egyenesek homogén koordinátáinak értelmezése

Emlékezzünk rá, hogy a $\overline{\sigma}$ projektív sík egyenesei és a $\mathcal{S}(T)$ síknyaláb elemei között is van egy bijektív megfeleltetés.

3.7. Definíció. Egy $\overline{\sigma}$–beli $\overline{e}$ $(\overline{e} \neq i_\sigma)$ közönséges egyenesnél az $\langle e, T \rangle = \varepsilon$ euklideszi sík normálvektorait mondjuk az $\overline{e}$ meghatározó vektorainak. Ezen vektoroknak az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisra vonatkozó koordináta–hármasait az $\overline{e}$ egyenes homogén koordinátáinak nevezzük. (A 21. ábrán az $\overline{e}$ egyenes egyik meghatározó vektoraként $\mathbf{u}$ szerepel.)

Tegyük fel, hogy adva van az e egyenes egy $P\,(x_P,\ y_P)$ pontja és egy σ–beli $\mathbf{m} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$ vektor, amely merőleges az e–re. A σ egy tetszőleges $Q\,(x,\ y)$ pontja akkor van rajta az e egyenesen, ha az $\mathbf{m}$ és $\overrightarrow{PQ}$ vektorok skaláris szorzatára $\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ teljesül, vagyis ha fennáll $a(x - x_P) + b(y - y_P) = 0$. Eszerint az e egyenes egyenlete a síkbeli $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j})$ koordináta–rendszerben $a\,x + b\,y + c = 0$, ahol $c = -a\,x_P - b\,y_P$. Vegyük még észre, hogy a $\mathbf{v} = b\,\mathbf{i} - a\,\mathbf{j}$ vektor az egyik irányvektora az e egyenesnek.

Evidens, hogy az $\langle\, e, T\,\rangle$ síkkal párhuzamos $\overrightarrow{TP}$ és $\mathbf{v}$ vektorok vektoriális szorzata merőleges az $\langle\, e, T\,\rangle$ síkra. Egyszerű számolással ezen $\mathbf{n} = \overrightarrow{TP} \times \mathbf{v}$ normálvektorra az $\mathbf{n} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ kifejezést nyerjük. Ily módon a 3.7. Definíciónak megfelelően a $[\lambda\, a,\ \lambda\, b,\ \lambda\, c]$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0)$ számhármasok képezik az $\overline{e}$ egyenes homogén koordinátáit.

Megjegyzés. Amennyiben az e euklideszi egyenes egyenletébe a pontok homogén koordinátáinak megfelelő hányadosait írjuk be, akkor az $a\,\dfrac{x_1}{x_3} + b\,\dfrac{x_2}{x_3} + c = 0$ $(x_3 \neq 0)$ összefüggéshez jutunk. Az ebből nyert

$$a\, x_1 + b\, x_2 + c\, x_3 = 0$$

egyenletet csak az $\overline{e}$ egyenes pontjainak a homogén koordinátái oldják meg.

3.8. Definíció. Az i_σ ideális egyenesnek korábban a T–n áthaladó és a σ–val párhuzamos μ síkot feleltettük meg. Az i_σ–hoz rendeljük hozzá a μ sík normálvektorait, vagyis a $\lambda\,\mathbf{k}$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0)$ vektorokat. Ezek $[0,\ 0,\ \lambda]$ koordináta–hármasait mondjuk az i_σ egyenes homogén koordinátáinak.

Megjegyzés. Fontosnak tartjuk ismételten hangsúlyozni, hogy a $\overline{\sigma}$ projektív sík pontjaihoz és egyeneseihez rendelt meghatározó vektorok, illetőleg a homogén koordináta–hármasok csak számszorzótól eltekintve egyértelműek. Ha két vektor egymásnak számszorosa (és $\mathbf{0}$–tól különbözőek), akkor azoknak ugyanaz a pont, illetve ugyanaz az egyenes, felel meg a $\overline{\sigma}$ síkon.

Vegyük viszont észre, hogy a meghatározó vektorok egy bijektív megfeleltetést adnak a $\overline{\sigma}$ sík pontjai és a $\mathcal{V}$ vektortér 1–dimenziós alterei között.

A homogén koordinátákra vonatkozó alapvető állítások

A $\overline{\sigma}$ projektív síkon lévő P pont egyik meghatározó vektora legyen $\mathbf{x} = x_1\,\mathbf{i} + x_2\,\mathbf{j} + x_3\,\mathbf{k}$, továbbá egy $\overline{e}$ $(\overline{e} \subset \overline{\sigma})$ egyenes egyik meghatározó vektora legyen $\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j} + u_3\,\mathbf{k}$. Nyilvánvaló, hogy a P pont rajta van az $\overline{e}$ egyenesen akkor és csak akkor, ha az $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$ vektorok merőlegesek egymásra, vagyis ha a skaláris szorzatukra $\mathbf{u}\cdot\mathbf{x} = 0$ teljesül. Ennek következtében igaz az alábbi kijelentés.

3.9. Állítás. *A $\overline{\sigma}$ projektív sík $\overline{e}$ egyenese és P pontja illeszkednek egymáshoz akkor és csak akkor, ha a homogén koordinátáikra fennáll az $u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + u_3\, x_3 = 0$ összefüggés.*

Megjegyzés. A fenti állítás szerint a homogén koordinátákra vonatkozóan az $u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + u_3\, x_3 = 0$ egyenlet írja le az $\overline{g}$ egyenest.

Könnyen igazolni lehet az alábbi állításokat is.

3.10. Állítás. *A $\overline{\sigma}$ projektív sík P és Q $(P \neq Q)$ pontjainak egy–egy meghatározó vektora legyen $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$. Igaz a következő két kijelentés.*

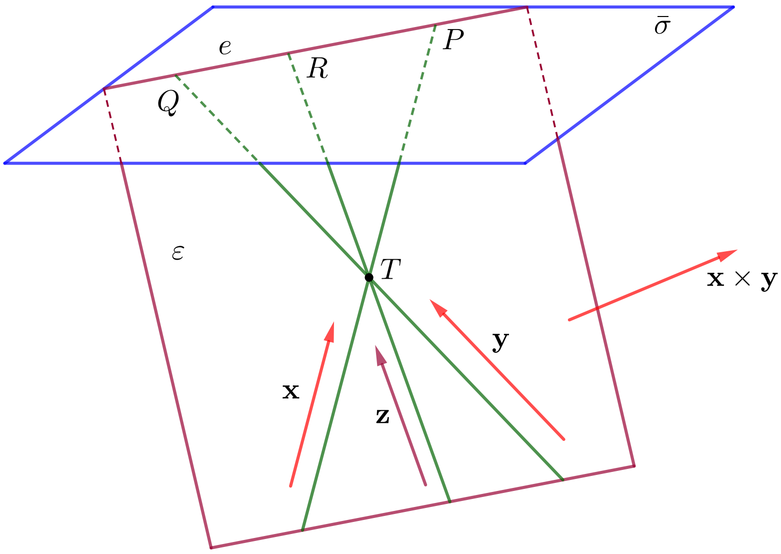
(1) A $\langle P, Q\rangle$ összekötő egyenes pontjainak meghatározó vektorai előállnak a $\lambda\,\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$ $(\lambda,\ \mu\in\mathbb{R},\ \lambda^2 + \mu^2 > 0)$ alakban.

(2) Az $\mathbf{u} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ vektor által meghatározott egyenes megegyezik a $\langle P, Q\rangle$ egyenessel.

Bizonyítás.

Vegyük az $\overline{e} = \langle P, Q \rangle$ egyenes egy további R pontját, amelynek egyik meghatározó vektora legyen $\mathbf{z}$. Legyen ε az a sík, amely tartalmazza az e egyenest és a T tartópontot. Az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ vektorok benne vannak a ε síkban, azaz lineárisan összefüggőek. Mivel $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ nem párhuzamosak, a $\mathbf{z}$ vektor előáll ezeknek egy lineáris kombinációjaként a $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$ alakban valamely λ, μ együtthatókkal. (Lásd a 22. ábrát.)

Világos, hogy a $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ vektoriális szorzat merőleges az $\overline{e}$ egyeneshez rendelt ε síkra. Emiatt az $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ vektor az $\overline{e}$ projektív egyenes egyik meghatározó vektora. $\square$



22. ábra. *Az e egyenes P, Q, R pontjainak meghatározó vektorai:* $\mathbf{z} = \lambda\,\mathbf{x} + \mu\,\mathbf{y}$.

Az alábbi kijelentés is könnyen igazolható.

3.11. Állítás. *A $\overline{\sigma}$ projektív sík $\overline{e}$, $\overline{f}$ $(\overline{e} \neq \overline{f})$ egyeneseinek egy–egy meghatározó vektora legyen $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$. Ekkor igazak az alábbi kijelentések.*

(1) Az $\overline{e} \cap \overline{f}$ metszéspontra illeszkedő $\overline{\sigma}$–beli egyenesek meghatározó vektorai előállnak a $\lambda\,\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$ $(\lambda,\ \mu \in \mathbb{R},\ \lambda^2 + \mu^2 > 0)$ alakban.

(2) Az $\mathbf{x} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektorral vektor által meghatározott pont megegyezik az $\overline{e} \cap \overline{f}$ metszésponttal.

Bizonyítás.

(2) Tekintsük az $\overline{e}$, $\overline{f}$ egyenseknek megfelelő $\varepsilon = \langle e, T \rangle$ és $\varphi = \langle f, T \rangle$ síkokat az $\mathcal{S}(T)$ síknyalábból. Az $\mathbf{u}$ meghatározó vektor merőleges ε–ra, a $\mathbf{v}$ vektor pedig merőleges a φ síkra. Vegyük észre, hogy az $\overline{e} \cap \overline{f}$ metszéspontnak az $\mathcal{E}(T)$ sugárnyalábból a két sík $\varepsilon \cap \varphi$ metszésvonala felel meg. Ez az egyenes merőleges az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorokra, és emiatt párhuzamos az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektorral. Eszerint az $\overline{e} \cap \overline{f}$ metszéspont egyik meghatározó vektora az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ szorzat. $\square$

Megjegyzés. A 3.10. és 3.11. Állítások szerint a vektoriális szorzás módszerét alkalmazva két pont homogén koordinátáiból megkapjuk az őket összekötő egyenes homogén koordinátáit, illetve két egyenes homogén koordinátáiból kiszámolhatjuk a metszéspont homogén koordinátáit.

Emlékezzünk rá, hogy az euklideszi tér szabad vektorainak terét $\mathcal{V}$ jelöli. A 3.10. Állításból már következik az alábbi kijelentés.

3.12. Állítás. *A $\overline{\sigma}$ projektív sík n $(n \geq 3)$ számú pontja egyazon egyeneshez illeszkedik akkor és csak akkor, ha a $\mathcal{V}$ vektortérnek van olyan 2–dimenziós altere, amely tartalmazza a pontok meghatározó vektorait.*

A 3.11. Állítás alapján a következő megállapítást tehetjük.

3.13. Állítás. *A $\overline{\sigma}$ projektív sík n $(n \geq 3)$ számú egyenese egyazon ponthoz illeszkedik akkor és csak akkor, a $\mathcal{V}$ vektortérnek van olyan 2–dimenziós altere, amely tartalmazza az egyenesek meghatározó vektorait.*

Centrálisan és tengelyesen perspektív háromszögek. Desargues tétele

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a projektív egyeneseket felülhúzás nélkül jelöljük. Az euklideszi tér σ síkjának kibővítésével nyert $\overline{\sigma}$ projektív síkon legyenek adva az A, B, C nem kollineáris pontok. Tekintsük az A, B, C csúcspontokkal meghatározott $ABC\triangle$ háromszöget. A szokásoknak megfelelően ezen háromszög oldalegyeneseire az $a = \langle B, C\rangle$, $b = \langle C, A\rangle$ és $c = \langle A, B\rangle$ jelölést alkalmazzuk. Fontosnak tartjuk kihangsúlyozni, hogy jelen esetben a, b és c projektív egyenesek.

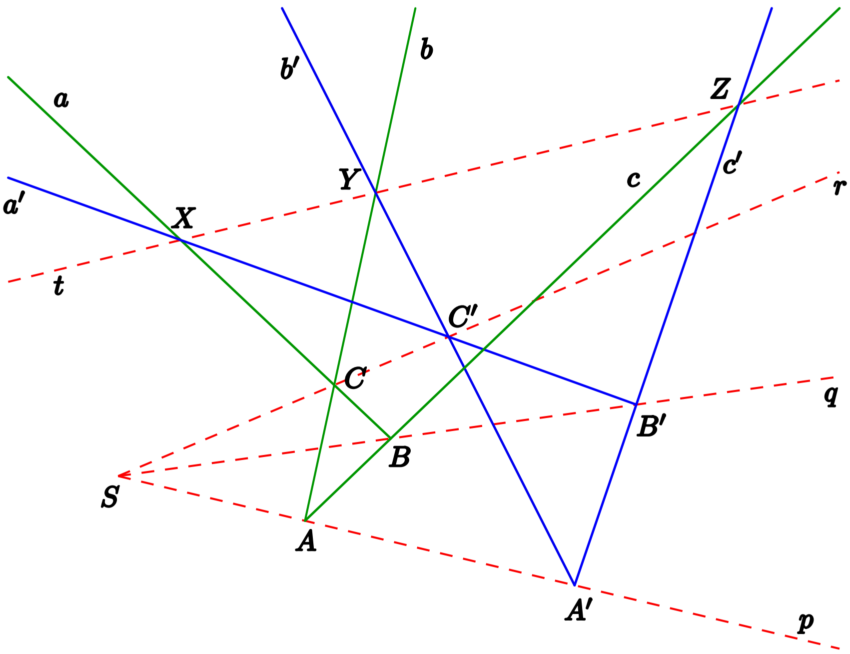
Értelmezni lehet két háromszög centrális és tengelyes perspektivitásának a fogalmát.

3.14. Definíció. A $\overline{\sigma}$ projektív síkban legyen adott két háromszög $ABC\triangle$ és $A'B'C'\triangle$. Ezekről akkor mondjuk, hogy centrálisan perspektívek egymással, ha van a $\overline{\sigma}$ síkon olyan S pont, hogy az S, A, A' pontok kollineárisak, az S, B, B' pontok kollineárisak, továbbá az S, C, C' pontok is kollineárisak.

3.15. Definíció. A két háromszögről akkor mondjuk, hogy tengelyesen perspektívek egymással, ha van a $\overline{\sigma}$ síkon olyan t egyenes, hogy a t, a, a' egyeneseknek van közös pontja, a t, b, b' egyeneseknek van közös pontja, továbbá a t, c, c' egyeneseknek is van közös pontja.

Megjegyzés. Centrális perspektivitás esetén az S pontot mondjuk a perspektivitás centrumának. Ha pedig a két háromszög tengelyesen perspektív, akkor a t egyenest a perspektivitás tengelyének nevezzük.

Megjegyzés. Tekintsük most az általános esetet, amikor a $\overline{\sigma}$ síkon olyan $ABC\triangle$ és $A'B'C'\triangle$ háromszögek vannak adva, ahol a megfelelő csúcspontok és a megfelelő oldalegyenesek páronként különbözőek. Ez esetben a két háromszög centrálisan perspektív, ha a $p = \langle A, A'\rangle$, $q = \langle B, B'\rangle$, $r = \langle C, C'\rangle$ egyenesek egyazon S ponthoz illeszkednek. A két háromszög akkor lesz tengelyesen perspektív, ha az $X = a \cap a'$, $Y = b \cap b'$, $Z = c \cap c'$ metszéspontok egyazon t egyenesre illeszkednek. (Lásd a 23. ábrát.)



23. ábra. *Az ABC és $A'B'C'$ perspektív háromszögek a projektív síkon.*

Az alábbi fontos eredményt *Desargues tételeként* tartják számon. A tétel bizonyítása a csúcspontok és az oldalegyenesek meghatározó vektorainak alkalmazásán alapul.

3.16. Tétel. *A projektív síkon vett két háromszög centrálisan perspektív egymással akkor és csak akkor, ha tengelyesen perspektívek.*

Bizonyítás.

A háromszögeket tartalmazó projektív síkot jelölje $\overline{\sigma}$. A korábbi eljárást követve koordinátázzuk az $\overline{\sigma}$ projektív síkot. (Lásd a 21. ábrát.) Jelöljük ki a térben a T pontot, amely nincs rajta a síkon. Mint ismeretes, bijektív megfeleltetést lehet létesíteni a T tartóponthoz rendelt $\mathcal{E}(T)$ sugárnyaláb egyenesei és a $\overline{\sigma}$ sík pontjai között. Ugyancsak adódik egy bijektív megfeleltetés az $\mathcal{S}(T)$ síknyaláb síkjai és a $\overline{\sigma}$ sík egyenesei között. Ezáltal a $\overline{\sigma}$ projektív sík pontjaihoz és egyeneseihez meghatározó vektorokat rendelünk, amelyek csak számszorzótól eltekintve egyértelműek.

Tekintsük az általános esetet, amikor az adott $ABC\triangle$ és $A'B'C'\triangle$ háromszögek csúcsai és oldalegyenesei különbözőek. Vegyük a megfelelő csúcsokat összekötő $p = \langle A, A' \rangle$, $q = \langle B, B' \rangle$, $r = \langle C, C' \rangle$ egyeneseket és a megfelelő oldalegyenesek metszéspontjait.

Tegyük fel, hogy az $ABC\triangle$ és $A'B'C'\triangle$ háromszögek centrálisan perspektívek.
Ez azt jelenti, hogy a csúcsokat összekötő p, q, r egyenesek egyazon S pontra illeszkednek. Rögzítsük egy-egy meghatározó vektorát a háromszögek csúcsainak, továbbá az S pontnak. Ezen meghatározó vektorok legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$, továbbá $\mathbf{s}$.

Az A, A', S pontok rajta vannak a p egyenesen, azaz kollineárisak. Emiatt az $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{s}$ vektorok lineárisan összefüggőek, hiszen párhuzamosak a T pontot és a p egyenest tartalmazó síkkal. Mivel az $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$ vektorok nem párhuzamosak egymással az $\mathbf{s}$ előáll ezeknek egy lineáris kombinációjaként. Tehát egyértelműen léteznek olyan α, α' valós számok, melyekkel fennáll az

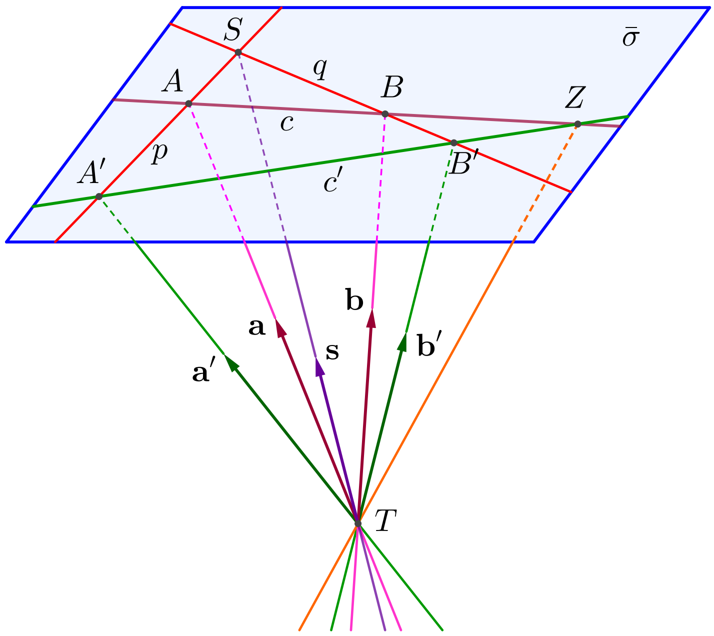
$$\mathbf{s} = \alpha\,\mathbf{a} + \alpha'\,\mathbf{a}' \tag{3.1}$$

egyenlőség. A B, B', S ponthármas is kollineáris, mivel a pontok illeszkednek a q egyenesre. Ennek következtében a $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{s}$ meghatározó vektorok egysíkúak (vagy más szóval párhuzamosak a $\langle T, q\rangle$ síkkal). Emiatt a három vektor lineárisan összefüggő. Világos, hogy az $\mathbf{s}$ vektor kifejezhető a másik két vektor lineáris kombinációjaként az

$$\mathbf{s} = \beta\,\mathbf{b} + \beta'\,\mathbf{b}' \tag{3.2}$$

alakban valamely β, β' valós együtthatókkal. (Lásd a 24. ábrát.)
A C, C', S pontok rajta vannak az r egyenesen. A fentiek alapján már könnyű belátni, hogy az $\mathbf{s}$ vektor előáll a $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}'$ vektorok lineáris kombinációjaként is. Jelölje γ és γ' azokat az egyértelműen meghatározott valós számokat, melyekkel fennáll

$$\mathbf{s} = \gamma\,\mathbf{c} + \gamma'\,\mathbf{c}'\,. \tag{3.3}$$



24. ábra. *Szemléltető ábra a Desargues–tétel bizonyításához.*

Az $\mathbf{s}$ meghatározó vektorra nyert (3.1) és (3.2) kifejezések alapján igaz $\alpha\,\mathbf{a} + \alpha'\,\mathbf{a}' = \beta\,\mathbf{b} + \beta'\,\mathbf{b}'$. Emiatt fennáll az $\alpha\,\mathbf{a} - \beta\,\mathbf{b} = \beta'\,\mathbf{b}' - \alpha'\,\mathbf{a}'$ egyenlőség. Vegyük a

$$\mathbf{z} = \alpha\,\mathbf{a} - \beta\,\mathbf{b} = \beta'\,\mathbf{b}' - \alpha'\,\mathbf{a}'$$

vektort és az általa meghatározott Z pontot az $\overline{\sigma}$ projektív síkon. Mivel $\mathbf{z}$ előáll az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként, a Z pont rajta van a $c = \langle A, B\rangle$ oldalegyenesen. A $\mathbf{z}$ vektor kifejezhető az $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ vektorokból is, emiatt a Z pont a $c' = \langle A', B'\rangle$ oldalegyenesen is rajta van. Ebből már következik, hogy Z a c, c' oldalegyenesek metszéspontja.

Tekintsük a (3.2) és (3.3) összefüggésekből adódó $\beta\,\mathbf{b} + \beta'\,\mathbf{b}' = \gamma\,\mathbf{c} + \gamma'\,\mathbf{c}'$ egyenlőséget, amiből $\beta\,\mathbf{b} - \gamma\,\mathbf{c} = \gamma'\,\mathbf{c}' - \beta'\,\mathbf{b}'$ következik. Az

$$\mathbf{x} = \beta\,\mathbf{b} - \gamma\,\mathbf{c} = \gamma'\,\mathbf{c}' - \beta'\,\mathbf{b}'$$

vektorral meghatározott X pont rajta van az $a = \langle B, C\rangle$ és $a' = \langle B', C'\rangle$ egyeneseken, tehát megegyezik azok metszéspontjával.

Végül alkalmazzuk a (3.3) és (3.1) szerinti $\gamma\,\mathbf{c} + \gamma'\,\mathbf{c}' = \alpha\,\mathbf{a} + \alpha'\,\mathbf{a}'$ összefüggést, amelyből $\gamma\,\mathbf{c} - \alpha\,\mathbf{a} = \alpha'\,\mathbf{a}' - \gamma'\,\mathbf{c}'$ adódik. Vegyük az

$$\mathbf{y} = \gamma\,\mathbf{c} - \alpha\,\mathbf{a} = \alpha'\,\mathbf{a}' - \gamma'\,\mathbf{c}'$$

vektort. Világos, hogy az $\mathbf{y}$ által meghatározott Y pont illeszkedik a $b = \langle C, A\rangle$ és $b' = \langle C', A'\rangle$ egyenesekre, vagyis fennáll $Y = b \cap b'$.

A fentiek során meghatároztuk a $Z = c \cap c'$, $X = a \cap a'$ és $Y = b \cap b'$ metszéspontok egy–egy meghatározó vektorát. Vegyük észre, hogy ezek a $\mathbf{z}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vektorok lineárisan összefüggőek, mivel teljesül rájuk a

$$\mathbf{z} + \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

egyenlőség. Ebből viszont az következik, hogy az X, Y, Z pontok kollineárisak, vagyis van olyan t egyenes, amely mindhárom ponthoz illeszkedik. Ez pedig azt jelenti, hogy az $ABC\triangle$ és $A'B'C'\triangle$ háromszögek tengelyesen perspektívek.

Analóg módon, a meghatározó vektorok felhasználásával igazolható, hogy amennyiben a projektív sík két háromszöge tengelyesen perspektív, akkor centrálisan is perspektívek. A bizonyítási eljárásban ez esetben az a, b, c és a', b', c' oldalegyenesek, továbbá a t tengely meghatározó vektorait kell alkalmaznunk. Ennek kifejtésére ezúttal nem térünk ki. $\square$

Megjegyzés. Be lehet bizonyítani, hogy a Desargues–tétel érvényben marad a projektív térben akkor is, ha a két háromszög nincs egyazon síkban.

A dualitás elve a projektív síkon

A projektív síkon a pontok és az egyenesek illeszkedésére vonatkozó állításokkal kapcsolatosan az alábbi észrevételt tehetjük:
Legyen adva egy (korábban már bizonyított) állítás, amely a pontok és az egyenesek illeszkedésére vonatkozik. Ha ebben felcseréljük a "pont" és az "egyenes", illetve a "metszés" és az "összekötés" szavak szerepét, akkor az így nyert kijelentés érvényben marad.

A projektív tér koordinátázása (kiegészítő tananyag)

Az euklideszi térben rögzítsünk egy $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ Descartes–féle koordináta–rendszert. Az euklideszi tér kibővítésével nyert $\overline{X} = X \cup \iota$ projektív tér koordinátázását erre alapozva végezzük az alábbiak szerint.

Egy közönséges P pont esetén vegyük az $\overrightarrow{OP} = x_P\,\mathbf{i} + y_P\,\mathbf{j} + z_P\,\mathbf{k}$ helyvektor kifejezésében szereplő x_P, y_P, z_P együtthatókat. A $[\lambda\, x_P, \lambda\, y_P, \lambda\, z_P, \lambda]$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0)$ számnégyeseket mondjuk a P pont térbeli homogén koordinátáinak.

Tekintsünk egy I_e ideális pontot, amelyet az $\mathcal{E}(e)$ párhuzamos egyenesosztályhoz rendeltünk. Az e egyenes egyik $\mathbf{v}$ irányvektorát fejezzük ki az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisvektorok lineáris kombinációjaként: $\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + v_3\,\mathbf{k}$. Az I_e pont térbeli homogén koordinátáin a $[\lambda\, v_1, \lambda\, v_2, \lambda\, v_3, 0]$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0)$ számnégyeseket értjük.

Nyilvánvaló, hogy egy adott $Q\,[x_1, x_2, x_3, x_4]$ pont ideális akkor és csak akkor, ha fennáll $x_4 = 0$. Amennyiben $x_4 \neq 0$, akkor a Q közönséges pont derékszögű koordinátái: $x_Q = \dfrac{x_1}{x_4}$, $y_Q = \dfrac{x_2}{x_4}$, $z_Q = \dfrac{x_3}{x_4}$.

A projektív tér síkjaihoz is lehet homogén koordinátákat rendelni. Az euklideszi térben vegyünk egy ω síkot, amelynek az egyenlete $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$, ahol az együtthatókra fennáll $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. A $[\lambda\, a, \lambda\, b, \lambda\, c, \lambda\, d]$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0)$ számnégyeseket az $\overline{\omega}$ projektív sík homogén koordinátáinak nevezzük. Azonnal adódik, hogy az $\overline{\omega}$ síkot a homogén koordinátákra nézve az $a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d\,x_4 = 0$ egyenlet írja le.

A tér ideális pontjait tartalmazó ι ideális sík homogén koordinátáin a $[0, 0, 0, \lambda]$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0)$ számnégyeseket értjük. A ι ideális sík az $x_4 = 0$ egyenlettel írható le.

A projektív tér tetszőleges egyenesének pozícióját egyértelműen meghatározhatjuk azáltal, ha megadunk két hozzá illeszkedő pontot (vagy síkot) a homogén koordinátanégyeseivel.

4) A kollineáris pontnégyesek kettősviszonya. A sík projektív transzformációi

Ebben a fejezetben értelmezni fogjuk a kollineáris pontnégyesek és a sugárnégyesek kettősviszonyát, továbbá bevezetjük a síkbeli projektív transzformáció (vagy más szóval a kollineáció) fogalmát. Kiderül majd, hogy a kettősviszonyt a síkok közötti centrális vetítések és a projektív transzformációk egyaránt megőrzik.

A kollineáris ponthármas osztóviszonya

Az osztóviszony fogalmát már korábban bevezettük, de fontossága miatt célszerűnek tartjuk felidézni a vele kapcsolatos ismereteket.

Az euklideszi tér egy g egyenesén legyenenek adva az egymástól különböző A, B, C pontok. Jelöljük ki a g egyenesen az egyik irányítást egy vele párhuzamos $\mathbf{w}$ egységvektor rögzítésével. Ily módon az egyenesre eső irányított szakaszokhoz előjeles hosszat tudunk rendelni. Az $\overrightarrow{AC}$ irányított szakasz előjeles hosszán az $AC = \overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{w}$ skaláris szorzatot értjük.

Az egy egyenesre eső A, B, C ponthármas osztóviszonyán az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CB}$ irányított szakaszok előjeles hosszainak hányadosát, vagyis az $(A\,B\,C) = \dfrac{AC}{CB}$ számot értjük.

Megjegyzés. A kollineáris A, B, C ponthármas osztóviszonya nem függ a tartalmazó egyenes irányításának megválasztásától. Ugyanis, ha az ellentétes irányítást vesszük, akkor $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CB}$ előjeles hossza egyaránt a (-1)-szeresére változik.

Megjegyzés. Egy g egyenesen rögzítsük az A, B pontokat és C legyen a g–nek egy további pontja. Ha a C pont rajta van az $\overline{AB}$ szakaszon, akkor az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CB}$ irányított szakaszok iránya megegyezik, tehát fennáll $(A\,B\,C) > 0$. Amennyiben C nincs rajta van az $\overline{AB}$ szakaszon, akkor az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CB}$ iránya ellentétes, amiből $(A\,B\,C) < 0$ adódik.

A kollineáris közönséges pontnégyes kettősviszonya

Először csak olyan kollineáris pontnégyes esetében értelmezzük a kettősviszonyt, ahol mind a négy pont közönséges (azaz egyik pont sem ideális). A kettősviszonyt az osztóviszony fogalmának felhasználásával definiáljuk.

4.1. Definíció. Legyenek adva az A, B, C, D egymástól különböző, közönséges pontok, amelyek egyazon egyenesre esnek. A pontnégyes kettősviszonyán az
$(A\,B\,C\,D) = \dfrac{(A\,B\,C)}{(A\,B\,D)}$ valós számot értjük.

Megjegyzés. Tekintsünk az euklideszi térben egy g egyenest és azon az A, B, C, D pontokat. Ha a g egyenest irányítjuk, az $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$ irányított szakaszokhoz előjeles hosszat tudunk rendelni. Ezek felhasználásával a pontnégyes kettősviszonyát az
$(A\,B\,C\,D) = \dfrac{AC}{CB} : \dfrac{AD}{DB}$ alakban lehet kifejezni.

Megjegyzés. Mivel a 4.1. Definícióban szereplő pontnégyes elemei különbözőek, teljesülnek az $(A\,B\,C\,D) \neq 1$, $(A\,B\,C\,D) \neq 0$ egyenlőtlenségek.
Vegyük észre, hogy az $\mathbb{R} \setminus \{1,\,0\}$ számhalmaz bármely eleme lehet a kettősviszony értéke.

Megjegyzés. Könnyen igazolható, hogy a kettősviszonyra tetszőleges A, B, C, D pontnégyes esetén igazak az alábbi összefüggések:
(1) $(A\,B\,C\,D)\cdot(A\,B\,D\,C) = 1$,
(2) $(A\,B\,C\,D) = (C\,D\,A\,B)$.

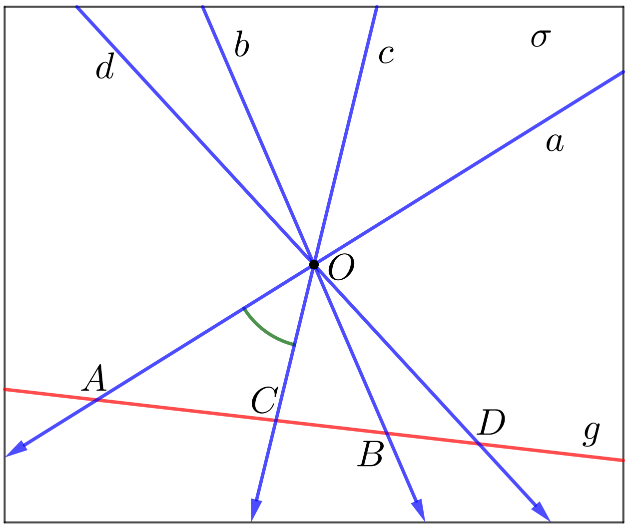
Egyazon sugársorhoz tartozó négy egyenes kettősviszonya

Állapodjunk meg abban, hogy a továbbiakban a szögeket ívmértékben fogjuk mérni.

A kettősviszony definiálható az euklideszi tér négy olyan egyenesének esetében is, amelyek egyazon síkon vannak és egyazon pontra illeszkednek.

4.2. Definíció. Az euklideszi tér egy σ síkjában legyenek adva az egymástól különböző a, b, c, d egyenesek, amelyek egyazon O ponthoz illeszkednek. Irányítsuk a σ síkot és a négy egyenest. A sík irányítása kijelöl egy σ–beli forgásirányt az O pont körül, az egyenesek irányításának pedig mind a négy egyenesen megfelel egy–egy O kezdőpontú félegyenes. Jelölje $(a,\,c)\sphericalangle$ azt az előjeles szöget, amelynek megfelelő O körüli elforgatás az a–n megadott félegyenest a c–n megadott félegyenesbe viszi $(-\pi < (a,\,c)\sphericalangle < \pi)$. Analóg módon értelmezzük a $(c,\,b)\sphericalangle$, $(a,\,d)\sphericalangle$, $(d,\,b)\sphericalangle$ előjeles szögmértékeket is.

Az a, b, c, d sugárnégyes kettősviszonyán az $(a\,b\,c\,d) = \dfrac{\sin(a,\,c)\sphericalangle}{\sin(c,\,b)\sphericalangle} : \dfrac{\sin(a,\,d)\sphericalangle}{\sin(d,\,b)\sphericalangle}$ valós számot értjük.



25. ábra. *Az a, b, c, d sugárnégyes a σ euklideszi síkon.*

Megjegyzés. A fenti definícióban szereplő az a, b, c, d egyenesek az $\mathcal{E}(\sigma, O)$ sugársor elemei. Nem nehéz annak belátása, hogy az $(a\,b\,c\,d)$ kettősviszony értéke nem függ sem a σ sík, sem pedig az egyenesek irányításától. Amennyiben a sík irányítását változtatjuk meg, akkor a kettősviszony kifejezésében szereplő négy szinuszfüggvényérték mindegyike előjelet vált. Ha pedig az egyik egyenes irányítását változtatjuk meg, akkor két függvényérték vált előjelet.

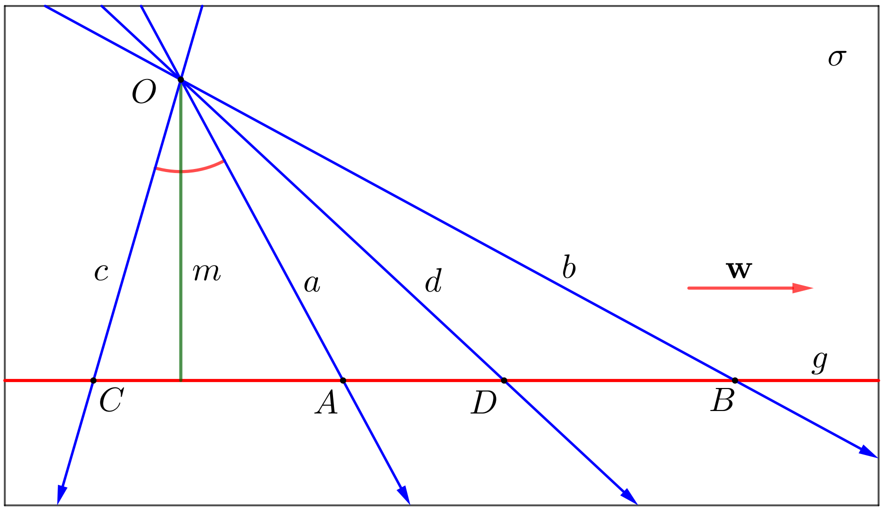
Megjegyzés. A 4.2. Definíció alapján meghatározott $(a\,b\,c\,d)$ számot egyben az O pontra és $\overline{\sigma}$ síkra illeszkedő $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ projektív egyenesek kettősviszonyának is mondjuk.

A következő fontos eredményt a szakirodalomban Papposz tételeként szokás említeni.

4.3. Tétel. *Egy σ síkon legyenek adva az egymástól különböző a, b, c, d egyenesek, amelyek egyazon O ponthoz illeszkednek. Legyen g a σ egy olyan egyenese, amely nem megy át az O–n és az a, b, c, d egyeneseket az A, B, C, D pontokban metszi. Ez esetben fennáll az $(a\,b\,c\,d) = (A\,B\,C\,D)$ összefüggés.*

Bizonyítás.

Az O ponton átmenő a, b, c, d egyeneseken vegyük az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ vektorokkal meghatározott irányítást. A σ síkon is jelöljük ki az egyik forgásirányt, amely alapján az irányított szögekhez előjeles mértéket rendelünk. A g egyenesen adjuk meg azt az irányítást a $\mathbf{w}$ egységvektorral, amely megfelel a síkban felvett forgásiránynak. Ennek megfelelően az $\overrightarrow{AC}$ irányított szakasz előjeles hossza az $AC = \overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{w}$ szám lesz. Jelölje $(a,\, c)\sphericalangle$ azt az előjeles szöget, amelynek megfelelő O körüli elforgatás az OA félegyenest az OC félegyenesbe viszi. Vegyük észre, hogy AC és $(a,\, c)\sphericalangle$ előjele megegyezik.



26. ábra. *A Papposz–tétel igazolása háromszögek területei alapján.*

Amennyiben egy háromszögben megadjuk a csúcsoknak egy ciklikus sorrendjét, vagyis irányítjuk a háromszöget, azzal kitüntetünk egy forgásirányt. Ily módon az irányított háromszögekhez előjeles területet tudunk rendelni. A területnek abban az esetben adunk negatív előjelet, ha a síkban kitüntetett forgásirány és az irányított háromszög által meghatározott forgásirány egymással ellentétes. Az O pontnak a g egyenestől mért távolsága, amelyhez nem tartozik előjel, legyen m $(m > 0)$.

Vegyük most az $OAC\triangle$ irányított háromszöget. Világos, hogy ennek $T(OAC\triangle)$ előjeles területe kifejezhető kétféle módon is, azaz fennáll a

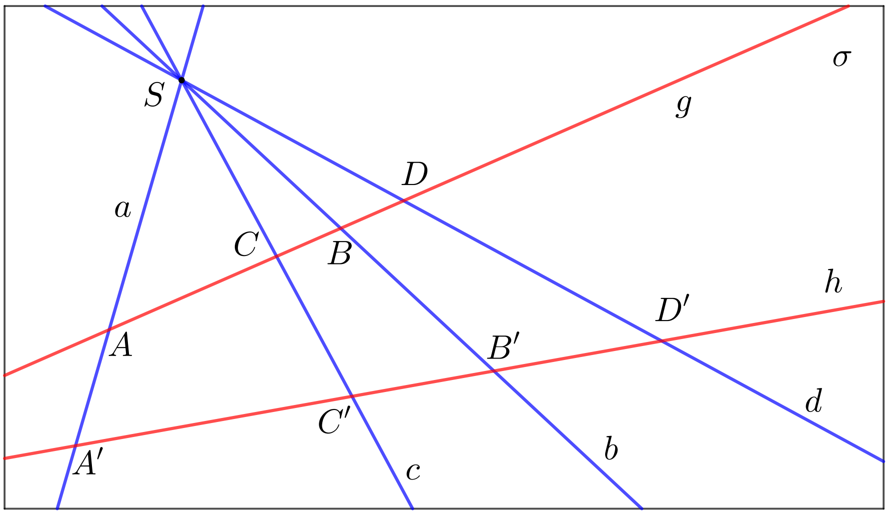
$$2 \cdot T(OAC\triangle) = AC \cdot m = OA \cdot OC \cdot \sin(a,\, c)\sphericalangle$$

egyenlőség, amelyben $OA > 0$ és $OC > 0$. Az $OCB\triangle$, $OAD\triangle$, $ODB\triangle$ háromszögek területét is felírhatjuk kétféle módon.

Ennek következtében a kollineáris pontnégyes kettősviszonyára teljesül az

$$\begin{aligned}(A\,B\,C\,D) &= \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{DB}{AD} = \frac{AC \cdot m}{CB \cdot m} \cdot \frac{DB \cdot m}{AD \cdot m} \\ &= \frac{OA \cdot OC \cdot \sin(a,\, c)\sphericalangle}{OC \cdot OB \cdot \sin(c,\, b)\sphericalangle} \cdot \frac{OD \cdot OB \cdot \sin(d,\, b)\sphericalangle}{OA \cdot OD \cdot \sin(a,\, d)\sphericalangle} \\ &= \frac{\sin(a,\, c)\sphericalangle}{\sin(c,\, b)\sphericalangle} \cdot \frac{\sin(d,\, b)\sphericalangle}{\sin(a,\, d)\sphericalangle} = (a\,b\,c\,d)\end{aligned}$$

összefüggés, ami már igazolja a tételt. □



27. ábra. *A g egyenes centrális vetítése a h egyenesre:* $(A\,B\,C\,D) = (A'\,B'\,C'\,D')$.

A 4.3. Tételből már következik az alábbi két állítás. (Lásd a 27. ábrát.)

4.4. Következmény. *Egy σ síkon legyenek adva az egymástól különböző a, b, c, d egyenesek, amelyek egyazon S ponthoz illeszkednek. Legyenek g és h a σ olyan egyenesei, amelyek nem mennek át az S–n, és amelyek az a, b, c, d egyeneseket az A, B, C, D, illetve az A', B', C', D' pontokban metszik. A kimetszett pontnégyesek kettősviszonyára teljesül az* $(A\,B\,C\,D) = (A'\,B'\,C'\,D')$ *egyenlőség.*

Bizonyítás.
A Papposz–tétel alapján fennáll

$$(A\,B\,C\,D) = (a\,b\,c\,d) = (A'\,B'\,C'\,D')\,,$$

ami igazolja a kijelentést. $\square$

4.5. Következmény. *A centrális vetítés megőrzi a kollineáris pontnégyesek kettősviszonyát és a sugárnégyesek kettősviszonyát.*

A kettősviszony fogalmának kiterjesztése projektív térelemekre

Az alábbiak során a kollineáris pontnégyes kettősviszonyát értelmezni fogjuk majd arra az esetre is, amikor nem mind a négy pont közönséges. *(Amennyiben egy pontnégyest veszünk, akkor mindig feltesszük, hogy annak elemei különbözőek.)*

Az 3. fejezetben már sor került a $\overline{\sigma}$ projektív sík koordinátázására. Ezt úgy végeztük el, hogy a $\overline{\sigma}$ egy tetszőleges P pontjához hozzárendeltük a T és P pontokat összekötő $\langle\, T, P\,\rangle$ egyenes irányvektorait, mint meghatározó vektorokat. Emlékezzünk rá, hogy a meghatározó vektorok és a homogén koordináták csak számszorzótól eltekintve egyértelműek. A továbbiakban a meghatározó vektorokat fogjuk felhasználni a kettősviszony fogalmának kiterjesztéséhez. Ehhez azonban szükségünk van a következő állításra.

4.6. Állítás. *A $\overline{\sigma}$ projektív síkon legyenek adva a közönséges, kollineáris A, B, C, D pontok. Ezen pontoknak feleljenek meg az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}_1 = \lambda_1\,\mathbf{x} + \mu_1\,\mathbf{y}$, $\mathbf{z}_2 = \lambda_2\,\mathbf{x} + \mu_2\,\mathbf{y}$ meghatározó vektorok. A pontnégyes kettősviszonyára fennáll* $(A\,B\,C\,D) = \dfrac{\mu_1}{\lambda_1} : \dfrac{\mu_2}{\lambda_2}$.

Bizonyítás.
Először megmutatjuk, hogy a $\dfrac{\mu_1}{\lambda_1} : \dfrac{\mu_2}{\lambda_2} = \dfrac{\mu_1}{\lambda_1} \cdot \dfrac{\lambda_2}{\mu_2}$ érték nem függ a pontok meghatározó vektorainak a megválasztásától. Vegyük észre, hogy rögzített $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok mellett a μ_1/λ_1 és μ_2/λ_2 hányadosok értéke független attól, hogy a C, D pontokhoz mely $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ vektorokat vesszük.

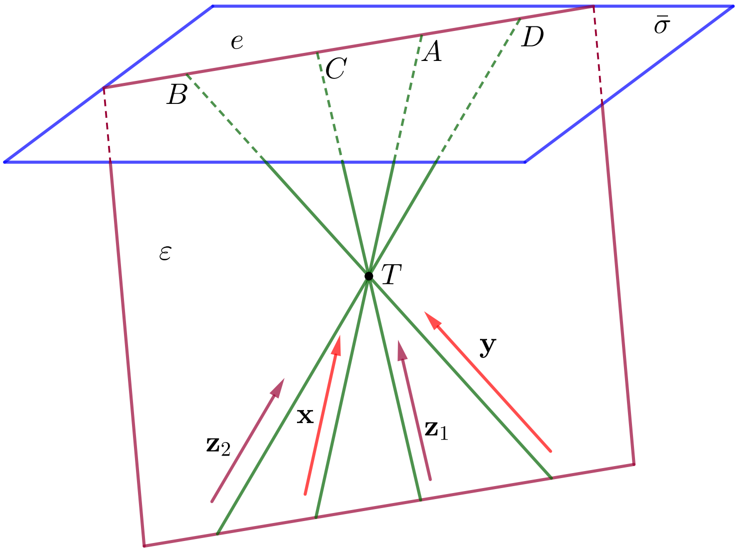
Válasszunk az A, B pontokhoz másik $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$ meghatározó vektorokat az eredeti $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vektorok helyett. A vektorok párhuzamossága miatt vannak olyan a, b ($a \neq 0$, $b \neq 0$) valós számok, melyekkel fennáll $\mathbf{x} = a\,\mathbf{x}'$ és $\mathbf{y} = b\,\mathbf{y}'$. Amennyiben a C, D pontok $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ meghatározó vektorait ezekkel kifejezzük, akkor a

$$\mathbf{z}_1 = (\lambda_1\,a)\,\mathbf{x}' + (\mu_1\,b)\,\mathbf{y}', \quad \mathbf{z}_2 = (\lambda_2\,a)\,\mathbf{x}' + (\mu_2\,b)\,\mathbf{y}',$$

összefüggésekhez jutunk, vagyis az új lineáris kombinációs együtthatók a $\lambda_1' = \lambda_1\,a$, $\mu_1' = \mu_1\,b$ és $\lambda_2' = \lambda_2\,a$, $\mu_2' = \mu_2\,b$ számok lesznek. Ezekkel pedig teljesül

$$\frac{\mu_1'}{\lambda_1'} : \frac{\mu_2'}{\lambda_2'} = \frac{\mu_1\,b}{\lambda_1\,a} : \frac{\mu_2\,b}{\lambda_2\,a} = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}\,.$$

Válasszuk most a pontok meghatározó vektorainak a $\overrightarrow{TA}$, $\overrightarrow{TB}$, $\overrightarrow{TC}$, $\overrightarrow{TD}$ vektorokat. Az utóbbi két vektort fejezzük ki az első kettőből a $\overrightarrow{TC} = \alpha_1\,\overrightarrow{TA} + \beta_1\,\overrightarrow{TB}$ és $\overrightarrow{TD} = \alpha_2\,\overrightarrow{TA} + \beta_2\,\overrightarrow{TB}$ alakban.



28. ábra. *Az $(A\,B\,C\,D)$ kettősviszony kiszámítása a meghatározó vektorokból.*

Mivel C és D rajta vannak az A, B pontok egyenesén, az együtthatókra fennáll $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ és $\alpha_2 + \beta_2 = 1$. Ezek alapján már levezethető, hogy igaz $\alpha_1 \overrightarrow{AC} = \beta_1 \overrightarrow{CB}$ és $\alpha_2 \overrightarrow{AD} = \beta_2 \overrightarrow{DB}$. *(A részletes levezetés megtalálható a 4.8. Állítás bizonyításában.)*

Ily módon a ponthármasoknak az előjeles szakaszhosszakból nyert osztóviszonyaira

$$(A\,B\,C) = \frac{AC}{CB} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \qquad (A\,B\,D) = \frac{AD}{DB} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}\,.$$

teljesül. Ebből viszont már következik, hogy a pontnégyes kettősviszonyára fennáll

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{(A\,B\,C)}{(A\,B\,D)} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta_2}{\alpha_2}\,,$$

ami már igazolja állításunkat. $\square$

A kettősviszony általánosított fogalmát a meghatározó vektorok felhasználásával definiáljuk. A 4.6. Állítás miatt az alábbi értelmezés összhangban van a 4.1. Definícióval.

4.7. Definíció. Legyenek A, B, C, D a $\bar{\sigma}$ projektív sík egyik egyenesének azon pontjai, melyeknek az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}_1 = \lambda_1 \mathbf{x} + \mu_1 \mathbf{y}$, $\mathbf{z}_2 = \lambda_2 \mathbf{x} + \mu_2 \mathbf{y}$ vektorok felelnek meg. A pontnégyes kettősviszonyán az $(A\,B\,C\,D) = \dfrac{\mu_1}{\lambda_1} : \dfrac{\mu_2}{\lambda_2}$ számot értjük.

Megjegyzés. Az előző definícióval kapcsolatosan fontos megjegyezni, hogy a $\frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}$ kifejezés értéke nem függ az A, B, C, D pontok $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ meghatározó vektorainak a megválasztásától.

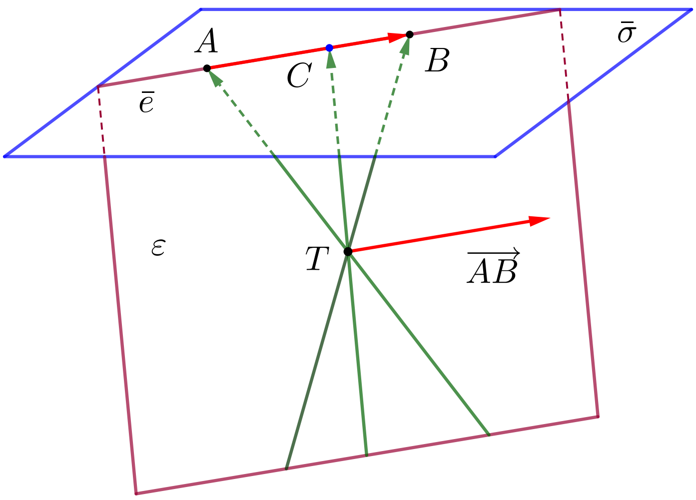
Az előző definíció alapján a kettősviszonyt olyan pontnégyesek esetében is értelmezhető, ahol az egyik pont ideális.

4.8. Állítás. *A $\overline{\sigma}$ sík egyik $\overline{e}$ egyenesén legyenek adva az A, B, C közönséges pontok. Vegyük az $\overline{e}$ egyenes I_e ideális pontját. Ezen pontnégyes kettősviszonyára fennáll $(A\,B\,C\,I_e) = -(A\,B\,C)$, ahol $(A\,B\,C)$ a közönséges ponthármas osztóviszonya.*

Bizonyítás.

A kettősviszonyt a pontokhoz rendelt meghatározó vektorok alapján számíthatjuk ki. A 4.6. Állítás igazolása során már beláttuk, hogy ezeket tetszőlegesen megválaszthatjuk.

Válasszuk a A, B, C, I_e pontok meghatározó vektorainak a $\overrightarrow{TA}$, $\overrightarrow{TB}$, $\overrightarrow{TC}$ és $\overrightarrow{TB}-\overrightarrow{TA}$ vektorokat. Emlékezzünk rá, hogy az I_e ideális ponthoz tartozó vektorok az e egyenessel párhuzamosak, és ezek egyike a $\overrightarrow{TB}-\overrightarrow{TA}$ vektor. (Lásd a 29. ábrát.)



29. ábra. *Az A, B, C, I_e pontok speciális meghatározó vektorai.*

A $\overrightarrow{TC}$ vektort egyértelműen áll elő a $\overrightarrow{TA}$, $\overrightarrow{TB}$ vektorok lineáris kombinációjaként a $\overrightarrow{TC} = \alpha_1\,\overrightarrow{TA}+\beta_1\,\overrightarrow{TB}$ alakban. Mivel az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok párhuzamosak, van egy olyan t $(t \neq 0,\ t \neq 1)$ valós szám, hogy $\overrightarrow{AC} = t\,\overrightarrow{AB}$. Ennek következtében igaz

$$\overrightarrow{TC} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{TA} + t\,(\overrightarrow{TB} - \overrightarrow{TA}) = (1-t)\,\overrightarrow{TA} + t\,\overrightarrow{TB}.$$

Eszerint az α_1, β_1 együtthatókra $\alpha_1 = 1-t$, $\beta_1 = t$ adódik, vagyis fennáll $\alpha_1 + \beta_1 = 1$.

Ha vesszük az $(\alpha_1+\beta_1)\,\overrightarrow{TC} = \alpha_1\,\overrightarrow{TA}+\beta_1\,\overrightarrow{TB}$ egyenlőséget, akkor abból átrendezéssel az $\alpha_1(\overrightarrow{TC} - \overrightarrow{TA}) = \beta_1\,(\overrightarrow{TC} - \overrightarrow{TB})$ összefüggést nyerjük. Emiatt az $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ irányított szakaszokra és azok AC, CB előjeles hosszaira $\alpha_1 \overrightarrow{AC} = \beta_1 \overrightarrow{CB}$ teljesül. Ily módon a ponthármas osztóviszonyára fennáll

$$(A\,B\,C) = \frac{AC}{CB} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\,.$$

Mivel az I_e ideális pont $\overrightarrow{TB} - \overrightarrow{TA}$ meghatározó vektorában az együtthatók $\beta_2 = 1$ és $\alpha_2 = -1$, a 4.7. Definíció alapján a kettősviszonyra az

$$(A\,B\,C\,I_e) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta_2}{\alpha_2} = -\frac{\beta_1}{\alpha_1} = -(A\,B\,C)$$

összefüggést kapjuk. □

Sugárnégyes kettősviszonyának kifejezése a meghatározó vektorok alapján

A továbbiakban a projektív egyenesekből álló sugárnégyes esetére fogjuk kiterjeszteni a kettősviszony fogalmát. Ehhez szükségünk van a következő állításra.

4.9. Állítás. *Az euklideszi tér egy σ síkjában legyen adott négy egyenes a, b, c és d, amelyek egyazon S pontra illeszkednek. A $\overline{\sigma}$ projektív síkon vett $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ egyenesek meghatározó vektorai legyenek $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}_1 = \lambda_1\,\mathbf{u} + \mu_1\,\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}_2 = \lambda_2\,\mathbf{u} + \mu_2\,\mathbf{v}$. Ekkor az a, b, c, d sugárnégyes kettősviszonyára fennáll $(a\,b\,c\,d) = \dfrac{\mu_1}{\lambda_1} : \dfrac{\mu_2}{\lambda_2}$.*

Bizonyítás.
A 4.6. Állítás bizonyításának első része alapján már adódik, hogy a $\dfrac{\mu_1}{\lambda_1} : \dfrac{\mu_2}{\lambda_2}$ érték nem függ az egyenesek meghatározó vektorainak a megválasztásától.

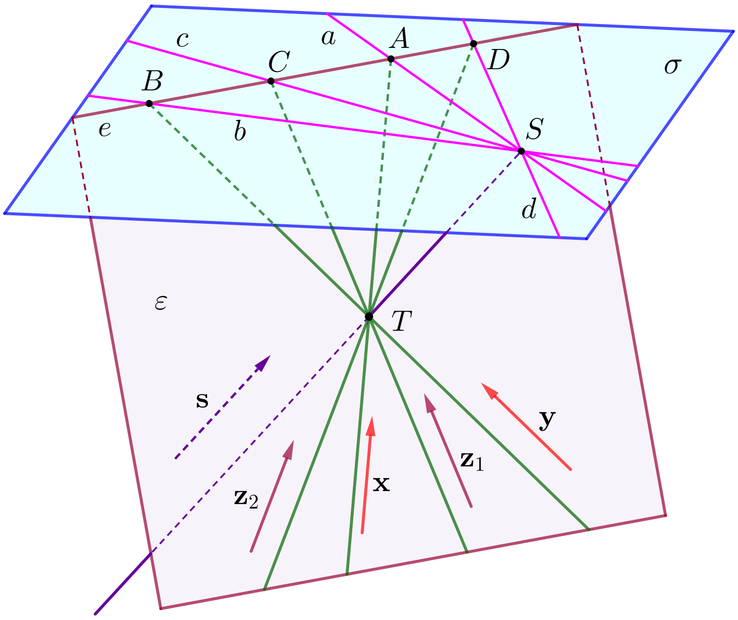
Vegyünk a σ síkben egy olyan e egyenest, amely nem megy át az S ponton és az a, b, c, d egyeneseket az A, B, C, D pontokban metszi. A 4.3. Tétel, vagyis a Papposz–tétel szerint a sugárnégyes és az abból kimetszett pontnégyes kettősviszonya egyenlő, vagyis fennáll $(a\,b\,c\,d) = (A\,B\,C\,D)$.

Rögzítsük az S pont egyik $\mathbf{s}$ meghatározó vektorát, továbbá az A, B, C, D pontok egy–egy meghatározó vektorát, melyeket sorrendben jelöljön $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$. Az utóbbi két vektort fejezzük ki az első kettőből az $\mathbf{z}_1 = \tilde{\lambda}_1\,\mathbf{x} + \tilde{\mu}_1\,\mathbf{y}$, $\mathbf{z}_2 = \tilde{\lambda}_2\,\mathbf{x} + \tilde{\mu}_2\,\mathbf{y}$ alakban valamely $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\mu}_1$ és $\tilde{\lambda}_2$, $\tilde{\mu}_2$ együtthatókkal. A 4.6. Állítás következtében ezekkel fennáll az $(A\,B\,C\,D) = \dfrac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\lambda}_1} : \dfrac{\tilde{\mu}_2}{\tilde{\lambda}_2}$ egyenlőség. (Lásd a 30. ábrát.)

Alkalmazzuk ezúttal a 3.10. Állítást. Eszerint az $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{s} \times \mathbf{x}$, $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{s} \times \mathbf{y}$, $\tilde{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{s} \times \mathbf{z}_1$ és $\tilde{\mathbf{w}}_2 = \mathbf{s} \times \mathbf{z}_2$ vektoriális szorzatok az $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ projektív egyenesek meghatározó vektorai. Világos, hogy ezek a vektorok merőlegesek az euklideszi egyenesek és a T tartópont által kifeszített síkokra. Amennyiben az egyenesekhez ezeket a meghatározó vektorokat rendeljük, akkor a fentiek alapján teljesül $\tilde{\mathbf{w}}_1 = \tilde{\lambda}_1\,\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mu}_1\,\tilde{\mathbf{v}}$ és $\tilde{\mathbf{w}}_2 = \tilde{\lambda}_2\,\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mu}_2\,\tilde{\mathbf{v}}$. Az együtthatókkal pedig fennáll

$$\frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\lambda}_1} : \frac{\tilde{\mu}_2}{\tilde{\lambda}_2} = (A\,B\,C\,D) = (a\,b\,c\,d)\,,$$

ami már igazolja az állítást. □



30. ábra. *Szemléltető ábra a 4.9. Állításhoz.*

A kettősviszony fogalmát a fentiek alapján ki tudjuk terjeszteni a projektív sugárnégyes esetére is.

4.10. Definíció. A $\overline{\sigma}$ projektív síkon legyenek adva az egymástól különböző $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ egyenesek, amelyek egyazon S ponthoz illeszkednek. Vegyük ezen projektív egyenesek egy–egy meghatározó vektorát, legyenek ezek $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}_1 = \lambda_1\,\mathbf{u} + \mu_1\,\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}_2 = \lambda_2\,\mathbf{u} + \mu_2\,\mathbf{v}$. A projektív sugárnégyes kettősviszonyán az $(\overline{a}\;\overline{b}\;\overline{c}\;\overline{d}) = \dfrac{\mu_1}{\lambda_1} : \dfrac{\mu_2}{\lambda_2}$ számot értjük.

Megjegyzés. A fenti definícióban szereplő S pont lehet a $\overline{\sigma}$ projektív sík egyik ideális pontja, továbbá a négy egyenes egyike megegyezhet az i_σ ideális egyenessel.

Harmonikus pontnégyesek. A teljes négyoldal tétele

A továbbiakban a projektív egyenesek és az euklideszi egyenesek jelölésében már nem teszünk különbséget, azaz nem használjuk a felülvonás jelet.

A projektív egyenesen (amely topológiailag egy körszerű alakzatnak tekinthető) a rendezést pontpárok alkalmazásával lehet értelmezni.

4.11. Definíció. Legyenek A, B, C, D egy projektív egyenes különböző pontjai. Amennyiben fennáll az $(A\,B\,C\,D) < 0$ egyenlőtlenség, akkor azt mondjuk, hogy az A, B pontpár és a C, D pontpár elválasztják egymást.

4.12. Definíció. Legyenek adva az A, B, C, D kollineáris, egymástól különböző pontok. Ezek egy harmonikus pontnégyest alkotnak, ha $(A\,B\,C\,D) = -1$ teljesül.

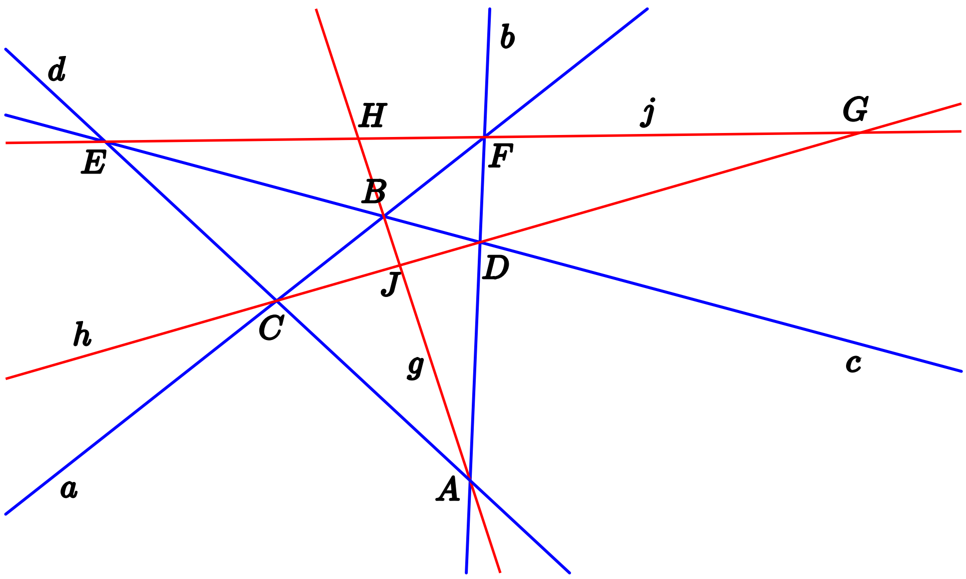
Megjegyzés. Ha egy e projektív egyenesen adva vannak az A, B, C pontok, akkor az e–nek egy és csak egy olyan D pontja van, amelyre igaz $(A\,B\,C\,D) = -1$. A kettősviszonyra vonatkozó összefüggések következtében ekkor fennáll $(A\,B\,D\,C) = (C\,D\,A\,B) = -1$. Ez esetben szokás azt is mondani, hogy az A, B és C, D pontpárok harmonikusan választják el egymást.

Megjegyzés. Az e egyenesen legyenek A, B, F olyan közönséges pontok, hogy az F felezőpontja az $\overline{AB}$ szakasznak. Tekintsük az e egyenes I_e ideális pontját. Mivel fennáll $(A\,B\,F) = 1$, a 4.8. Állítás következtében az A, B, F, I_e pontnégyes harmonikus.

4.13. Definíció. Egy projektív sík négy egyeneséről azt mondjuk, hogy azok egy teljes négyoldalt képeznek, ha közülük bármelyik három nem illeszkedik egyazon pontra.

Legyenek a, b, c, d olyan egyenesek a $\overline{\sigma}$ projektív síkon, amelyek egy teljes négyoldalt alkotnak. Az a, b, c, d egyeneseket a teljes négyoldal oldalegyeneseinek nevezzük. A négy oldalegyenesnek összesen hat metszéspontja van, melyeket a teljes négyoldal szögpontjainak hívunk.

Két szögpontot átellenesnek mondunk, ha nincsenek egyazon oldalegyenesen. Az átellenes szögpontok összekötésével további három egyenest kapunk, melyeket a teljes négyoldal átlós egyeneseinek nevezünk. Az átlós egyenesek metszéspontjai (három pont) képezik a teljes négyoldal átlós pontjait. Egy átlós egyeneshez két szögpont és két átlós pont illeszkedik.



31. ábra. *Szemléltető ábra a teljes négyoldal tételéhez.*

Megjegyzés. A mellékelt 31. ábrán az a, b, c, d teljes négyoldal átlós egyenesei a $g = \langle A, B\rangle$, $h = \langle C, D\rangle$ és $j = \langle E, F\rangle$ egyenesek. A $G = h \cap j$, $H = j \cap g$, $J = g \cap h$ metszéspontok képezik a teljes négyoldal átlós pontjait.

Az alábbi kijelentést a szakirodalomban a teljes négyoldal tételeként szokás említeni.
4.14. Tétel. *A teljes négyoldal bármely átlós egyenesén lévő két szögpont és két átlós pont egy harmonikus pontnégyest alkotnak.*

Bizonyítás.
A Papposz-tétel következtében a centrális vetítés megőrzi a kollineáris pontnégyesek kettősviszonyát. Ezt alkalmazzuk a kijelentés igazolására. A 31. ábrán szereplő jelöléseket fogjuk használni. Három centrális vetítést hajtunk végre az alábbiak szerint.

Elsőként az A, B szögpontok g átlós egyenesét az E centrumból rávetítjük a h egyenesre. Ez a középpontos vetítés az A pontot a C pontba, a B pontot D–be, a H átlós pontot G–be képezi, a J pontot pedig fixen hagyja. Emiatt a kettősviszonyokra fennáll az $(A\,B\,J\,H) = (C\,D\,J\,G)$ egyenlőség.

Második lépésben a h átlós egyenest az A középpontból rávetítjük a j egyenesre. Ekkor a centrális vetítés a C, D, J, G pontnégyest az E, F, H, G pontnégyesbe képezi, tehát teljesül $(C\,D\,J\,G) = (E\,F\,H\,G)$.

Végül a j egyenest a C centrumból vetítsük rá a g átlós egyenesre. Ez a középpontos vetítés az E, F, H, G pontnégyest az A, B, H, J pontnégyesbe viszi, vagyis igaz $(E\,F\,H\,G) = (A\,B\,H\,J)$.

A fentiek alapján azt kapjuk hogy fennáll

$$(A\,B\,J\,H) = (A\,B\,H\,J) = \frac{1}{(A\,B\,J\,H)}\,.$$

Innen már következik, hogy az A, B, J, H pontnégyes kettősviszonyára fennáll $(A\,B\,J\,H)^2 = 1$. Mivel a kettősviszony nem veheti fel az 1 és 0 értékeket, teljesül az $(A\,B\,J\,H) = -1$ összefüggés. □

Megjegyzés. Amennyiben a mellékelt 10. ábrán szereplő jelölést alkalmazzuk, akkor az előző tétel szerint fennáll $(A\,B\,H\,J) = -1$, $(C\,D\,G\,J) = -1$ és $(E\,F\,G\,H) = -1$.

Megjegyzés. A σ euklideszi síkon legyen adva egy g egyenes három pontja A, B és C oly módon, hogy a C különbözik az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontjától. Ekkor *vonalzós szerkesztéssel* (a fenti tétel ismeretében) kijelölhetjük a g egyenesen azt a D pontot, amelyre fennáll $(A\,B\,C\,D) = -1$.

A projektív sík projektív transzformációi (kollineációi)

A továbbiakban többnyire egy $\overline{\sigma}$ projektív síkot tekintünk. A $\overline{\sigma}$–ról végig feltesszük, hogy már koordinátázva van egy a σ euklideszi síkon rögzített $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ Descartes–féle koordináta–rendszer alapján.

4.15. Definíció. A $\kappa : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ bijektív leképezést a $\overline{\sigma}$ sík projektív transzformációjának (vagy más szóval a $\overline{\sigma}$ sík kollineációjának) mondjuk, ha bármely $\overline{\sigma}$–beli egyenesnek a κ szerinti képe egyenes.

Megjegyzés. A fenti definíció alapján igazak az alábbi kijelentések.
(1) Ha κ_1 és κ_2 a $\overline{\sigma}$ sík projektív transzformációi, akkor az azok szorzataként nyert $\kappa_2 \circ \kappa_1$ leképezés is egy kollineáció.
(2) Ha κ egy kollineáció, akkor annak a $\kappa^{-1} : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ inverz leképezése is egy projektív transzformáció.
(3) A $\overline{\sigma}$ projektív sík kollineációi a leképezések kompozíciójára, mint szorzásműveletre, nézve egy csoportot alkotnak, amelyet a továbbiakban $Coll(\overline{\sigma})$ fog jelölni.

Megjegyzés. Két különböző sík között is értelmezni tudjuk az úgynevezett projektív leképezést. Legyenek adva a $\overline{\varrho}$ és $\overline{\sigma}$ projektív síkok. A $\kappa : \overline{\varrho} \to \overline{\sigma}$ leképezést *projektívnek* mondjuk, ha bijektív és bármely $\overline{\varrho}$–beli egyenesnek a κ szerinti képe egyenes.

Ha a $\overline{\varrho}$ síkot centrálisan rávetítjük a $\overline{\sigma}$ síkra, akkor az így nyert leképezés bijektív és egyenestartó, vagyis a centrális vetítés egy projektív leképezést ad.

Kollineáció konstrukciója két centrális vetítés szorzataként

4.16. Definíció. Legyen adva egy $\kappa : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ projektív transzformáció. A $\overline{\sigma}$ sík egy t egyenesét a κ kollineáció tengelyének mondjuk, ha κ fixen hagyja a t egyenes összes pontját. A $\overline{\sigma}$ sík egy C pontját a κ kollineáció centrumának nevezzük, ha κ fixen hagyja az C–re illeszkedő összes egyenest.

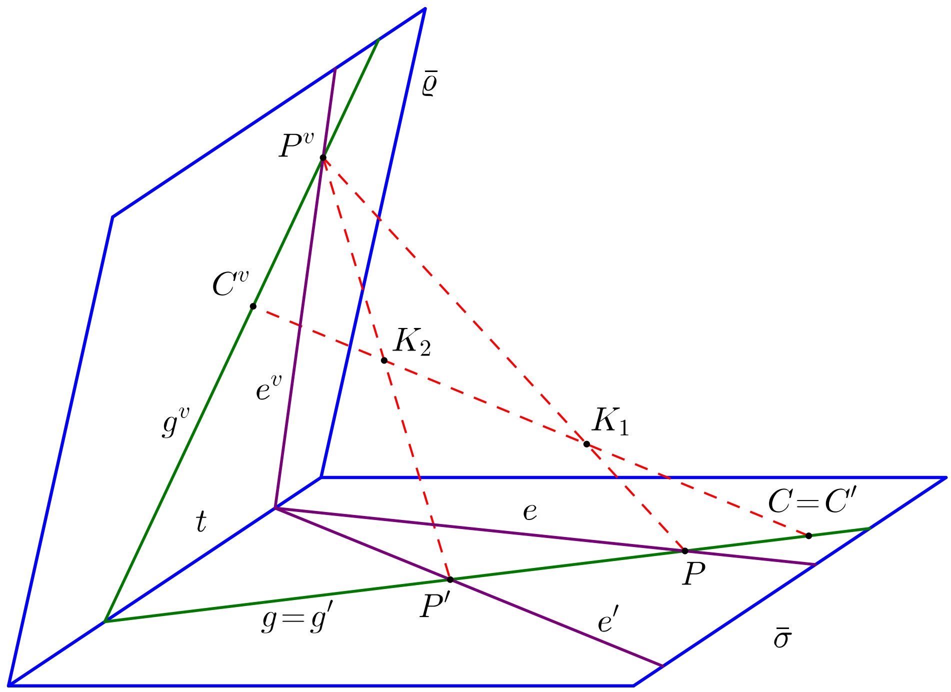
4.17. Definíció. Centrális–tengelyes kollineáción egy olyan $\kappa : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ projektív transzformációt értünk, amelynek van centruma és van tengelye.

Centrális–tengelyes kollineációt az alábbi módon lehet vetítésekkel létrehozni.
A projektív térben vegyük a $\overline{\sigma}$ és $\overline{\varrho}$ projektív síkokat, továbbá olyan K_1, K_2 pontokat, amelyek nincsenek rajta a $\overline{\sigma}$, $\overline{\varrho}$ síkokon. Vetítsük rá K_1 centrumból a $\overline{\sigma}$ projektív síkot a $\overline{\varrho}$ síkra. Ez a centrális vetítés egy egyenestartó bijektív leképezést ad, melyet jelöljön $\mu_1 : \overline{\sigma} \to \overline{\varrho}$. (Az ábrán egy $\overline{\sigma}$-beli P pont vetületét P^v jelöli, vagyis $P^v = \mu_1(P)$.) Emlékezzünk rá, hogy Papposz tétele szerint a centrális vetítés megőrzi a kollineáris pontnégyesek kettősviszonyát.

Ezt követően vetítsük rá a $\overline{\varrho}$ síkot a $\overline{\sigma}$ síkra a K_2 vetítési centrumból. Ily módon egy másik $\mu_2 : \overline{\varrho} \to \overline{\sigma}$ bijektív leképezést nyerünk.

Világos, hogy az egyenestartó μ_1, μ_2 leképezések $\kappa = \mu_2 \circ \mu_1$ szorzata egy kollineációt ad a $\overline{\sigma}$ projektív síkon. (Az ábrán P' jelöli a $\overline{\sigma}$-beli P pont κ szerinti képét.)

A $\kappa : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ kollineáció fixen hagyja a $\overline{\sigma}$ és $\overline{\varrho}$ síkok t metszésvonalának az összes pontját. Azonban κ nemcsak a $t = \overline{\sigma} \cap \overline{\rho}$ egyenes pontjait hagyja fixen, hanem a $\langle K_1, K_2 \rangle$ egyenes $\overline{\sigma}$ síkkal vett C metszéspontját is. Látható továbbá, hogy bármely C-n átmenő



32. ábra. *Két centrális vetítés szorzataként nyert centrális–tengelyes kollineáció a $\overline{\sigma}$ síkon.*

$\overline{\sigma}$-beli egyenes képe önmaga. Ezek alapján a $\kappa = \mu_2 \circ \mu_1$ leképezés egy centrális-tengelyes kollineáció a $\overline{\sigma}$ síkon a C centrummal és a t tengellyel.

Az euklideszi síkon vett affinitás projektív kiterjesztése, mint kollineáció

A σ euklideszi síkon vegyünk egy $\varphi : \sigma \to \sigma$ affin transzformációt. Ehhez hozzá lehet rendelni egy kollineációt a $\overline{\sigma}$ ($\overline{\sigma} = \sigma \cup i_\sigma$) projektív síkon az alábbi módon.

Tekintsük azt a $\overline{\varphi} : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ leképezést, ahol tetszőleges $P \in \sigma$ pontra fennáll $\overline{\varphi}(P) = \varphi(P)$, továbbá bármely σ–beli e egyeneshez tartozó I_e ideális pont esetében $\overline{\varphi}(I_e) = I_{\varphi(e)}$ teljesül. A $\overline{\varphi}$ tehát nem más, mint a φ leképezés kiterjesztése a teljes projektív síkra oly módon, hogy az e egyeneshez tartozó I_e ideális ponthoz a $\varphi(e)$ kép-egyeneshez tartozó ideális pontot rendeljük.

Mivel a φ affin transzformáció párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe képez, a $\overline{\varphi}$ leképezés fenti meghatározása egzakt.

Könnyen belátható, hogy a $\overline{\varphi} : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ leképezés bijektív és egyenestartó, továbbá $\overline{\varphi}(i_\sigma) = i_\sigma$ is teljesül. Eszerint a $\overline{\varphi}$ egy olyan kollineációja a $\overline{\sigma}$ projektív síknak, amely fixen hagyja az i_σ ideális egyenest.

4.18. Definíció. A fentiek során értelmezett $\overline{\varphi}$ kollineációt a φ affinitás projektív kiterjesztésének (vagy más szóval a φ projektív lezárásának) nevezzük.

Megjegyzés. A $\overline{\varphi}$ leképezést szokás még a φ affinitás által meghatározott projektív transzformációnak is mondani.

4.19. Állítás. *A $\overline{\sigma}$ projektív síkon legyen adva egy t egyenes és olyan C, P, P' ($C \neq P$, $C \neq P'$, $P \neq P'$) kollineáris pontok, amelyek nincsenek rajta a t egyenesen. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan $\kappa : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ centrális–tengelyes kollineáció, amelynek t a tengelye, C a centruma és amelyre fennáll $\kappa(P) = P'$.*

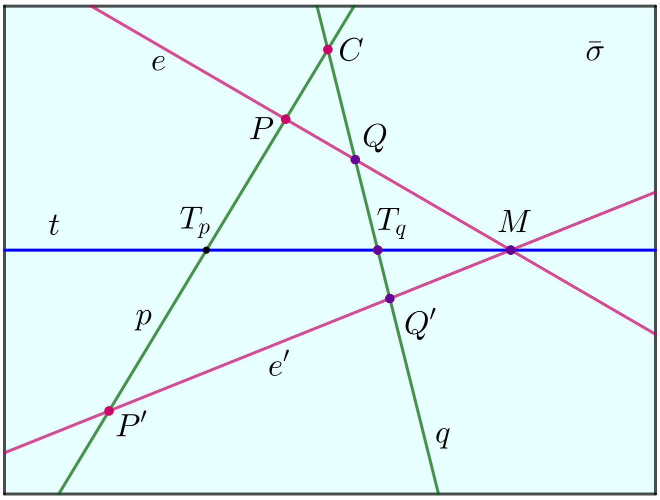
Bizonyítás.

A létezés igazolása centrális vetítések alkalmazásával.

Jelölje g a C, P, P' pontokon átmenő egyenest. Vegyünk a $\overline{X}$ projektív térben egy olyan $\overline{\varrho}$ síkot, amely a t egyenesben metszi el a $\overline{\sigma}$ síkot. A g, t egyenesek metszéspontja legyen T. Vegyünk a $\overline{\varrho}$ síkban egy T–n áthaladó g^v egyenest. Ezen jelöljünk ki egy C^v pontot és egy tőle különböző P^v pontot. (Lásd a 32. ábrát.)

Vegyük észre, hogy a $\langle C, C^v\rangle$, $\langle P, P^v\rangle$ és $\langle P', P^v\rangle$ egyenesek benne vannak a g, g^v metsző egyenesek síkjában. Legyen K_1 a $\langle C, C^v\rangle$, $\langle P, P^v\rangle$ egyenesek metszéspontja, továbbá legyen K_2 a $\langle C, C^v\rangle$, $\langle P', P^v\rangle$ egyenesek metszéspontja. Előbb vetítsük rá a $\overline{\sigma}$ síkot a $\overline{\varrho}$ síkra a K_1 vetítési centrumból, majd ezt követően vetítsük rá a $\overline{\varrho}$ síkot a $\overline{\sigma}$ síkra a K_2 vetítési centrumból. Az így nyert egyenestartó leképezéseket a síkok között jelölje $\mu_1 : \overline{\sigma} \to \overline{\varrho}$ és $\mu_2 : \overline{\varrho} \to \overline{\sigma}$. Látható, hogy teljesül $\mu_1(P) = P^v$ és $\mu_2(P^v) = P'$.

Ezen μ_2, μ_1 bijektív leképezések $\kappa = \mu_2 \circ \mu_1$ szorzata egy olyan kollineációt ad a $\overline{\sigma}$ projektív síkon, amelynek a t egyenes tengelye és a C pont centruma, továbbá fennáll $\kappa(P) = P'$.



33. ábra. *Egy Q pont képének kijelölése a centrális–tengelyes kollineációnál.*

Az egyértelműség igazolása. (Lásd a 33. ábrát.)

A kollineáció egyértelműségét úgy bizonyítjuk be, hogy megmutatjuk a következőt:
A t tengely, a C centrum és a P, P' pontpár ismeretében tetszőleges Q pontnak a centrális–tengelyes kollineációval nyert képe már kijelölhető, illetve megszerkeszthető.

Ezúttal jelölje p a C, P, P' pontokon átmenő egyenest. Vegyünk a $\overline{\sigma}$ síkban egy Q pontot, amelyet a P ponttal összekötő egyenes legyen e. Az e egyenes és a t tengely metszéspontját jelölje M. Mivel az M pont képe önmaga, az $\langle M, P' \rangle$ egyenes lesz az e egyenes e' képe. A C, Q pontokon átmenő $q = \langle C, Q \rangle$ egyenes képe önmaga, vagyis fennáll $q = q'$, hiszen C a kollineáció centruma. Ez q egyenes elmetszi a t tengelyt egy T_q pontban.

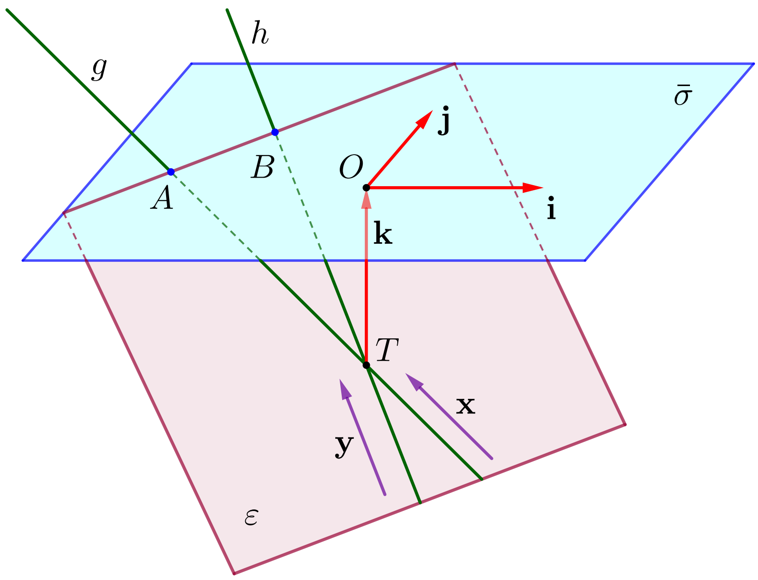
A Q pont rajta van az e, q egyeneseken. Emiatt ezek e', q' képeinek a metszéspontja lesz a Q' képpont. Ezzel az állítás igazolást nyert. □

Megjegyzés. Az előző állítás abban az esetben is érvényben marad, ha a C pont rajta van a t egyenesen. Ekkor a centrális–tengelyes kollineációt *elációnak* nevezik.

A $\mathcal{V}$–beli lineáris izomorfizmus által indukált kollineáció

A továbbiakban is $\mathcal{V}$ fogja jelölni az X euklideszi tér szabad vektorainak terét. Tekintsünk egy $\overline{\sigma}$ projektív síkot, amelyet a σ euklideszi síknak a kibővítésével nyerünk. Emlékezzünk rá, hogy ezt a $\overline{\sigma}$ síkot az alábbi eljárással koordinátázzuk.

A σ síkon felveszünk egy $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ derékszögű koordináta–rendszert. Legyen $\mathbf{k}$ az az egységvektor, amely merőleges az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ alapvektorokra, vagyis amellyel az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektorhármas a $\mathcal{V}$–nek egy ortonormált bázisát adja. A $\mathbf{k}$ vektort úgy választjuk meg, hogy ez a bázis egy jobbrendszert képezzen, vagyis fennáll $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$.



34. ábra. *Az $\overline{\sigma}$ sík A, B pontjaihoz rendelt g, h egyenesek és az* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *meghatározó vektorok.*

Tekintsük a térnek azon T pontját, amelyre fennáll $\overrightarrow{TO} = \mathbf{k}$. Ekkor egy bijektív megfeleltetés adódik a $\overline{\sigma}$ sík pontjai és az $\mathcal{E}(T)$ sugárnyaláb egyenesei között. Ha A egy közönséges pont, akkor a $g = \langle A, T \rangle$ egyenest rendeljük az A ponthoz. Egy σ–beli e egyenes I_e ideális pontjának pedig az e–vel párhuzamos és a T–n átmenő egyenest feleltetjük meg.

A T tartóponton átmenő egyenesek irányvektorait, mint meghatározó vektorokat rendeljük a $\overline{\sigma}$ sík pontjaihoz. A meghatározó vektoroknak az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisra vonatkozó koordinátái képezik a pontok homogén koordináta–hármasait.

Mivel egy $\overline{\sigma}$–beli pontnak a meghatározó vektorai egymásnak számszorosai, egy bijektív megfeleltést nyerünk a $\overline{\sigma}$ sík pontjai és a $\mathcal{V}$ vektortér 1–dimenziós alterei között is. Amennyiben egy $\mathcal{V}$–beli $\mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \neq 0)$ vektor a $\overline{\sigma}$ sík A pontjának az egyik meghatározó vektora, akkor az A pontnak az $\mathbb{R}\mathbf{x} = \{ t\mathbf{x} \mid t \in \mathbb{R} \}$ egydimenziós altér felel meg. Tehát a meghatározó vektorokkal egy bijektív megfeleltetést kapunk a $\overline{\sigma}$ sík pontjai és a $\mathcal{V}$ egydimenziós alterei között.

A továbbiakban alkalmazni fogjuk a következő jelölést. Egy $\mathcal{V}$–beli $\mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ vektor esetén $[\mathbf{x}]$ jelöli majd a $\overline{\sigma}$ projektív sík azon pontját, amelynek egyik meghatározó vektora az $\mathbf{x}$. Célszerű itt megjegyezni, hogy bármely λ $(\lambda \neq 0)$ szám esetén fennáll $[\lambda\,\mathbf{x}] = [\mathbf{x}]$.

Vegyünk egy $\xi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris izomorfizmust, vagy más szóval egy lineáris transzformációt. Mivel ξ a $\mathcal{V}$ vektortér 1–dimenziós altereit 1–dimenziós alterekbe képez, bevezethetjük a következő fogalmat.

4.20. Definíció. Legyen adva egy $\xi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris izomorfizmus a $\mathcal{V}$ vektortéren. A ξ által indukált $\overline{\sigma}$–beli kollineáción azt a $\kappa : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ leképezést értjük, amely tetszőleges $\mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \neq 0)$ vektor esetén az $\mathbf{x}$ által meghatározott ponthoz a $\xi(\mathbf{x})$ képvektor által meghatározott pontot rendeli.

Megjegyzés. Egy $\overline{\sigma}$–beli egyenes pontjaihoz rendelt meghatározó vektorok (ha még a $\mathbf{0}$ nullvektort is hozzájuk vesszük) egy 2–dimenziós alteret alkotnak. Mivel a ξ lineáris izomorfizmus egy alteret azzal azonos dimenziójú altérbe képez, így a fenti definícióban szereplő κ leképezés bijektív és egyenestartó, azaz valóban egy projektív transzformációt ad a $\overline{\sigma}$ projektív síkon.

Az itt bevezetett jelölést használva a ξ–hez rendelt κ kollineációra bármely $\mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ vektor mellett teljesül $\kappa([\mathbf{x}]) = [\xi(\mathbf{x})]$.

Állapodjunk meg abban, hogy a továbbiakban a ξ által indukált $\overline{\sigma}$–beli projektív transzformációt $[\xi]$ fogja jelölni.

Nyilvánvaló, hogy amennyiben a c valós szám különbözik 0–tól, akkor a ξ és $c\cdot\xi$ lineáris izomorfizmusok ugyanazt a kollineációt indukálják, vagyis fennáll $[\xi] = [c \cdot \xi]$.

Evidens, hogy a $c \cdot id_{\mathcal{V}}$ izomorfizmusok az $id_{\overline{\sigma}}$ helybenhagyás kollineációt indukálják a $\overline{\sigma}$ projektív síkon.

Ha a ξ_1 és ξ_2 olyan $\mathcal{V}$–beli lineáris izomorfizmusok, hogy bármely $c \in \mathbb{R}$ szám mellett fennáll $\xi_2 \neq c \cdot \xi_1$, akkor $[\xi_1] \neq [\xi_2]$ teljesül.

Felvetődik a kérdés, hogy vajon az összes $\overline{\sigma}$–beli kollineáció származtatható–e a $\mathcal{V}$–beli lineáris izomorfizmusokból. Az alábbi tétel, melyet a *projektív síkgeometria alaptételének* mondanak, igenlő választ ad a kérdésre. Ennek időigényes bizonyítására ezúttal nem térünk ki.

4.21. Tétel. *A $\overline{\sigma}$ projektív sík tetszőleges κ kollineációjához létezik olyan $\xi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris izomorfizmus, hogy a ξ által indukált projektív transzformáció megegyezik κ–val.*

A fenti tétel szerint bármely κ kollineációt olyan $\mathcal{V}$–beli lineáris izomorfizmusok indukálnak, amelyek számszorzóban különböznek egymástól. Mivel a kettősviszony a meghatározó vektorok lineáris kombinációs kifejezései alapján számítható ki, a 4.21. Tételből már következik az alábbi állítás.

4.22. Állítás. *A $\overline{\sigma}$ projektív síkon vett tetszőleges κ projektív transzformáció megőrzi a kollineáris pontnégyesek és a sugárnégyesek kettősviszonyát.*

Bizonyítás.
Legyen adott egy $\kappa : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ kollineáció. Vegyünk egy olyan $\xi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris izomorfizmust, amely éppen a κ–t indukálja.

Tekintsünk egy kollineáris A, B, C, D pontnégyest, melyeknek a kiválasztott meghatározó vektorai legyenek $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}_1$ és $\mathbf{z}_2$. Mint ismeretes, az utóbbi két vektor előállítható az első kettő lineáris kombinációjaként a $\mathbf{z}_1 = \lambda_1 \mathbf{x} + \mu_1 \mathbf{y}$, $\mathbf{z}_2 = \lambda_2 \mathbf{x} + \mu_2 \mathbf{y}$ alakban.

Vegyük a $A' = \kappa(A)$, $B' = \kappa(B)$, $C' = \kappa(C)$, $D' = \kappa(D)$ képpontokat és az $\mathbf{x}' = \xi(\mathbf{x})$, $\mathbf{y}' = \xi(\mathbf{y})$, $\mathbf{z}_1' = \xi(\mathbf{z}_1)$, $\mathbf{z}_2' = \xi(\mathbf{z}_2)$ képvektorokat. Világos, hogy ezen vektoroknak éppen az A', B', C', D' kollineáris pontok felelnek meg. Mivel a ξ leképezés lineáris, a képvektorokra $\mathbf{z}_1' = \xi(\lambda_1 \mathbf{x} + \mu_1 \mathbf{y}) = \lambda_1 \mathbf{x}' + \mu_1 \mathbf{y}'$ és $\mathbf{z}_2' = \lambda_2 \mathbf{x}' + \mu_2 \mathbf{y}'$ teljesül. Ily módon a 4.6. Állítás és a 4.7. Definíció alapján fennáll az

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2} = (A'\,B'\,C'\,D')$$

összefüggés. A Papposz–tétel alkalmazásával pedig belátható, hogy κ a sugárnégyesek kettősviszonyát is megtartja. $\square$

A továbbiakban arra kérdésre adunk választ, hogy egy $\overline{\sigma}$–beli kollineációt hány síkbeli pont képe határoz meg egyértelműen. Ehhez szükségünk van az alábbi fogalomra.

4.23. Definíció. A $\overline{\sigma}$ projektív síkon legyenek adott négy pont. Ezekről akkor mondjuk, hogy egy általános helyzetű pontnégyest alkotnak, ha közülük bármelyik három nincs egy egyenesen.

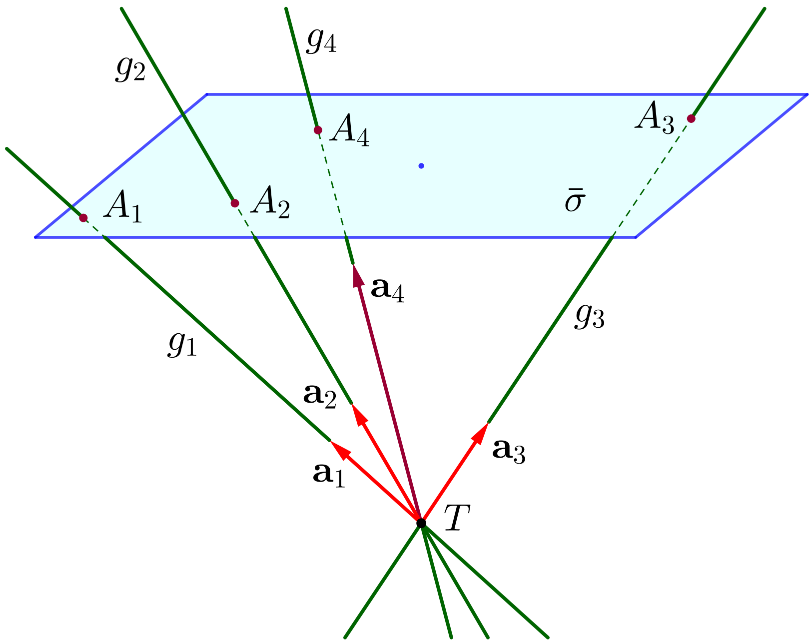
Várható, hogy amennyiben egy kollineáció négy általános helyzetű pontot fixen hagy, akkor az a sík összes pontját fixen hagyja.

4.24. Állítás. *Legyen adva egy $\kappa : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ projektív transzformáció. Ha van a síkon olyan A_1, A_2, A_3, A_4 általános helyzetű pontnégyes, hogy annak elemeit a κ fixen hagyja, akkor a κ azonos az $id_{\overline{\sigma}}$ helybenhagyással.*

Bizonyítás.
Tegyük fel, hogy a κ fixen hagyja az A_1, A_2, A_3, A_4 általános helyzetű pontokat. Az $\mathcal{E}(T)$ sugárnyalábban a pontokhoz rendelt egyenesek legyenek g_1, g_2, g_3 és g_4. A négy pontnak a szabad vektorok $\mathcal{V}$ terében feleljenek meg a $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$, $\mathcal{G}_4$ egydimenziós alterek. Tehát ezen altereknek a $\mathbf{0}$–tól különböző vektorai az A_1, A_2, A_3, A_4 pontokhoz rendelt meghatározó vektorok. (Lásd a 35. ábrát.)

A 4.21. Tétel alapján vegyünk egy olyan $\xi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris izomorfizmust, amely ezt a κ kollineációt indukálja. Világos, hogy $\kappa(A_r) = A_r$ $(r = 1, 2, 3, 4)$ fennállása miatt ez a ξ lineáris transzformáció a $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$, $\mathcal{G}_4$ altereket önmagukba képezi, és emiatt az alterek $\mathbf{0}$–tól különböző vektorai a ξ–nek sajátvektorai valamely c_1, c_2, c_3, c_4 sajátértékekkel.

Rögzítsük az A_4 pontnak az egyik $\mathbf{a}_4$ meghatározó vektorát, vagyis a $\mathcal{G}_4$ altér egyik elemét. Mivel az A_1, A_2, A_3 pontok nincsenek egy egyenesen, a $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$ alterek egy–egy $\mathbf{0}$–tól különböző vektorával alkotott vektorhármas egy bázisát képezi a 3–dimenziós



35. ábra. *A pontokat meghatározó vektorok megválasztása:* $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

$\mathcal{V}$ vektortérnek. Emiatt egyértelműen léteznek olyan $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ vektorok, melyekre $\mathbf{a}_s \in \mathcal{G}_s$ $(s = 1, 2, 3)$ és $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_4$ teljesül.

A fentiek alapján ezek a vektorok a ξ lineáris transzformációnak sajátvektorai a c_r $(r = 1, 2, 3, 4)$ sajátértékekkel, vagyis igaz $\xi(\mathbf{a}_r) = c_r\,\mathbf{a}_r$. Mivel az $\mathbf{a}_4$ vektor a másik három összege, a

$$\xi(\mathbf{a}_4) = \xi(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) = c_1\,\mathbf{a}_1 + c_2\,\mathbf{a}_2 + c_3\,\mathbf{a}_3$$

egyenlőséghez jutunk. Ebből viszont az következik, hogy

$$c_4\,(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) = c_1\,\mathbf{a}_1 + c_2\,\mathbf{a}_2 + c_3\,\mathbf{a}_3$$

Ily módon a

$$(c_4 - c_1)\,\mathbf{a}_1 + (c_4 - c_2)\,\mathbf{a}_2 + (c_4 - c_3)\,\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$$

összefüggést kapjuk. Mivel az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ vektorok lineárisan függetlenek, az egyenletben szereplő együtthatók értéke 0, tehát fennáll $c_4 = c_1 = c_2 = c_3$. Jelölje c a közös sajátértéket. Világos, hogy a fentiek miatt tetszőleges $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorra teljesül $\xi(\mathbf{v}) = c\,\mathbf{v}$. Ez pedig azt jelenti, hogy igaz $\xi = c \cdot id_{\mathcal{V}}$, vagyis ξ az összes alteret önmagába képezi. Ebből pedig már következik, hogy a κ kollineáció azonos az $id_{\bar{\sigma}}$ helybenhagyással. $\square$

A következő tétel bizonyításához is felhasználjuk majd a projektív geometria alaptételét, azaz a 4.21. Tételt.

4.25. Tétel. *A $\overline{\sigma}$ projektív síkon legyenek adva a A_1, A_2, A_3, A_4 és B_1, B_2, B_3, B_4 általános helyzetű pontnégyesek. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan $\kappa : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ projektív transzformáció, amelyre fennáll $\kappa(A_r) = B_r$ $(r = 1, 2, 3, 4)$.*

Bizonyítás.

Ez esetben is felhasználjuk, hogy a $\overline{\sigma}$ sík pontjai és az $\mathcal{E}(T)$ sugárnyaláb egyenesei közötti bijekció alapján a $\mathcal{V}$ vektortér egydimenziós altereit rendeljük a pontokhoz. A sugárnyaláb A_1, A_2, A_3, A_4 és B_1, B_2, B_3, B_4 pontnégyeseknek megfelelő egyenesei legyenek g_1, g_2, g_3, g_4 és h_1, h_2, h_3, h_4. Ezen egyenesek irányvektoraival nyerjük a pontokhoz rendelt egydimenziós altereket, melyeket jelöljön $\mathcal{G}_r$ és $\mathcal{H}_r$ $(r = 1, 2, 3, 4)$.

Rögzítsük az A_4 és B_4 pontok egy-egy meghatározó vektorát, melyeket jelöljön $\mathbf{a}_4$ és $\mathbf{b}_4$. A $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$ alterek egy-egy $\mathbf{0}$–tól különböző vektorát véve egy olyan vektorhármast kapunk, amely a $\mathcal{V}$ vektortérnek bázisa. Ugyanez mondható el a $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ alterekről is. Emiatt egyértelműen léteznek olyan $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ és $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ vektorok, melyekre fennáll $\mathbf{a}_s \in \mathcal{G}_s$ $(s = 1, 2, 3)$ és $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_4$, továbbá $\mathbf{b}_s \in \mathcal{H}_s$ $(s = 1, 2, 3)$ és $\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_4$.

A lineáris algebrából már ismeretes, hogy egyértelműen létezik egy olyan $\xi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris izomorfizmus, amelyre $\xi(\mathbf{a}_1) = \mathbf{b}_1$, $\xi(\mathbf{a}_2) = \mathbf{b}_2$ és $\xi(\mathbf{a}_3) = \mathbf{b}_3$ teljesül. Ekkor egy tetszőleges $\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{a}_1 + v_1\,\mathbf{a}_2 + v_3\,\mathbf{a}_3$ vektor képét a

$$\xi(\mathbf{v}) = v_1\,\mathbf{b}_1 + v_2\,\mathbf{b}_2 + v_3\,\mathbf{b}_3$$

összefüggés adja meg. Ebből pedig az következik, hogy fennáll a

$$\xi(\mathbf{a}_4) = \xi(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_4$$

egyenlőség is. Tehát a pontokhoz rendelt 1–dimenziós alterekre teljesül $\xi(\mathcal{G}_r) = \mathcal{H}_r$ $(r = 1, 2, 3, 4)$. Ezek alapján már világos, hogy a ξ által indukált κ kollineáció az A_1, A_2, A_3, A_4 pontnégyest a B_1, B_2, B_3, B_4 pontnégyesbe képezi.

Végül megmutatjuk, hogy csak egy olyan kollineáció van, amely az első pontnégyest átviszi a másodikba.

Tegyük fel, hogy η egy másik olyan kollineáció, amelyre szintén teljesül $\eta(A_r) = B_r$ $(r = 1, 2, 3, 4)$. Vegyük ennek a projektív transzformációnak az η^{-1} inverzét, amely a második pontnégyest képezi az elsőbe. Ekkor az $\eta^{-1} \circ \kappa$ szorzatleképezés egy olyan kollineációt ad, amely az A_1, A_2, A_3, A_4 pontokat fixen hagyja. A 4.24. Állítás következtében igaz $\eta^{-1} \circ \kappa = id_{\overline{\sigma}}$. Ebből pedig már adódik az

$$\eta = \eta \circ id_{\overline{\sigma}} = \eta \circ (\eta^{-1} \circ \kappa) = (\eta \circ \eta^{-1}) \circ \kappa = id_{\overline{\sigma}} \circ \kappa = \kappa$$

egyenlőség. $\square$

Megjegyzés. A $\overline{\sigma}$ projektív sík koordinátázása során rögzítettünk egy $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ortonormált bázist $\mathcal{V}$–ben. Ennek felhasználásával adódik egy természetes izomorfizmus a $\mathcal{V}$ vektortér és a valós számhármasok $\mathbb{R}^3$ tere között, amely egy tetszőleges $\mathcal{V}$–beli $\mathbf{x} = x_1\,\mathbf{i}+x_1\,\mathbf{j}+x_3\,\mathbf{k}$ vektorhoz az (x_1, x_2, x_3) számhármast rendeli.

Az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek egy természetes bázisát adják az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ számhármasok.

A projektív sík kollineációinak analitikus leírása 3×3–as mátrixokkal

Vegyünk egy $\kappa : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ projektív transzformációt. Tekintsük a $\overline{\sigma}$ projektív sík koordinátázása során rögzített **i**, **j**, **k** bázist $\mathcal{V}$–ben. Legyen $\xi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ egy olyan lineáris izomorfizmus, amelyre igaz, hogy a ξ által indukált projektív transzformáció megegyezik κ–val. A bázisvektorok ξ szerinti képeit fejezzük ki a

$$\begin{aligned}\xi(\mathbf{i}) &= m_{11}\,\mathbf{i} + m_{21}\,\mathbf{j} + m_{31}\,\mathbf{k},\\ \xi(\mathbf{j}) &= m_{12}\,\mathbf{i} + m_{22}\,\mathbf{j} + m_{32}\,\mathbf{k},\\ \xi(\mathbf{k}) &= m_{13}\,\mathbf{i} + m_{23}\,\mathbf{j} + m_{33}\,\mathbf{k}\end{aligned}$$

lineáris kombinációk formájában. Eszerint az m_{rs} $(r, s = 1, 2, 3)$ együtthatókból képzett 3×3–as $\mathbf{M}$ mátrix írja le a ξ lineáris transzformációt az **i**, **j**, **k** bázisra nézve. Mivel a ξ leképezés bijektív, az $\mathbf{M}$ mátrix invertálható. Amennyiben egy $\overline{\sigma}$–beli P pontnak az $\mathbf{x} = x_1\,\mathbf{i} + x_1\,\mathbf{j} + x_3\,\mathbf{k}$ az egyik meghatározó vektora, akkor a $\xi(\mathbf{x})$ képvektornak a $\kappa(P)$ pont felel meg. Ez pedig azt jelenti, hogy a κ kollineáció a sík egy tetszőleges $P\,[x_1, x_2, x_3]$ pontját azon $P'\,[x_1', x_2', x_3']$ pontba képezi, melynek homogén koordinátáira fennáll az

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

összefüggés valamely λ $(\lambda \neq 0)$ szám mellett. A λ szám azért szerepel a κ–t leíró fenti mátrixegyenletben, mivel a homogén koordináta–hármas és a κ–t indukáló lineáris izomorfizmus csak számszorzótól eltekintve egyértelműek. A leírtak alapján igaz a következő kijelentés.

4.26. Állítás. *A homogén pontkoordináták alkalmazása mellett tetszőleges $\kappa : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ kollineáció leírható a (4.1) mátrixegyenlettel.*

Az eddigiek alapján már nem nehéz megmutatni, hogy igaz az alábbi állítás is.

4.27. Állítás. *Legyen adva egy $\mathbf{M}$ 3×3–as invertálható mátrix. Tekintsük azt a $\kappa : \overline{\sigma} \to \overline{\sigma}$ leképezést, amely tetszőleges $\overline{\sigma}$–beli $P\,[x_1,\, x_2,\, x_3]$ ponthoz azt a $P' = \kappa(P)$ pontot rendeli, amelynek $[x_1',\, x_2',\, x_3']$ homogén koordinátáit az $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ összefüggés adja meg. Ez esetben a κ leképezés egy kollineáció.*

Bizonyítás.

Mivel a 3×3–as $\mathbf{M}$ mátrix invertálható, az általa leírt hozzárendelés egy lineáris izomorfizmust ad a valós számhármasok $\mathbb{R}^3$ terén. Evidens, hogy emiatt a projektív síkon vett κ leképezés is bijektív.

Vegyünk a $\overline{\sigma}$ síkban egy e egyenest, amelynek egyik homogén koordináta–hármasa $[u_1, u_2, u_3]$. Eszerint azok a pontok vannak rajta e–n, amelyek koordinátái kielégítik az $u_1\,x_1 + u_2\,x_2 + u_3\,x_3 = 0$ egyenletet. Tekintsük most a mátrixegyenlettel megadott $(v_1,\, v_2,\, v_3) = (u_1,\, u_2,\, u_3) \cdot \mathbf{M}^{-1}$ számhármast. Közvetlen számolással adódik, hogy a e–re eső pontok κ szerinti képeinek koordinátáira teljesül a $v_1\,x_1' + v_2\,x_2' + v_3\,x_3' = 0$ egyenlőség. Emiatt κ az e egyenest abba az e' egynesbe képezi, amelynek $[v_1, v_2, v_3]$ az egyik homogén koordináta–hármasa. Ezzel beláttuk, hogy a κ leképezés egyenestartó is, tehát κ egy kollineáció a $\overline{\sigma}$ síkon. $\square$

5) Másodrendű görbék a projektív síkon

Ezen fejezet tanulmányozása előtt célszerű felidézni az euklideszi sík másodrendű görbéire vonatkozó fogalmakat és a velük kapcsolatos alapvető összefüggéseket.

A projektív másodrendű görbék értelmezése

Vizsgálatainkat egy adott $\overline{\sigma}$ projektív síkban végezzük. A továbbiakban mindvégig feltesszük, hogy a $\overline{\sigma}$ sík már koordinátázva van, azaz értelmeztük a homogén koordinátákat a σ euklideszi síkban vett $(O,\, \mathbf{i},\, \mathbf{j})$ Descartes–féle koordináta–rendszer alapján.

5.1. Definíció. Legyenek adva olyan a_{rs} $(1 \leq r \leq s \leq 3)$ valós számok, amelyek nem mindegyike 0. Az

$$a_{11}\,(x_1)^2 + a_{22}\,(x_2)^2 + a_{33}\,(x_3)^2 + 2\,a_{12}\,x_1\,x_2 + 2\,a_{13}\,x_1\,x_3 + 2\,a_{23}\,x_2\,x_3 = 0 \qquad \text{(HMFE)}$$

egyenlettel leírt $\overline{\sigma}$–beli másodrendű görbén a sík azon pontjainak $\overline{\mathcal{M}}$ halmazát értjük, amelyek homogén koordinátái kielégítik az egyenletet.

Megjegyzés. Egy $\overline{\sigma}$–beli $\overline{\mathcal{M}}$ ponthalmazt akkor mondunk projektív másodrendű görbének, ha vannak olyan a_{rs} $(1 \leq r \leq s \leq 3)$ valós együtthatók, hogy az általuk meghatározott (HMFE) másodfokú egyenletet éppen az $\overline{\mathcal{M}}$ alakzat pontjainak a homogén koordinátái elégítik ki.

Megjegyzés. Amennyiben a fenti (HMFE) másodfokú egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk egy μ $(\mu \neq 0)$ valós számmal, akkor a kapott egyenlet ugyanazt az $\overline{\mathcal{M}}$ alakzatot fogja leírni.

Megjegyzés. *Az alábbiakban a speciális másodfokú egyenletek által leírt másodrendű görbéket vesszük sorra.*

Az $(x_1)^2+(x_2)^2-(x_3)^2 = 0$ egyenletnek megfelelő alakzat megegyezik az O centrumú és 1 sugarú körrel.

Az $(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2 = 0$ egyenletet egyetlen pont homogén koordinátái sem elégítik ki, vagyis a leírt másodrendű görbe a $\emptyset$ üreshalmaz.

Az $(x_1)^2 - (x_2)^2 = 0$ egyenlet átírható az $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$ alakba. Ebből adódik, hogy az általa meghatározott alakzat két egyenes uniójával egyenlő.

Az $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 0$ egyenletet kielégítő nemtriviális számhármasok a $(0, 0, \lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0)$ formában állnak elő. Eszerint a leírt alakzat egyetlen (ideális) pont.

Az $(x_1)^2 = 0$ egyenlet esetében pedig nyilvánvaló, hogy a meghatározott másodrendű görbe egy egyenes.

A másodrendű görbe egyenletének mátrixos alakja

A (HMFE) egyenletben szereplő a_{rs} $(1 \leq r \leq s \leq 3)$ együtthatókból képezni tudunk egy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ szimmetrikus mátrixot, melynek elemeire fennáll $a_{rs} = a_{sr}$. Nem nehéz belátni, hogy a (HMFE) másodfokú egyenlet egyenértékű az $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix felhasználásával nyert

$$\begin{pmatrix} x_1 \, x_2 \, x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

összefüggéssel. A továbbiakban az **A**–t az $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbéhez rendelt egyik kvadratikus mátrixnak nevezzük.

Az (HMFE) egyenletet tömörebb formában tudjuk leírni azáltal is, hogy alkalmazzuk a szummációs jelet: $\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a_{rs}\, x_r\, x_s = 0.$

A euklideszi sík másodrendű görbéinek osztályozása

A σ euklideszi síkon legyen adott egy $\mathcal{M}$ másodrendű görbe, amelyet az

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, x\, y + a_{22}\, y^2 + 2\, b_1\, x + 2\, b_2\, y + d = 0 \qquad \text{(MFE)}$$

egyenlet ír le. Könnyen belátható, hogy a fenti összefüggés egyenértékű az

$$\begin{pmatrix} x \; y \; 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

mátrixegyenlettel.

Emlékezzünk rá, hogy megfelelő koordináta–transzformáció alkalmazásával az $\mathcal{M}$ másodrendű görbe egyenlete úgynevezett kanonikus alakra (a 9 speciális másodfokú egyenlet egyikére) hozható. Ennek következtében az $\mathcal{M}$ görbe csakis az alábbi alakzatok egyike lehet: *ellipszis, hiperbola, parabola, két metsző egyenes uniója, két párhuzamos egyenes uniója, egyetlen egyenes, egyetlen pont, üreshalmaz.*

Megjegyzés. A σ síkbeli koordináta–transzformációkkal igazolható, hogy az (MFE) egyenletben szereplő együtthatók 3×3–as mátrixának determinánsa vagy a sík összes koordináta–rendszerében 0, vagy pedig egyikben sem 0.

5.2. Definíció. Az (MFE) egyenlettel leírt $\mathcal{M}$ másodrendű görbét közönségesnek mondjuk, ha $\mathcal{M} \neq \emptyset$ és az egyenlet együtthatóiból képzett 3×3–as $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & d \end{pmatrix}$ mátrix determinánsa nem 0.

Megjegyzés. A másodrendű görbék speciális egyenleteit véve belátható, hogy az euklideszi síkban a közönséges másodrendű görbék az ellipszisek, a hiperbolák és a parabolák.

Az euklideszi sík másodrendű görbéin megadunk egy olyan osztályozást, amely a másodfokú tagok együtthatóiból nyert 2×2–es mátrix $A_{33} = a_{11}\, a_{22} - (a_{12})^2$ determinánsának előjelén alapul. A definícióban szereplő elnevezések megfelelnek a 2.16. Következményben leírtaknak.

5.3. Definíció. Az (MFE) egyenlettel leírt σ–beli $\mathcal{M}$ másodrendű görbét $A_{33} > 0$ esetén elliptikusnak, $A_{33} < 0$ esetén hiperbolikusnak, $A_{33} = 0$ esetén pedig parabolikusnak nevezzük.

A euklideszi sík másodrendű görbéinek projektív kiterjesztése

A koordinátázott σ euklideszi síkon vegyünk egy $\mathcal{M}$ másodrendű görbét, melyet az (MFE) egyenlet ír le. Vegyük a σ kibővítésével nyert $\overline{\sigma}$ projektív síkot és azon a homogén pontkoordinátákat.

Vegyük észre, hogy az $\mathcal{M}$ alakzatot a homogén koordinátákra vonatkozóan az

$$a_{11}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + 2\, a_{12}\,\frac{x_1}{x_3}\,\frac{x_2}{x_3} + a_{22}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 + 2\, b_1\,\frac{x_1}{x_3} + 2\, b_2\,\frac{x_2}{x_3} + d = 0, \qquad x_3 \neq 0$$

összefüggéssel lehet leírni. Ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk az $(x_3)^2$ értékkel, akkor lehetséges, hogy az így nyert másodfokú egyenlet az $\mathcal{M}$–nél egy bővebb ponthalmazt határoz meg a $\overline{\sigma}$ projektív síkon.

5.4. Definíció. A homogén koordinátákra vonatkozó
$a_{11}\,(x_1)^2 + a_{22}\,(x_2)^2 + d\,(x_3)^2 + 2\, a_{12}\, x_1\, x_2 + 2\, b_1\, x_1\, x_3 + 2\, b_2\, x_2\, x_3 = 0$
egyenlet által leírt $\overline{\sigma}$–beli $\overline{\mathcal{M}}$ alakzatot az $\mathcal{M}$ kiterjesztésével nyert projektív másodrendű görbének mondjuk. (Az $\overline{\mathcal{M}}$–et szokás még az euklideszi síkon vett $\mathcal{M}$ másodrendű görbe projektív lezárásának is nevezni.)

Megjegyzés. Evidens, hogy a $\overline{\mathcal{M}}$ alakzat a $\overline{\sigma}$ sík azon pontjainak halmaza, amelyek homogén koordinátái kielégítik az egyenletet.

Megjegyzés. A fenti definícióval kapcsolatban vegyük észre, hogy az $\overline{\mathcal{M}}$–nek megfelelő 3×3–as **A** szimmetrikus mátrix elemeire fennáll $a_{13} = b_1$, $a_{23} = b_2$ és $a_{33} = d$.

Megjegyzés. Könnyű belátni, hogy az 5.4. Definícióban szereplő $\mathcal{M}$, $\overline{\mathcal{M}}$ alakzatokra teljesülnek az $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} \cap \sigma$ és $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cup (i_\sigma \cap \overline{\mathcal{M}})$ összefüggések.

A következő állítás arról szól, hogy a σ euklideszi sík $\mathcal{M}$ másodrendű görbéjének projektív lezárásánál hány ideális ponttal bővül ki a görbe. Ennek kimondásához felhasználjuk az 5.3. Definícióban leírt elnevezéseket.

5.5. Állítás. *A σ euklideszi síkon vegyük az* (MFE) *egyenlettel leírt $\mathcal{M}$ másodrendű görbét. Az $\mathcal{M}$ kiterjesztésével nyert $\overline{\mathcal{M}}$ projektív másodrendű görbére igazak az alábbi kijelentések.*
(1) Ha az $\mathcal{M}$ görbe elliptikus, akkor az i_σ ideális egyenessel fennáll $\overline{\mathcal{M}} \cap i_\sigma = \emptyset$.
(2) Ha az $\mathcal{M}$ görbe hiperbolikus, akkor az $\overline{\mathcal{M}}$ és az i_σ közös pontjainak száma 2.
(3) Ha az $\mathcal{M}$ görbe parabolikus, akkor az $\overline{\mathcal{M}}$ és az i_σ közös pontjainak száma 1.
Bizonyítás.
Mint ismeretes, az $\overline{\mathcal{M}}$ görbe egyenlete

$$a_{11}\,(x_1)^2 + a_{22}\,(x_2)^2 + d\,(x_3)^2 + 2\, a_{12}\, x_1\, x_2 + 2\, b_1\, x_1\, x_3 + 2\, b_2\, x_2\, x_3 = 0\,.$$

A $\overline{\sigma}$ projektív síkon az i_σ ideális egyenest az $x_3 = 0$ egyenlet írja le a homogén pontkoordinátákra nézve. Ennek következtében azok az ideális pontok elemei a $\overline{\mathcal{M}} \cap i_\sigma$ metszetnek, amelyek homogén koordinátái kielégítik a

$$a_{11}\,(x_1)^2 + 2\,a_{12}\,x_1\,x_2 + a_{22}\,(x_2)^2 = 0 \tag{5.1}$$

egyenletet. Azt kell megvizsgálni, hogy ennek a másodfokú egyenletnek számszorzótól eltekintve hány olyan megoldó számpárja van, amely különbözik a $x_1 = 0$ és $x_2 = 0$ triviális megoldástól. Ugyanis, a $[0, 0, 0]$ számhármas nem tartozik a $\overline{\sigma}$–beli pontok homogén koordinátahármasai közé.

Azt az esetet tárgyaljuk, amikor az a_{11} *másodfokú együttható nem* 0.

Vegyük észre, hogy amennyiben az (5.1) egyenletet megoldó egyik számpárban $x_2 = 0$ állna fenn, akkor abból $a_{11} \neq 0$ miatt $x_1 = 0$ következne. Emiatt feltehetjük, hogy $x_2 \neq 0$. Szorozzuk meg az (5.1) egyenletet az $\dfrac{1}{(x_2)^2}$ értékkel és vezessük be a $z = \dfrac{x_1}{x_2}$ jelölést. Ezáltal a $z = \dfrac{x_1}{x_2}$ hányadosra az

$$a_{11}\,z^2 + 2\,a_{12}\,z + a_{22} = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek a diszkriminánsára fennáll
$D = 4\,(a_{12})^2 - 4\,a_{11}\,a_{22} = -4\,A_{33}$.

Ebből már adódik, hogy a másodfokú egyenletnek akkor van két megoldása, ha az $\mathcal{M}$ görbe hiperbolikus, vagyis $A_{33} < 0$. Ha a z_1, z_2 valós számok az egyenlet gyökei, akkor a $[z_1, 1, 0]$ és $[z_2, 1, 0]$ koordinátájú pontok alkotják a $\overline{\mathcal{M}} \cap i_\sigma$ metszetet.

Amennyiben igaz $A_{33} = 0$, akkor a másodfokú egyenletnek csak egyetlen megoldása van, melyet most jelöljön z_0. Emiatt a $\overline{\mathcal{M}} \cap i_\sigma$ metszet egyetlen pont, amelynek egyik homogén koordináta–hármasa $[z_0, 1, 0]$.

Ha pedig az $\mathcal{M}$ görbe elliptikus, azaz $A_{33} > 0$, akkor a másodfokú egyenletnek nincs valós megoldása. Ez pedig azt jelenti, hogy fennáll $\overline{\mathcal{M}} \cap i_\sigma = \emptyset$, vagyis $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$ teljesül.

Azt az esetet tárgyaljuk, amikor az a_{22} *együttható nem* 0.

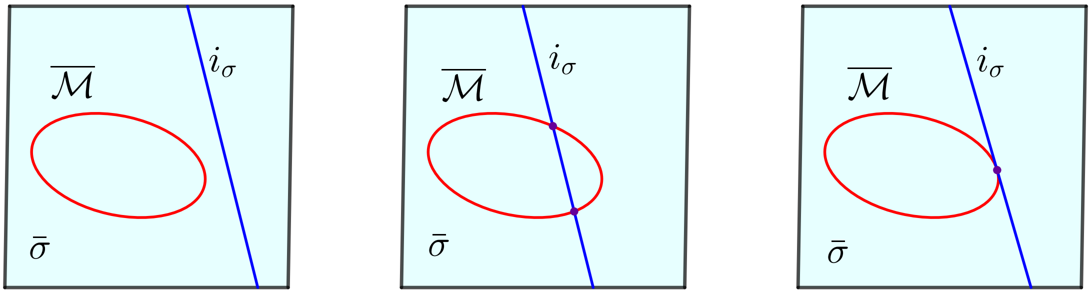
Az (5.1) egyenletet ekkor megszorozhatjuk az $\dfrac{1}{(x_1)^2}$ értékkel, és a fenti eljárást követve meg lehet mutatni, hogy teljesülnek az állításban szereplő (1), (2), (3) kijelentések.

Végül tekintsük azt az esetet, amikor $a_{11} = 0$ *és* $a_{22} = 0$.

Mivel az (MFE) egyenletben legalább az egyik másodfokú egyenlet nem 0, ezúttal fennáll $a_{12} \neq 0$ és $A_{33} < 0$, tehát az $\mathcal{M}$ görbe hiperbolikus. Az (5.1) egyenlet a $2\,a_{12}\,x_1\,x_2 = 0$ alakra egyszerűsödik, amelynek számszorzótól eltekintve az $(1, 0)$ és $(0, 1)$ számpárok a nemtriviális megoldásai. Ennek következtében az $\overline{\mathcal{M}} \cap i_\sigma$ metszetet az a két ideális pont alkotja, melyek homogén koordinátái $[1, 0, 0]$ és $[0, 1, 0]$.

Ezzel igazoltuk, hogy az állításban szereplő kijelentések bármely esetben teljesülnek.
□

Megjegyzés. Tekintsük a σ euklideszi síkon az $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ egyenlettel leírt $\mathcal{M}$ hiperbolát. Az $\mathcal{M}$ projektív kiterjesztésével nyert $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbét homogén koordinátákban a $b^2\,(x_1)^2 - a^2\,(x_2)^2 - a^2\,b^2\,(x_3)^2 = 0$ egyenlet írja le. Könnyen kiszámolható,



36. ábra. *Az ellipszis, a hiperbola és a parabola kiterjesztésének szemléltetése.*

hogy az $I_1\,[a,\, b,\, 0]$, $I_2\,[-a,\, b,\, 0]$ pontok lesznek az $\overline{\mathcal{M}}$ és az i_σ ideális egyenes közös pontjai. Vegyük észre, hogy az I_1, I_2 pontok azonosak a hiperbola aszimptotáihoz rendelt ideális pontokkal.

Megjegyzés. Vegyük a σ euklideszi síkon az $x^2 - 2\,p\,y = 0$ egyenlettel leírt $\mathcal{M}$ parabolát. Ezen másodrendű görbe projektív lezárásának homogén koordinátás egyenlete $(x_1)^2 - 2\,p\,x_2\,x_3 = 0$. Ebből már látszik, hogy $\overline{\mathcal{M}}$ görbének egyetlen közös pontja van az i_σ ideális egyenessel, és ennek koordinátái $[0, 1, 0]$. Világos, hogy ez a pont megegyezik a parabola tengelyéhez rendelt ideális ponttal.

Megjegyzés. A hiperbola és a parabola projektív kiterjesztésével egy olyan záródó görbét kapunk a $\overline{\sigma}$ síkon, amely topológiai szemszögből nézve egy körszerű alakzat. Erre utal a mellékelt 36. ábra is.

A projektív sík másodrendű görbéinek egy osztályozása

Felvetődik a kérdés, hogy $\overline{\sigma}$ projektív síkon melyek azok a másodrendű görbék, amelyeket nem egy σ–beli másodrendű görbének a projektív lezárásával kapunk meg.

Könnyű belátni, hogy a (HMFE) egyenlettel leírt $\overline{\mathcal{M}}$ projektív másodrendű görbe pontosan akkor nem jön létre egy σ–beli másodrendű görbe kiterjesztéseként, ha az együtthatóira fennáll $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$ és $a_{22} = 0$. Ebben az esetben a (HMFE) egyenlet az

$$a_{33}\,(x_3)^2 + 2\,a_{13}\,x_1\,x_3 + 2\,a_{23}\,x_2\,x_3 = 0$$

alakra egyszerűsödik, ahol $(a_{13})^2 + (a_{23})^2 + (a_{33})^2 > 0$. Ez viszont felírható az

$$x_3\,(2\,a_{13}\,x_1 + 2\,a_{23}\,x_2 + a_{33}\,x_3) = 0$$

szorzat formában is. Ily módon azt kapjuk, hogy az $\overline{\mathcal{M}}$ vagy az $x_3 = 0$ egyenletű i_σ ideális egyenes és egy másik egyenes uniójával azonos, vagy pedig maga az i_σ ideális egyenes.

Eddigi eredményeinkből és a fenti megállapításból már következik az alábbi tétel, amely a projektív másodrendű görbékre ad meg egy osztályozást.

5.6. Tétel. *A $\overline{\sigma}$ projektív síkon vett tetszőleges $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbe megegyezik az alábbi alakzatok egyikével:* egy σ–beli ellipszis, egy σ–beli hiperbola projektív lezárása, egy σ–beli parabola projektív lezárása, két egyenes uniója, egyetlen egyenes, egyetlen pont, üreshalmaz.

Az öt ponton áthaladó másodrendű görbe létezése

Feltehető az a kérdés is, miszerint vannak-e előnyei annak, hogy a σ euklideszi síkot a párhuzamos egyenesosztályokhoz rendelt ideális pontokkal kibővítettük a $\overline{\sigma}$ projektív síkká és bevezettük a homogén koordinátákat. Erre adunk most egy igenlő választ.

Az alábbi tétel azt mondja ki, hogy amennyiben a síkon veszünk öt pontot, akkor van legalább egy olyan másodrendű görbe, amely mind az öt ponton áthalad. A tétel bizonyítását nagyban megkönnyíti, hogy alkalmazhatjuk a homogén pontkoordinátákat.

5.7. Tétel. *A $\overline{\sigma}$ projektív síkon legyenek adva a $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5$ pontok. Ekkor van olyan $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbe, amely tartalmazza a P_r $(r = 1, \ldots, 5)$ pontokat.*

Bizonyítás.

Rögzítsük a P_r $(r = 1, \ldots, 5)$ pontok egy–egy $[y_{r1}, y_{r2}, y_{r3}]$ homogén koordináta–hármasát. A projektív másodrendű görbét leíró (HMFE) egyenletben 6 független együttható szerepel, nevezetesen $a_{11},\ a_{22},\ a_{33}$ és $a_{12},\ a_{13},\ a_{23}$. Evidens, hogy a (HMFE) egyenlettel leírt másodrendű görbe, akkor megy át a P_r $(r = 1, \ldots, 5)$ pontokon, ha ezen együtthatókra fennállnak az

$$(y_{r1})^2\, a_{11} + (y_{r2})^2\, a_{22} + (y_{r3})^2\, a_{33} + (2\, y_{r1}\, y_{r2})\, a_{12} + (2\, y_{r1}\, y_{r3})\, a_{13} + (2\, y_{r2}\, y_{r3})\, a_{23} = 0$$

$(r = 1, \ldots, 5)$ összefüggések. Ezeket tekintsük az $a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{23}$ ismeretlenekre felírt egyenleteknek. Ily módon egy 5 egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszerhez jutunk, amelyben 6 az ismeretlenek száma. Az egyenletrendszert fel lehet írni az alábbi mátrixegyenlet alakjában is:

$$\begin{pmatrix} (y_{11})^2 & (y_{12})^2 & (y_{13})^2 & 2\, y_{11}\, y_{12} & 2\, y_{11}\, y_{13} & 2\, y_{12}\, y_{13} \\ (y_{21})^2 & (y_{22})^2 & (y_{23})^2 & 2\, y_{21}\, y_{22} & 2\, y_{21}\, y_{23} & 2\, y_{22}\, y_{23} \\ (y_{31})^2 & (y_{32})^2 & (y_{33})^2 & 2\, y_{31}\, y_{32} & 2\, y_{31}\, y_{33} & 2\, y_{32}\, y_{23} \\ (y_{41})^2 & (y_{42})^2 & (y_{43})^2 & 2\, y_{41}\, y_{42} & 2\, y_{41}\, y_{43} & 2\, y_{42}\, y_{43} \\ (y_{51})^2 & (y_{52})^2 & (y_{53})^2 & 2\, y_{51}\, y_{52} & 2\, y_{51}\, y_{53} & 2\, y_{52}\, y_{53} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Az Algebrából ismeretes, hogy az egyenletrendszert megoldó számhatosok egy olyan $\mathcal{H}$ alteret képeznek az $\mathbb{R}^6$ vektortérben, melynek dimenziójára fennáll $\dim \mathcal{H} \geq 6 - 5$, vagyis $\dim \mathcal{H} \geq 1$. Ez pedig azt jelenti, hogy a fenti egyenletrendszernek van nemtriviális (azaz nem csupa 0–ból álló) megoldó számhatosa.

Ha veszünk egy megoldó $a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{23}$ számhatost, akkor az abból nyert (HMFE) egyenlet egy olyan $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbét ír le a $\overline{\sigma}$ síkon, amely mind az öt ponton áthalad. $\square$

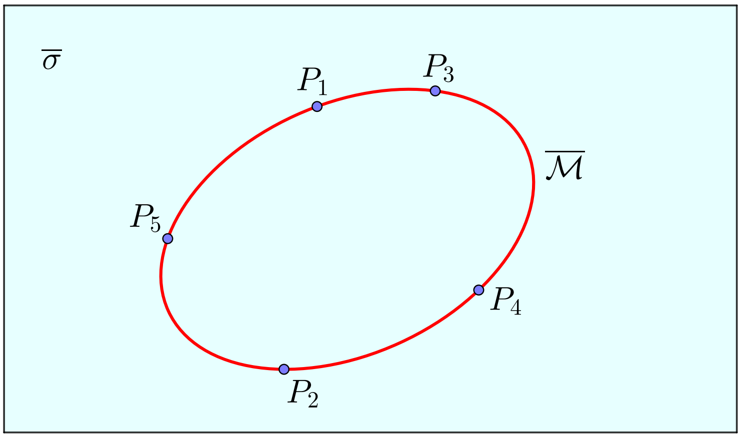
Megjegyzés. Az előző tétel bizonyításában szereplő homogén lineáris egyenletrendszer mátrixa egy olyan 5×6–os mátrix, melyet a P_r $(r = 1, \ldots, 5)$ pontok rögzített $[y_{r1}, y_{r2}, y_{r3}]$ homogén koordinátáiból nyerünk. Amennyiben ezen mátrix rangja 5, akkor a megoldó számhatosok $\mathcal{H}$ altere 1–dimenzós, vagyis a megoldó számhatosok egymás számszorosai, amelyek ugyanazt a másodrendű görbét eredményezik. Ez esetben tehát egyértelműen létezik olyan másodrendű görbe, amely mind az öt ponton áthalad.

Megjegyzés. Bizonyítható, hogy az egyenletrendszer együtthatóiból nyert 5×6–os mátrix rangja csak akkor nem 5, ha a megadott öt pontból (legalább) négy egy egyenesre esik.

Az 5.7. Tétel akkor is érvényben marad, ha mind az öt pont közönséges, azaz rajta vannak a σ euklideszi síkon. Emiatt igaz az alábbi kijelentés.

5.8. Állítás. *A σ euklideszi síkon legyen adva öt pont P_1, P_2, P_3, P_4 és P_5. Ekkor van olyan $\mathcal{M}$ másodrendű görbe, amely mind az öt ponton áthalad.*

Megjegyzés. Korábbi eredményeinkből már következik, hogy amennyiben a σ euklideszi síkon megadott P_r $(r = 1, \ldots, 5)$ pontok között nincs három kollineáris pont, akkor a rajtuk áthaladó $\mathcal{M}$ másodrendű görbe csakis közönséges lehet. Ez azt jelenti, hogy az $\mathcal{M}$ görbe vagy egy ellipszis, vagy egy hiperbola, vagy pedig egy parabola.



37. ábra. *A sík öt pontjával meghatározott másodrendű görbe.*

Az elfajuló másodrendű görbék a projektív síkon

5.9. Definíció. A $\overline{\sigma}$ projektív síkon a (HMFE) másodfokú egyenlettel leírt $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbét elfajulónak mondjuk, ha az együtthatókból képzett $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix determinánsára fennáll $det\,\mathbf{A} = 0$.

Megjegyzés. Az algebrai ismeretek alapján evidens, hogy amennyiben a 3×3–as $\mathbf{A}$ mátrix determinánsára $det\,\mathbf{A} = 0$ teljesül, akkor a $z_1,\ z_2,\ z_3$ ismeretlenekre felírt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Ha veszünk egy nemtriviális megoldó számhármast és az annak megfelelő $S\,[z_1,\ z_2,\ z_3]$ pontot, akkor az S nyilván eleme az elfajuló $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbének. Ebből már következik, hogy az elfajuló másodrendű görbe nem lehet üreshalmaz.

5.10. Definíció. A $\overline{\sigma}$ projektív síkon legyen adott egy $\overline{\mathcal{M}}$ elfajuló másodrendű görbe, melyet a (HMFE) egyenlet ír le. Az olyan $\overline{\sigma}$–beli S pontot, melynek homogén koordinátái megoldják a fenti lineáris egyenletrendszert, az $\overline{\mathcal{M}}$ szinguláris pontjának mondjuk.

Az eddigi eredmények alapján már igazolható az alábbi kijelentés.

5.11. Állítás. *A $\overline{\sigma}$ projektív síkon vett $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbe elfajuló akkor és csak akkor, ha az $\overline{\mathcal{M}}$ vagy két egyenes uniója, vagy egyetlen egyenes, vagy pedig egyetlen pont.*

Megjegyzés. Amennyiben az $\overline{\mathcal{M}}$ elfajuló másodrendű görbe két egyenes uniójával azonos, akkor a két egyenes metszéspontja adja az $\overline{\mathcal{M}}$ egyetlen szinguláris pontját.

Ha az $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbe egyetlen egyenes, akkor a $\overline{\mathcal{M}}$ összes pontja szinguláris.

A közönséges projektív kúpszelet

5.12. Definíció. A $\overline{\sigma}$ projektív síkon az (HMFE) másodfokú egyenlettel leírt $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbét közönséges projektív kúpszeletnek nevezzük, ha $\overline{\mathcal{M}} \neq \emptyset$ és az együtthatókból képzett $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix determinánsára $det\,\mathbf{A} \neq 0$ teljesül.

Az 5.6. Tételből és az 5.11. Állításból már következik, hogy igaz az alábbi kijelentés.

5.13. Tétel. *A $\overline{\sigma}$ síkon vett $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbe egy közönséges projektív kúpszelet akkor és csak akkor, ha az $\overline{\mathcal{M}}$ vagy egy σ–beli ellipszis, vagy egy σ–beli hiperbola projektív lezárása, vagy pedig egy σ–beli parabola projektív lezárása.*

Megjegyzés. Ismeretes, hogy amennyiben az euklideszi térben egy forgáskúpot olyan síkkal metszünk el, amely nem megy át a forgáskúp csúcsán, akkor a kimetszett alakzat vagy egy ellipszis, vagy egy hiperbola, vagy pedig egy parabola lesz. Ez a tény indokolja az előbbi definícióban a *közönséges projektív kúpszelet* elnevezést.

Konjugált pontok egy közönséges projektív kúpszeletre nézve

5.14. Definíció. A $\overline{\sigma}$ projektív síkon legyen adva egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszelet, amelyet a $\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a_{rs}\, x_r\, x_s = 0$ egyenlet ír le, továbbá a $P\,[y_1,\, y_2,\, y_3]$, $Q\,[z_1,\, z_2,\, z_3]$ pontok. Azt mondjuk, hogy az $\overline{\mathcal{M}}$–re vonatkozóan a P pont konjugált a Q ponthoz, ha a pontok homogén koordinátáival fennáll a $\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a_{rs}\, y_r\, z_s = 0$ összefüggés.

Megjegyzés. A koordináta–transzformációval kapcsolatos összefüggések alapján be lehet bizonyítani, hogy a konjugáltság fenti értelmezése nem függ a σ euklideszi sík $(O,\, \mathbf{i},\, \mathbf{j})$ Descartes–féle koordináta–rendszerének megválasztásától. (Későbbi eredményeink is igazolják majd ezt a kijelentést.)

Amennyiben a $\overline{\sigma}$ sík P pontja konjugált a Q ponthoz az $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszeletre nézve, akkor ezt a továbbiakban a $P \sim_{\overline{\mathcal{M}}} Q$ szimbólummal jelöljük.
Megjegyzés. Mint ismeretes, az $\overline{\mathcal{M}}$–et leíró egyenlet együtthatóira teljesül $a_{rs} = a_{sr}$ $(r, s = 1, 2, 3)$. Az 5.14. Definíció alapján nyilvánvaló, hogy igazak az alábbi kijelentések.
(1) A $\overline{\sigma}$ projektív sík egy P pontja konjugált önmagához az $\overline{\mathcal{M}}$–re nézve akkor és csak akkor, ha fennáll $P \in \overline{\mathcal{M}}$.
(2) Ha $P \sim_{\overline{\mathcal{M}}} Q$ teljesül, akkor $Q \sim_{\overline{\mathcal{M}}} P$ is igaz.

A szokásoknak megfelelően egy valós elemű $\mathbf{M}$ mátrix transzponáltját $\mathbf{M}^T$ fogja jelölni. Ismeretes, hogy amennyiben valamely $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ mátrixoknak értelmezhető az $\mathbf{MN}$ szorzata, akkor a szorzatmátrix transzponáltjára fennáll $(\mathbf{MN})^T = \mathbf{N}^T\mathbf{M}^T$.

Állapodjunk meg abban, hogy amennyiben egy P pontnak az $(y_1,\, y_2,\, y_3)$ számhármas az egyik homogén koordináta–hármasa, akkor a koordinátákból képzett 3×1–es oszlopmátrixot $\mathbf{y}$ fogja jelölni. Ily módon tehát teljesül $\mathbf{y}^T = (y_1,\, y_2,\, y_3)$.

Megjegyzés. A $\overline{\sigma}$ síkon legyen adott egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszelet, melyet a (HMFE) egyenlet ír le. Tekintsük az egyenlet együtthatóiból nyert $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrixot. Vegyük a $\overline{\sigma}$ síkon a $P\,[y_1,\, y_2,\, y_3]$ és $Q\,[z_1,\, z_2,\, z_3]$ pontokat.

Evidens, hogy ez esetben az $\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{z}$ szorzat egyetlen számot ad. A fentiek alapján nem nehéz belátni, hogy $\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{z}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$ teljesül.

Nyilvánvaló, hogy a P, Q pontok konjugáltak egymással az $\overline{\mathcal{M}}$–re vonatkozóan pontosan akkor, ha fennáll $\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{z} = 0$.

Az alábbi kijelentés azt mondja ki, hogy egy rögzített ponthoz konjugált pontok egy egyenesen vannak.
5.15. Állítás. *A $\overline{\sigma}$ projektív síkon legyen adott egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszelet, melyet a* (HMFE) *egyenlet ír le, továbbá egy $P\,[y_1,\, y_2,\, y_3]$ pont. Az $\overline{\mathcal{M}}$–re vonatkozóan a P–hez konjugált pontok egy egyenest alkotnak, amelynek (az egyik) homogén koordináta–hármasát az*

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

összefüggéssel nyert $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ számhármas adja.
Bizonyítás.
Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa nem 0, az $(u_1,\, u_2,\, u_3)$ számhármas legalább egy eleme különbözik 0–tól. Vegyünk a $\overline{\sigma}$ projektív síkon egy tetszőleges R pontot, melynek egyik

homogén koordináta–hármasa $[x_1, x_2, x_3]$. Ez az R pont konjugált a P ponthoz az $\overline{\mathcal{M}}$ kúpszeletre nézve, ha fennáll az $\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a_{rs}\, x_r\, y_s = 0$ egyenlőség. Vegyük észre, hogy ez az összefüggés felírható az

$$(x_1,\, x_2,\, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$$

mátrixos alakban. Az $\mathbf{A}$ mátrix és az $\mathbf{y}$ oszlopmátrix szorzata megegyezik az $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ oszlopmátrixszal. A mátrixegyenletből adódik, hogy az R pont pontosan akkor konjugált a P–hez, ha fennáll $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{u} = 0$, vagyis ha R koordinátái kielégítik az

$$u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + u_3\, x_3 = 0$$

egyenletet. Ez pedig azt az egyenest írja le a $\overline{\sigma}$ síkban, melynek $[u_1, u_2, u_3]$ az egyik homogén koordináta–hármasa. □

Az előző állítás ismeretében be lehet bevezetni egy új fogalmat.

5.16. Definíció. A $\overline{\sigma}$ projektív síkon legyen adott egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszelet és egy P pont. Azt az egyenest, amelyet a P–hez konjugált pontok alkotnak, a P pont $\overline{\mathcal{M}}$–re vonatkozó polárisának nevezzük.

Megjegyzés. Mivel a közönséges projektív kúpszeletnek megfelelő 3×3–as $\mathbf{A}$ mátrixra $det\, \mathbf{A} \neq 0$ teljesül, az 5.15. Állításból már adódik, hogy különböző $\overline{\sigma}$–beli pontoknak az $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszeletre vonatkozó polárisai különbözőek.

Ugyancsak az 5.15. Állításból következik az alábbi megállapítás.

5.17. Következmény. *A $\overline{\sigma}$ síkon legyen adott egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszeletet, melyet a* (HMFE) *egyenlet ír le, továbbá egy $g\,[u_1,\, u_2,\, u_3]$ egyenes. Ekkor egyetlen olyan $\overline{\sigma}$–beli pont van, amelyhez a g egyenes összes pontja konjugált. Ezen pontnak az $(y_1, y_2, y_3) = (u_1, u_2, u_3) \cdot (\mathbf{A}^{-1})^T$ számhármas az egyik homogén koordináta–hármasa.*

5.18. Definíció. A $\overline{\sigma}$ síkon legyen adott egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszelet és egy g egyenes. Azt a pontot, amelyhez a g összes pontja konjugált, a g egyenes $\overline{\mathcal{M}}$–re vonatkozó pólusának mondjuk.

A konjugáltság geometriai jelentése

A továbbiakban az összefüggéseket mátrixegyenletek formájában fogjuk leírni a könnyebb áttekinthetőség érdekében. Tekintsünk a $\overline{\sigma}$ síkon egy P pontot, amelynek egyik homogén koordináta–hármasa legyen $[y_1, y_2, y_3]$. Mint ismeretes, ez azt jelenti, hogy a P pont egyik meghatározó vektora az $\mathbf{y} = y_1\,\mathbf{i} + y_2\,\mathbf{j} + y_3\,\mathbf{k}$ vektor. Állapodjunk meg abban, hogy a továbbiakban $\mathbf{y}$ nemcsak a meghatározó vektort, hanem a koordinátákból képzett $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ oszlopmátrixot is jelölni fogja.

Az alábbi tétel arra mutat rá, hogy ha vesszük a projektív kúpszelet egy pontját, akkor a ponton áthaladó egyenesek között kitüntetett szerepet játszik a pont polárisa.

5.19. Tétel. *A $\overline{\sigma}$ síkon legyen adott egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges közönséges projektív kúpszelet és azon egy P pont. A P pontnak az $\overline{\mathcal{M}}$–re vonatkozó polárisát jelölje p. Ekkor igazak az alábbi kijelentések.*

(1) Teljesül az $\overline{\mathcal{M}} \cap p = \{\, P \,\}$ összefüggés.

(2) Ha egy $\overline{\sigma}$–beli g egyenes illeszkedik a P pontra és fennáll $g \neq p$, akkor a g és az $\overline{\mathcal{M}}$ közös pontjainak száma 2.

Bizonyítás.

Az $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges kúpszeletet írja az $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ egyenlet az $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3)$ pontkoordinátákra nézve. A másodrendű görbe P pontjának egyik homogén homogén koordinátahármasa legyen $[y_1, y_2, y_3]$. Az ennek megfelelő meghatározó vektort és az $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ oszlopmátrixot jelölje $\mathbf{y}$.

(1) *Az indirekt bizonyítás módszerét alkalmazzuk.*

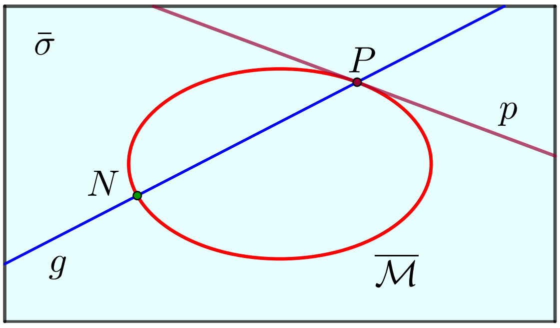
Tegyük fel, hogy a P pont p polárisának van egy további $Q[z_1, z_2, z_3]$ közös pontja az $\overline{\mathcal{M}}$ kúpszelettel. Mivel P és Q rajta vannak az $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbén, fennáll $\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = 0$ és $\mathbf{z}^T\mathbf{A}\mathbf{z} = 0$. Emellett P és Q konjugáltak egymáshoz az $\overline{\mathcal{M}}$–re nézve, ami azt jelenti, hogy teljesül $\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{z} = 0$. Tekintsük a $p = \langle P, Q \rangle$ egyenes egy tetszőleges R pontját. Ismeretes, hogy az R–nek egy meghatározó vektora előáll a $\lambda\,\mathbf{y} + \mu\,\mathbf{z}$ alakban valamely λ, μ együtthatókkal. A koordinátákból képzett oszlopmátrixot véve azt kapjuk, hogy a három fenti egyenlőség következtében fennáll a

$$(\lambda\,\mathbf{y} + \mu\,\mathbf{z})^T\mathbf{A}(\lambda\,\mathbf{y} + \mu\,\mathbf{z}) = \lambda^2\,(\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y}) + 2\,\lambda\,\mu\,(\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{z}) + \mu^2\,(\mathbf{z}^T\mathbf{A}\mathbf{z}) = 0$$

összefüggés. Eszerint a p poláris bármely pontja rajta van az $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbén, vagyis $\overline{\mathcal{M}}$ tartalmaz egy egyenest. Ez viszont ellentmond az 5.13. Tételnek, mivel aszerint a $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszelet nem tartalmazhat egyenest.

Tehát a p polárisnak a P ponton kívül már nincs további közös pontja az $\overline{\mathcal{M}}$ másodrendű görbével.

(2) Vegyünk a síkban egy olyan a P pontra illeszkedő g egyenest, amely különbözik a p poláristól. Legyen a $Q[z_1, z_2, z_3]$ pont a g–nek egy további rögzített pontja. Ekkor a g pontjainak a meghatározó vektora előállnak a $\lambda\,\mathbf{y} + \mu\,\mathbf{z}$ alakban. A g egyenes λ, μ együtthatóknak megfelelő pontja akkor van rajta a másodrendű görbén, ha az együtthatókkal



38. ábra. *Szemléltető ábra az 5.19. Tételhez: a P pont polárisa a p egyenes.*

fennáll a $(\lambda\,\mathbf{y}+\mu\,\mathbf{z})^T\mathbf{A}(\lambda\,\mathbf{y}+\mu\,\mathbf{z})=0$ összefüggés. Ezt kifejtve a

$$\lambda^2\,(\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y})+2\,\lambda\,\mu\,(\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{z})+\mu^2\,(\mathbf{z}^T\mathbf{A}\mathbf{z})=0$$

egyenletet kapjuk a λ, μ ismeretlenekre. Mivel a P pont rajta van a görbén, fennáll $\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y}=0$. A nem eltűnő tagok esetében vezessük be a $\beta=\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{z}$ és $\delta=\mathbf{z}^T\mathbf{A}\mathbf{z}$ jelölést. A P és Q nem konjugált pontok, emiatt a β érték különbözik 0–tól. Tehát a g egyenes $\lambda\,\mathbf{y}+\mu\,\mathbf{z}$ vektorral meghatározott pontja pontosan akkor van rajta az $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszeleten, ha a λ, μ együtthatók megoldják a

$$\mu(2\,\lambda\,\beta+\mu\,\delta)=0$$

egyenletet, amelyben β, δ rögzített számok és $\beta\neq 0$.
Vegyük észre, hogy ennek a λ, μ ismeretlenekre vonatkozó másodfokú egyenletnek számszorzótól eltekintve csak két megoldása van. Az egyik megoldó számpár $\lambda_1=1$, $\mu_1=0$, amelynek a P pont felel meg. A másik megoldó számpár $\lambda_2=\delta$, $\mu_2=-2\,\beta$. Tehát a g egyenes $\delta\,\mathbf{y}-2\,\beta\,\mathbf{z}$ vektorral meghatározott pontja is rajta van az $\overline{\mathcal{M}}$ kúpszeleten. Ezzel igazoltuk, hogy a g egyenesnek és az $\overline{\mathcal{M}}$ görbének két közös pontja van. □

Az előbbi tétel alapján könnyen belátható az alábbi kijelentés.
Következmény. *A $\overline{\sigma}$ projektív síkon legyen adott egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges kúpszelet és egy g egyenes. Ekkor az $\overline{\mathcal{M}}$ kúpszelet és a g egyenes közös pontjainak száma* 0, 1 *vagy* 2 *lehet. Ha egyetlen közös pontjuk van, akkor a g egyenes megegyezik ezen pontnak az $\overline{\mathcal{M}}$–re vonatkozó polárisával.*

5.20. Definíció. A $\overline{\sigma}$ sík egy e egyenesét az $\overline{\mathcal{M}}$ ($\overline{\mathcal{M}}\subset\overline{\sigma}$) közönséges projektív kúpszelet érintőjének mondjuk, ha az e–nek és az $\overline{\mathcal{M}}$–nek egyetlen közös pontja van. Ez esetben az egyetlen közös pontot az e érintési pontjának hívjuk.

A fenti definíció és az 5.19. Tétel következtében igaz az alábbi állítás.
5.21. Állítás. *A $\overline{\sigma}$ síkban legyen adott egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszelet és azon egy P pont. Az $\overline{\mathcal{M}}$–nek egyetlen olyan érintője van, amely a P pontban érinti a kúpszeletet, és ez megegyezik a P pont polárisával.*

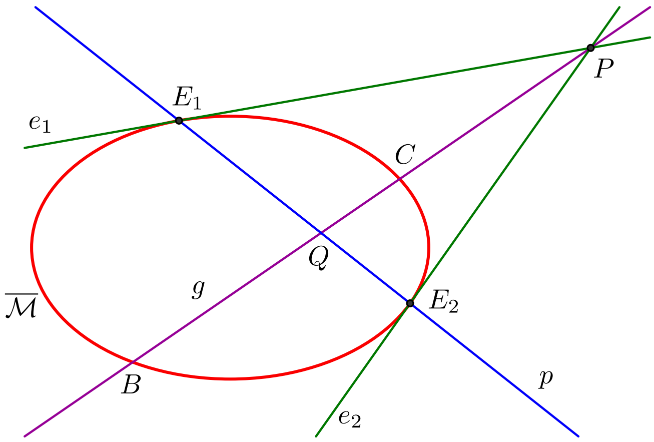
Ha egy g egyenesnek és egy $\overline{\mathcal{M}}$ projektív kúpszeletnek két közös pontja van, akkor azt mondjuk, hogy a g metszi az $\overline{\mathcal{M}}$–t. A leírtak alapján osztályozni lehet a sík pontjait.

5.22. Definíció. A $\overline{\sigma}$ síkon legyen adva egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszelet és egy olyan P pont, amely nincs rajta az $\overline{\mathcal{M}}$–en. A P pontot az $\overline{\mathcal{M}}$ külső pontjának mondjuk, ha a polárisa metszi az $\overline{\mathcal{M}}$ kúpszeletet.

Amennyiben egy $\overline{\sigma}$–beli Q pont polárisa nem metszi az $\overline{\mathcal{M}}$ görbét, akkor a Q pontot az $\overline{\mathcal{M}}$ projektív kúpszelet belső pontjának nevezzük.

Megjegyzés. A 39. ábrán szerepel egy P egy külső pont, továbbá egy Q belső pont. Korábbi eredményeinkből már adódik, hogy amennyiben az e érintőegyenese az $\overline{\mathcal{M}}$–nek, akkor az e–nek az érintési ponttól különböző pontjai az $\overline{\mathcal{M}}$ kúpszeletnek külső pontjai.

Egy P külső ponton át mindig két érintőt lehet húzni az $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges kúpszelethez. Mivel az E_1, E_2 érintési pontok konjugáltak a P ponthoz, a két érintési pont összekötő egyenese megegyezik a P pont polárisával.



39. ábra. *Egy P külső pont p polárisának kijelölése az érintők alkalmazásával.*

Az alábbi fontos eredmény a konjugált pontok és a harmonikus pontégyesek kapcsolatára mutat rá. Ennek értelmezésében is segít a fenti 39. ábra.

5.23. Tétel. *A $\overline{\sigma}$ síkon legyen adva egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszelet, továbbá olyan P, Q ($P \neq Q$) pontok, amelyek nincsenek az $\overline{\mathcal{M}}$–en és az összekötő egyenesük a B, C pontokban metszi az $\overline{\mathcal{M}}$–et. Ez esetben a P, Q pontok konjugáltak egymáshoz az $\overline{\mathcal{M}}$–re nézve akkor és csak akkor, ha a pontnégyes kettősviszonyára fennáll* $(B\,C\,P\,Q) = -1$.

Bizonyítás.
Ezúttal is feltesszük, hogy az $\overline{\mathcal{M}}$ kúpszeletet a $\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a_{rs}\,x_r\,x_s = 0$ egyenlet írja le, amely az $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ mátrixegyenletként is felírható.
(1) *Tegyük fel, hogy teljesül* $(B\,C\,P\,Q) = -1$. Ekkor a kettősviszony szimmetria-tulajdonsága miatt $(P\,Q\,B\,C) = -1$ is igaz. Rögzítsük a P, Q pontok egy–egy homogén koordináta-hármasát, melyek legyenek $P\,[y_1, y_2, y_3]$ és $Q\,[z_1, z_2, z_3]$. Vegyük a B, C pontok egy–egy meghatározó vektorát, melyeket jelöljön $\mathbf{w}_1$ és $\mathbf{w}_2$. Mivel a B, C pontok rajta vannak a $g = \langle P, Q\rangle$ egyenesen, ezen vektorok előállnak az $\mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ lineáris kombinációjaként az $\mathbf{w}_1 = \lambda_1\,\mathbf{y} + \mu_1\,\mathbf{z}$, $\mathbf{w}_2 = \lambda_2\,\mathbf{y} + \mu_2\,\mathbf{z}$ alakban. Mivel a pontok különbözőek, az

együtthatókra fennáll $\lambda_1 \mu_1 \neq 0$ és $\lambda_2 \mu_2 \neq 0$. Ismeretes, hogy ezekből a kettősviszony az

$$(P\,Q\,B\,C) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\mu_2}$$

összefüggéssel számolható ki. Jelen esetben $(P\,Q\,B\,C) = -1$, tehát a hányadosokra fennáll $\frac{\mu_2}{\lambda_2} = -\frac{\mu_1}{\lambda_1}$. Vegyük észre, hogy a $\mathbf{w}_2$ vektor irányát a $\frac{\mu_2}{\lambda_2}$ hányados már megadja. Tehát a $\lambda_1\,\mathbf{y} - \mu_1\,\mathbf{z}$ is az egyik meghatározó vektora a C pontnak, és ezúttal célszerű ezt alkalmazni.

Emlékezzünk rá, hogy $\mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ nemcsak a pontok meghatározó vektorait jelölik, hanem a koordinátáikból képzett és oszlopmátrixokat is. Tekintsük most a B, C pontok koordinátáiból képzett oszlopmátrixokat, és használjuk ki, hogy ezek a pontok rajta vannak a $\overline{\mathcal{M}}$ kúpszeleten. A B pont homogén koordinátáinak a $\lambda_1\,\mathbf{y} + \mu_1\,\mathbf{z}$ oszlopmátrix felel meg. Emiatt fennáll

$$(\lambda_1\,\mathbf{y} + \mu_1\,\mathbf{z})^T \mathbf{A} (\lambda_1\,\mathbf{y} + \mu_1\,\mathbf{z}) = 0\,.$$

Felhasználva a mátrixszorzás tulajdonságait, ebből a

$$(\lambda_1)^2 \cdot \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y} + 2\lambda_1\,\mu_1 \cdot \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{z} + (\mu_1)^2 \cdot \mathbf{z}^T\mathbf{A}\mathbf{z} = 0 \tag{5.1}$$

összefüggést nyerjük. A C ponthoz tartozó homogén koordinátákból a $\lambda_1\,\mathbf{y} - \mu_1\,\mathbf{z}$ oszlopmátrixot kapjuk. Mivel a C koordinátái is kielégítik az $\overline{\mathcal{M}}$ egyenletét, a fenti eljárás alapján a

$$(\lambda_1)^2 \cdot \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y} - 2\lambda_1\,\mu_1 \cdot \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{z} + (\mu_1)^2 \cdot \mathbf{z}^T\mathbf{A}\mathbf{z} = 0 \tag{5.2}$$

összefüggést nyerjük. Vonjuk ki az (5.1) egyenletből az (5.2) egyenletet. Ily módon a

$$4\,\lambda_1\,\mu_1 \cdot \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{z} = 0$$

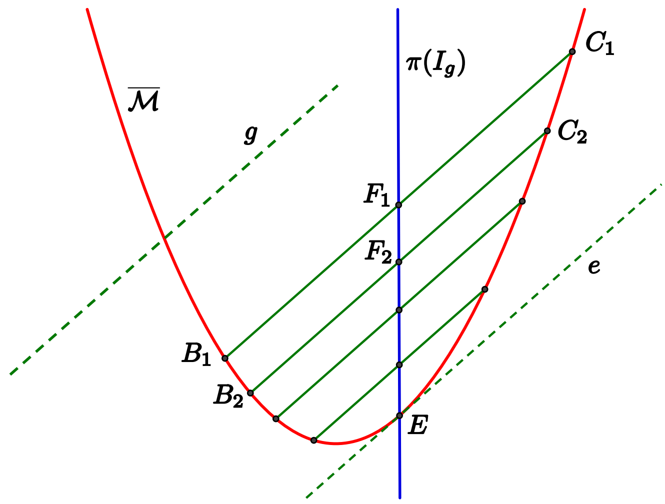
egyenlőséget kapjuk. Ismeretes, hogy igaz $\lambda_1\,\mu_1 \neq 0$. Emiatt a fenti egyenletből az $\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{z} = 0$ összefüggés adódik, amelyet a $\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a_{rs}\,y_r\,z_s = 0$ formában is felírhatunk. A kapott egyenlőség szerint a P, Q pontok konjugáltak egymáshoz. Ezzel az egyik irányban már igazoltuk a tételt.

(2) *Tegyük fel, hogy P és Q egymáshoz konjugált pontok az $\overline{\mathcal{M}}$ kúpszeletre nézve.* Ez azt jelenti, hogy a Q pont rajta van a P pont p polárisán. Mivel a P pont nincs rajta a kúpszeleten, a p poláris nem halad át a P ponton. A $g = \langle P, Q\rangle$ egyenes tehát különbözik a p polárístól és azt a Q pontban metszi el.

Tekintsük a g egyenesnek azt az R pontját, amellyel teljesül a $(B\,C\,P\,R) = -1$ egyenlőség. Világos, hogy a kettősviszonyra kiszabott feltétel egyértelműen kijelöli az R pontot a g egyenesen. A fentiek során, vagyis a bizonyítás első részében már beláttuk, hogy ekkor P és R egymáshoz konjugált pontok az $\overline{\mathcal{M}}$ kúpszeletre nézve. Ebből viszont már adódik, hogy az R pont a p poláríson is rajta van, vagyis megegyezik a g, p egyenesek metszéspontjával, ami éppen a Q pont. Ily módon azt kapjuk, hogy igaz a $(B\,C\,P\,Q) = -1$ összefüggés. $\square$

Megjegyzés. Egy g egyenesen vegyünk egy $\overline{BC}$ szakaszt és annak F felezőpontját. Emlékezzünk rá, hogy ekkor a B, C, F, I_g pontok egy harmonikus pontnégyest alkotnak, azaz fennáll $(B\,C\,F\,I_g) = -1$. Ezen tényből és a fenti tételből már következik az alábbi kijelentés.

Amennyiben a σ síkon vett $\mathcal{M}$ kúpszelet egy ellipszis vagy egy hiperbola, akkor az $\mathcal{M}$ kúpszelet centrumának az $\overline{\mathcal{M}}$–re vonatkozó polárisa megegyezik az i_σ ideális egyenessel.



40. ábra. *Szemléltető ábra az 5.24. Állításhoz.*

Az 5.23. Tétel alapján már igazolni tudjuk az alábbi állítást. Lásd a 40. ábrát.

5.24. Állítás. *A σ euklideszi síkon legyen adva egy $\mathcal{M}$ közönséges kúpszelet és egy g egyenes. Tekintsük a g–vel párhuzamos és a kúpszeletet metsző egyeneseken a kimetszett szakaszok felezőpontjait, továbbá a g–vel párhuzamos érintőkön vegyük az érintési pontokat. Ekkor a felezőpontok és az érintési pontok egy egyenesre esnek.*

Bizonyítás.

Bővítsük ki a σ síkot a $\overline{\sigma}$ projektív síkká és vegyük az $\mathcal{M}$ kúpszelet $\overline{\mathcal{M}}$ projektív lezárását. Válasszuk ki a párhuzamos egyenesek egyikét, melyet jelöljön g_r. Ez metssze el $\overline{\mathcal{M}}$–et a B_r, C_r pontokban, és a két pont összekötő szakaszának felezőpontja legyen F_r. Ismeretes, hogy a párhuzamosokhoz rendelt I_g közös ideális ponttal fennáll $(B_r\,C_r\,F_r\,I_g) = -1$. Az előző tétel következtében az F_r pont rajta van az I_g ideális pont poláris egyenesén, amelyet most jelöljön $\pi(I_g)$. Ha az e egy olyan érintőegyenes, amely párhuzamos g–vel, akkor az E érintési pont is konjugált I_g–hez, tehát szintén rajta van a $\pi(I_g)$ egyenesen. $\square$

A köri pontnégyes kettősviszonya

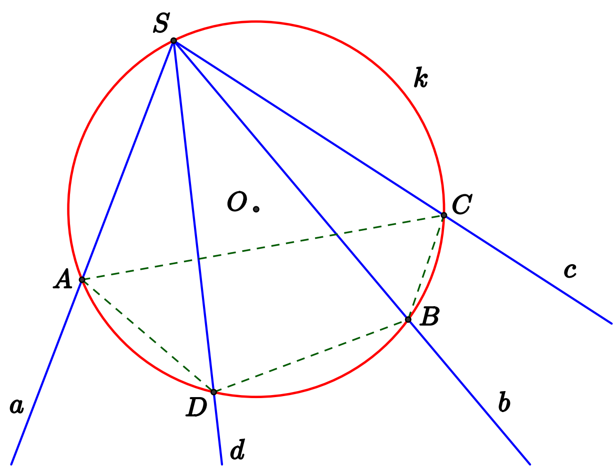
Az euklideszi tér egy síkján legyenek adva az A, B, C, D egymástól különböző pontok, amelyek a sík egy k körére illeszkednek. Jelölje O ezen k körnek a centrumát, illetve r a sugarát. Tekintsük a k kör egy további S pontját és az $a = \langle S, A \rangle$, $b = \langle S, B \rangle$, $c = \langle S, C \rangle$, $d = \langle S, D \rangle$ egyeneseket. Az alábbiak során belátjuk, hogy az S pontra illeszkedő sugárnégyes $(a\,b\,c\,d)$ kettősviszonya nem függ az S pont megválasztásától.

Vegyük az A, C pontok által határolt (a fékörnél nem hosszabb) körívnek az $AOC\sphericalangle$ középponti szögét. A kerületi szögek tétele alapján az $\overline{AC}$ húr hosszára fennáll az $AC = 2r\,\sin(\frac{1}{2}AOC\sphericalangle) = 2r\,\sin(ASC\sphericalangle)$ egyenlőség feltéve, hogy a szögekhez most nem rendelünk előjelet. Ily módon a húrhosszakkal teljesül az

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{\sin(ASC\sphericalangle)}{\sin(CSB\sphericalangle)} : \frac{\sin(ASD\sphericalangle)}{\sin(DSB\sphericalangle)}$$

összefüggés, amiből már következik, hogy igaz

$$|(a\,b\,c\,d)| = \frac{|\sin(a,\,c)\sphericalangle|}{|\sin(c,\,b)\sphericalangle|} : \frac{|\sin(a,\,d)\sphericalangle|}{|\sin(d,\,b)\sphericalangle|} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}\,.$$

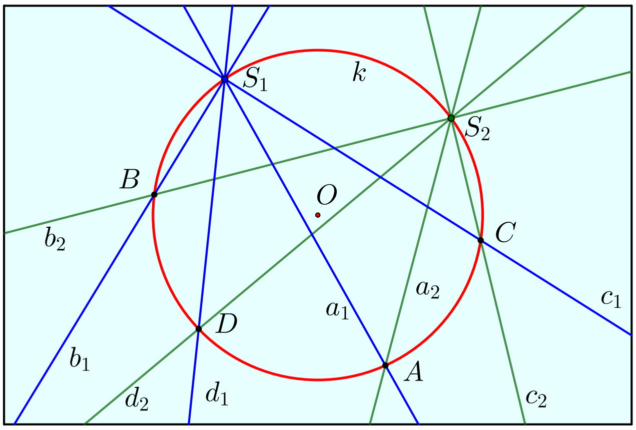


41. ábra. *A köri pontnégyes kettősviszonya:* $(A\,B\,C\,D)_k = (a\,b\,c\,d)$.

A fentiek szerint már csak azt kell megmutatnunk, hogy az $(a\,b\,c\,d)$ kettősviszony előjele sem függ az S köri pont megválasztásától. Ez viszont a következő észrevételből adódik. *Az A, B pontok a k kört két körívre bontják fel. Amennyiben az A, B pontokkal határol két körív egyike tartalmazza a C, D pontokat, akkor az $(a\,b\,c\,d)$ kettősviszony előjele pozitív. Ha pedig a C, D pontok más–más köríven vannak, akkor az $(a\,b\,c\,d)$ kettősviszony előjele negatív.*

5.25. Definíció. Az euklideszi térben legyen adva négy pont A, B, C és D, amelyek egy körön vannak. Vegyük a pontokon átmenő kör egy további S pontját és az $a = \langle S, A \rangle$, $b = \langle S, B \rangle$, $c = \langle S, C \rangle$, $d = \langle S, D \rangle$ egyeneseket. Az A, B, C, D köri pontnégyes kettősviszonyán az $(a\,b\,c\,d)$ számot értjük.

Megjegyzés. A fenti definíció kiterjeszthető arra az esetre is, amikor az S pontot a köri pontnégyes egyik pontjával, például a B–vel, megegyezőnek választjuk. Ekkor b legyen a kör B pontbeli érintőegyenese. Az A, B, C, D köri pontnégyes kettősviszonyát $(A\,B\,C\,D)_k$ fogja jelölni a továbbiakban.



42. ábra. *A kerületi szögek tétele alapján fennáll* $(a_1\,b_1\,c_1\,d_1) = (a_2\,b_2\,c_2\,d_2)$.

Megjegyzés. A kerületi szögek tétele alapján belátható, hogy az A, B, C, D köri pontnégyesnél az $(a\,b\,c\,d)$ kettősviszony értéke nem függ az S köri pont megválasztásától.

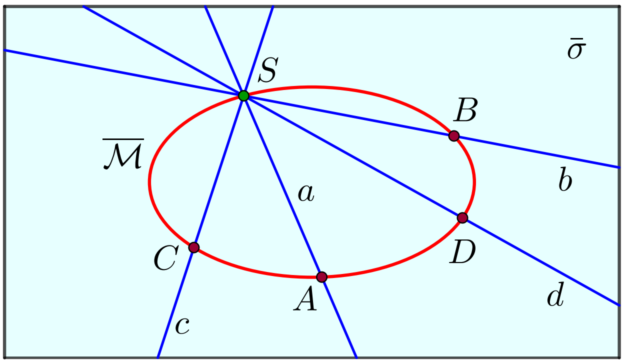
A kúpszeleti pontnégyes kettősviszonya

Belátható, hogy amennyiben a σ euklideszi síkon adva van egy közönséges kúpszelet, akkor az mindig előáll egy $\mathcal{K}$ forgáskúpnak a σ–val vett metszeteként. Ha veszünk egy $\mathcal{K}$–ra eső kört és azt a kúp csúcsából centrálisan rávetítjük σ–ra, akkor a kúpszelet lesz a vetület. Ismeretes, hogy a centrális vetítés megőrzi a pontnégyesek és a sugárnégyesek kettősviszonyát. Ily módon a köri pontnégyesek kettősviszonyával kapcsolatos összefüggéseket felhasználva igazolni lehet a következő állítást. (Lásd a 42. ábrát.)

5.26. Állítás. *Egy $\overline{\sigma}$ síkon legyen adva egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszelet és azon az A, B, C, D egymástól különböző pontok. Vegyük az $\overline{\mathcal{M}}$ további S_1, S_2 pontjait és az $a_j = \langle S_j, A \rangle$, $b_j = \langle S_j, B \rangle$, $c_j = \langle S_j, C \rangle$, $d_j = \langle S_j, D \rangle$ egyeneseket $(j = 1, 2)$. Ekkor a sugárnégyesek kettősviszonyára fennáll $(a_1\,b_1\,c_1\,d_1) = (a_2\,b_2\,c_2\,d_2)$.*

Az előző állítás alapján egy rögzített kúpszelet négy pontjának is definiálni tudjuk a kettősviszonyát.

5.27. Definíció. A $\overline{\sigma}$ projektív síkon legyen adva egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszelet és azon az A, B, C, D egymástól különböző pontok. Tekintsük az $\overline{\mathcal{M}}$ kúpszelet egy további S pontját és az $a = \langle S, A \rangle$, $b = \langle S, B \rangle$, $c = \langle S, C \rangle$, $d = \langle S, D \rangle$ egyeneseket. Az A, B, C, D pontnégyes $\overline{\mathcal{M}}$–re vonatkozó kúpszeleti kettősviszonyán az $(a\,b\,c\,d)$ számot értjük.



43. ábra. *A kúpszeleti pontnégyes és egy hozzárendelt sugárnégyes.*

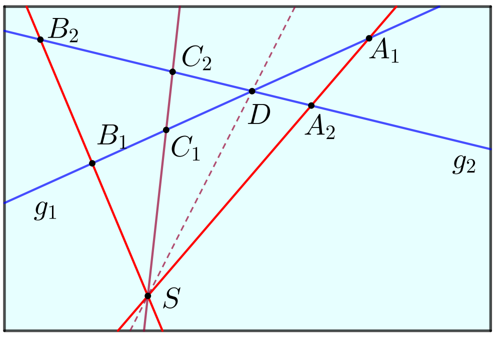
Megjegyzés. Evidens, hogy egy $\overline{\sigma}$–beli $A,\ B,\ C,\ D$ pontnégyes kúpszeleti kettősviszonya függ a pontokon átmenő $\overline{\mathcal{M}}$ kúpszelet megválasztásától.

A kúpszeletekre vonatkozó Pascal–tétel

A nevezetes tétel igazolásához szükségünk lesz az alábbi állításra, amely valójában a Papposz–tételnek a következménye.

5.28. Állítás. *A $\overline{\sigma}$ sík $g_1,\ g_2$ $(g_1 \neq g_2)$ egyenesein legyenek adva az $A_1,\ B_1,\ C_1$ és az $A_2,\ B_2,\ C_2$ ponthármasok. Ha a $D = g_1 \cap g_2$ metszésponttal fennáll $(A_1\, B_1\, C_1\, D) = (A_2\, B_2\, C_2\, D)$, akkor az $\langle\, A_1, A_2\,\rangle,\ \langle\, B_1, B_2\,\rangle$ és $\langle\, C_1, C_2\,\rangle$ egyenesek egyazon pontra illeszkednek.*

Bizonyítás.



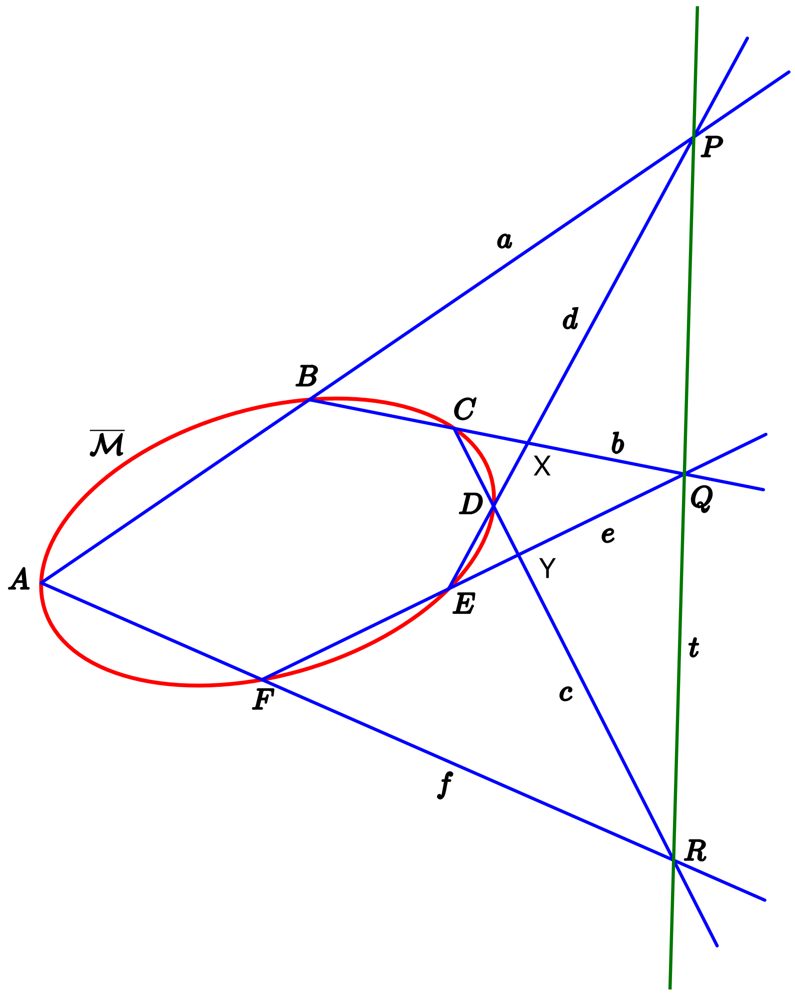
44. ábra. *Perspektív pontnégyesek a $g_1,\ g_2$ egyeneseken.*

Tegyük fel, hogy teljesül az $(A_1\, B_1\, C_1\, D) = (A_2\, B_2\, C_2\, D)$ egyenlőség, amelyből $(A_1\, B_1\, D\, C_1) = (A_2\, B_2\, D\, C_2)$ is következik. Az $\langle A_1,\ A_2\rangle$ és $\langle B_1,\ B_2\rangle$ egyenesek metszéspontját jelölje S.

Az S pontot a C_1–gyel összekötő egyenes metssze el g_2–t a $\hat{C}$ pontban. A 4.3. Tétel következtében fennáll az $(A_1\,B_1\,D\,C_1) = (A_2\,B_2\,D\,\hat{C})$ összefüggés. Ez alapján igaz $(A_2\,B_2\,D\,\hat{C}) = (A_2\,B_2\,D\,C_2)$, amiből $\hat{C} = C_2$ adódik. Eszerint a $\langle\, C_1, C_2 \,\rangle$ egyenes is illeszkedik az S pontra. $\square$.

5.29. Definíció. A $\overline{\sigma}$ projektív síkon legyen adva egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges kúpszelet. Legyenek A, B, C, D, E, F az $\overline{\mathcal{M}}$ különböző pontjai. Az általuk, mint csúcspontokkal, meghatározott zárt töröttvonalat az $\overline{\mathcal{M}}$ kúpszeletbe írt hatszögnek mondjuk.

Az $a = \langle\, A, B \,\rangle$, $b = \langle\, B, C \,\rangle$, $c = \langle\, C, D \,\rangle$, $d = \langle\, D, E \,\rangle$, $e = \langle\, E, F \,\rangle$, $f = \langle\, F, A \,\rangle$ egyeneseket a hatszög oldalegyeneseinek hívjuk. Az a–val átellenes oldalegyenesnek a d–t, a b–vel átellenes oldalegyenesnek az e–t, a c–vel átellenes oldalegyenesnek pedig az f–t tekintjük.



45. ábra. *Szemléltető ábra a Pascal–tétel bizonyításához.*

5.30. Tétel (Pascal tétele). *A közönséges projektív kúpszeletbe írt hatszög átellenes oldalegyeneseinek metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek.*

Bizonyítás.

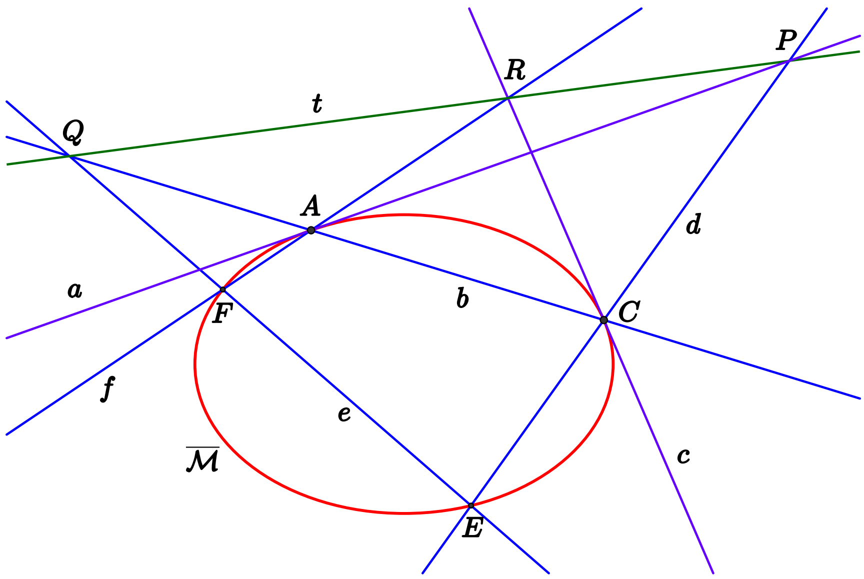
Az $\overline{\mathcal{M}}$ kúpszeletbe írt hatszög átellenes oldalegyeneseinek metszéspontjai legyenek $P = a \cap d$, $Q = b \cap e$ és $R = c \cap f$. Tekintsük a P, R pontok összekötésével nyert $t = \langle P, R \rangle$ egyenest. Az 5.28. Állítás alapján be fogjuk látni, hogy a b, e, t egyenesek egyazon pontra illeszkednek. Ez nyilván azt jelenti, hogy a t egyenes áthalad a $Q = b \cap e$ metszésponton, tehát a P, R, Q pontok kollineárisak.

Vegyük az $X = b \cap d$ és $Y = c \cap e$ pontokat. Az X, E, P ponthármas a d egyenesre esik, a C, Y, R ponthármas a c egyenesen van, továbbá fennáll $d \cap c = D$, $\langle X, C \rangle = b$, $\langle E, Y \rangle = e$ és $\langle P, R \rangle = t$. Amennyiben alkalmazzuk a Papposz–tételt és a C, E, A, D kúpszeleti pontnégyesre az 5.26. Állítást, akkor azt kapjuk, hogy

$$(X\,E\,P\,D) = (\langle B,X\rangle\,\langle B,E\rangle\,\langle B,P\rangle\,\langle B,D\rangle\,) = (\langle B,C\rangle\,\langle B,E\rangle\,\langle B,A\rangle\,\langle B,D\rangle\,) =$$
$$(\langle F,C\rangle\,\langle F,E\rangle\,\langle F,A\rangle\,\langle F,D\rangle\,) = (\langle F,C\rangle\,\langle F,Y\rangle\,\langle F,R\rangle\,\langle F,D\rangle\,) = (C\,Y\,R\,D)$$

teljesül. Alkalmazzuk az 5.28. Állítást a d, c egyenesekre. Mivel igaz az $(X\,E\,P\,D) = (C\,Y\,R\,D)$ egyenlőség, a $b = \langle C, X \rangle$, $e = \langle E, Y \rangle$ és $t = \langle P, R \rangle$ egyenesek egyazon pontra illeszkednek. Tehát a t egyenes áthalad a Q ponton. $\square$

Megjegyzés. Egy kúpszeletbe írt hatszögnél azt az egyenest, amelyre az átellenes oldalegyenesek $P = a \cap d$, $Q = b \cap e$, $R = c \cap f$ metszéspontjai illeszkednek, a hatszöghöz tartozó Pascal–egyenesnek nevezzük. *A 45. ábrán a Pascal–egyenest t jelöli.*



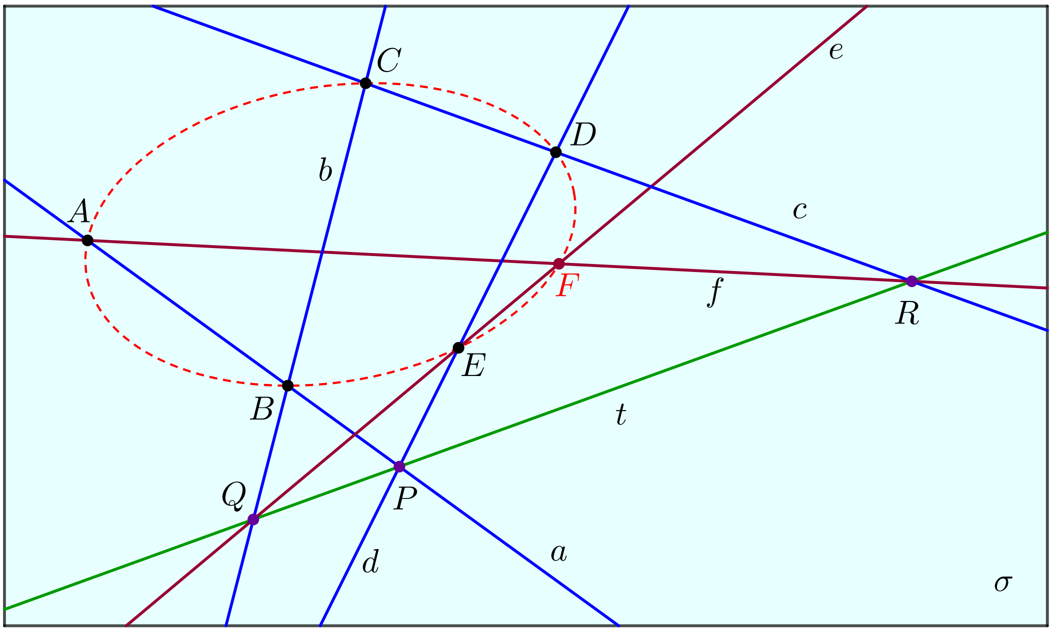
46. ábra. *Pascal tétele az $A = B$ és $C = D$ egybeeső csúcsok esetén is igaz.*

Megjegyzés. A Pascal–tétel érvényben marad abban az esetben is, amikor a kúpszeletbe írt $ABCDEF$ zárt töröttvonal két–két szomszédos csúcsa "egybeesik". Ekkor az elfajult hatszög két egybeeső csúcsát összekötő egyenesként a kúpszeletnek a duplapontbeli érintőjét vesszük. Az igazolás analóg az 5.30. Tételnél megadott bizonyítással. A 46. ábrán az az elfajuló eset látható, amikor $A = B$ és $C = D$ teljesül.

A Pascal–tétel egy következménye

A Pascal–tétel alkalmazásával is belátható, hogy egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges projektív kúpszeletet annak öt pontja már egyértelműen meghatározza.

A síkban adva van öt általános helyzetű pont, melyek legyenek A, B, C, D és E. Ismeretes, hogy van olyan kúpszelet, amely áthalad mind az öt ponton. Vegyünk egy az A pontra illeszkedő olyan f egyenest, amely nem halad át a másik négy pont egyikén sem és nem érintője a kúpszeletnek. Megmutatjuk, hogy ezen f egyenes és az öt ponton áthaladó közönséges kúpszelet metszéspontja már egyértelműen meghatározott és vonalzóval megszerkeszthető. (Lásd a 47. ábrát.)



47. ábra. *Öt pont ismeretében a kúpszelet egy további pontjának kiszerkesztése.*

Tegyük fel, hogy az f egyenes az A mellett egy F pontban metszi el a kúpszeletet és alkalmazzuk a Pascal–tételt ezen $ABCDF$ zárt töröttvonalra, vagyis erre a kúpszeletbe beírt hatszögre. Az $a = \langle A, B\rangle$ és $d = \langle D, E\rangle$ szemközti oldalegyenesek metszéspontját jelölje P, a $c = \langle C, D\rangle$ és f egyenesek metszéspontját pedig jelölje R. Ezt ki tudjuk szerkeszteni az F pont ismerete nélkül is. Ezen metszéspontok t összekötő egyenese megadja számunkra a beírt hatszög Pascal–tengelyét. A $b = \langle B, C\rangle$ és $e = \langle E, F\rangle$ egyenesek Q metszéspontja rajta van t-n. Világos, hogy ez a Q pont a b, t egynesek közös pontja. Amennyiben ezt kijelöljük, akkor az E, Q pontok összekötésével megkapjuk az e egyenest. Végül az e, f egyenesek kimetszik a keresett F pontot, vagyis a beírt hatszög hatodik csúcsát.

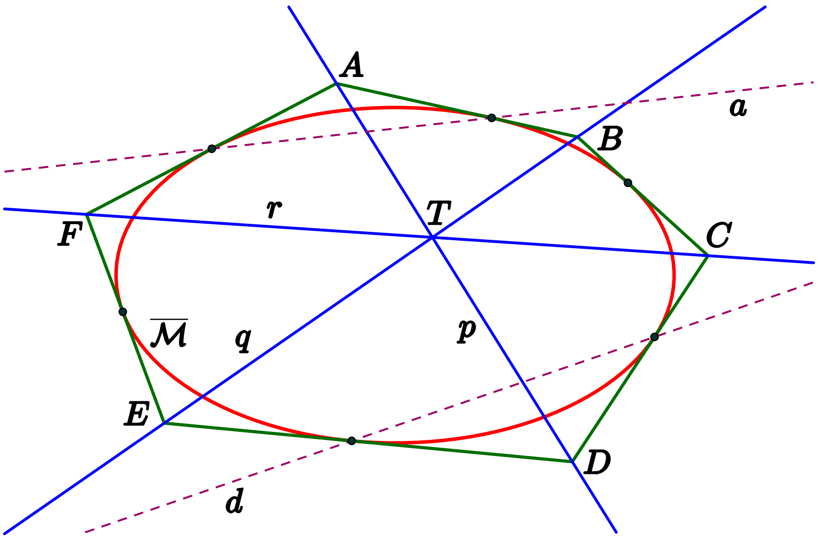
Ugyanis, ha az $\overline{\mathcal{M}}$–en veszünk öt pontot és egy tetszőleges g egyenest az egyik ponton át, akkor az 5.30. Tétel alapján g–nek az $\overline{\mathcal{M}}$–mel vett másik metszéspontját vonalzós szerkesztéssel már ki tudjuk jelölni. Ily módon az 5.7. Tételt is figyelembe véve a következő megállapítást tehetjük.

5.31. Következmény. *A síkon legyenek adva olyan P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 pontok, melyek között nincs három kollineáris pont. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan közönséges kúpszelet, amely áthalad a P_r $(r = 1, \ldots, 5)$ pontokon.*

Brianchon tétele

5.32. Definíció. A $\overline{\sigma}$ projektív síkon legyen adva egy $\overline{\mathcal{M}}$ közönséges kúpszelet. Egy $\overline{\sigma}$–beli hatoldalú zárt töröttvonalat az $\overline{\mathcal{M}}$ kúpszelet köré írt hatszögnek mondunk, ha az összes oldalegyenese érintője az $\overline{\mathcal{M}}$–nek.

Legyenek A, B, C, D, E, F egy olyan $\overline{\sigma}$–beli zárt töröttvonal csúcspontjai, amelynél a hat oldalegyenes mindegyike érintője egy adott $\overline{\mathcal{M}}$ projektív kúpszeletnek. Egy ilyen $\overline{\mathcal{M}}$ köré írt hatszögnél az A–val átellenes csúcspontnak a D–t, a B–vel átellenes csúcspontnak az E–t, a C–vel átellenes csúcspontnak pedig az F–t tekintjük.



48. ábra. *Szemléltető ábra a Brianchon–tételhez.*

Az alábbi tételt, amely a közönséges kúpszelet köré írt hatszögekre vonatkozik, a Pascal–tétel duálisának szokás tekinteni. Ezt szemlélteti a fenti 48. ábra, amelyen az A, D csúcspontoknak a kúpszeletre vonatkozó a, d polárisai is fel vannak tüntetve. A bizonyításra ezúttal nem térünk ki.

5.33. Tétel (Brianchon tétele). *A projektív kúpszelet köré írt hatszög átellenes csúcspontjait összekötő egyenesek egyazon pontra illeszkednek.*

Megjegyzés. Egy $\overline{\mathcal{M}}$ kúpszelet köré írt hatszögnél azt a pontot, amelyre az átellenes csúcsokat összekötő $p = \langle A, D \rangle$, $q = \langle B, E \rangle$, $r = \langle C, F \rangle$ egyenesek illeszkednek, a hatszöghöz tartozó Brianchon–pontnak nevezzük. A fenti ábrán ezt T jelöli.