Verhóczki László

A sokaságok differenciálgeometriája

ELTE TTK Matematikai Intézet
Geometriai Tanszék

2020

Bevezetés

Történeti vonatkozások

A klasszikus differenciálgeometria az euklideszi terek sima görbéinek és felületeinek a geometriai tulajdonságait tanulmányozza. Mint ismeretes, az m–dimenziós elemi felület egy olyan speciális alakzat $\mathbb{R}^n$–ben ($n > m$), amely homeomorf képe az m–dimenziós euklideszi tér egy nyílt tartományának. Az felületelméletben az egyik alapvető fogalom az érintőtér. A felület érintőterét egy adott pontban a rajta áthaladó felületi görbék érintővektorai határozzák meg. Ily módon az $\mathbb{R}^n$–be beágyazott felület érintőterei alterei az $\mathbb{R}^n$ lineáris térnek.

A sima sokaságok elméletének kidolgozása során az egyik fő gondot az érintővektor és az érintőtér fogalmának a szabatos megadása jelentette. Kiderült, hogy az elmélet egzakt felépítéséhez nagy szükség van topológiai ismeretekre. Ezen nehézségek következtében a sokaságok differenciálgeometriájának alapfogalmait csak a XX. század közepére sikerült az összes igényt kielégítő formában leírni oly módon, hogy az egyúttal általánosan elfogadott is legyen.

A differenciálható sokaságok elméletének kiépítésében az első lépést a B. Riemann által 1854–ben, a Göttingeni Egyetemen tartott habilitációs előadás jelentette. Ennek során Riemann már használta a sokaság (németül *Mannigfaltigkeit*) elnevezést. A sokaságot önálló geometriai objektumnak tekintette, amelynek értelmezéséhez nincs szükség egy azt tartalmazó, magasabb dimenziójú euklideszi térre. Az m–dimenziós sokaságra kézenfekvő példaként szolgálnak az $\mathbb{R}^m$ euklideszi tér nyílt részhalmazai.

Előadásában Riemann kitért arra is, hogy a sokaság sima görbéinek ívhosszát akkor tudjuk értelmezni, ha a sokaságon metrikát is megadunk. A felületelmélet mintájára a metrikát úgy lehet leírni, hogy megadjuk a metrika valós értékű g_{ij} komponensfüggvényeit. Amennyiben az M sokaság az $\mathbb{R}^m$–nek egy nyílt tartománya, akkor a g_{ij} differenciálható függvények tetszőleges pontbeli értékei egy olyan mátrixot határoznak meg, amely egy pozitív definit kvadratikus formát ad az $\mathbb{R}^m$ lineáris téren. Ez esetben egy $\boldsymbol{\sigma}\colon [a,b] \to M$ sima görbe ívhosszán az $l(\boldsymbol{\sigma}) = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m g_{ij}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \sigma_i'(t) \cdot \sigma_j'(t)\right)^{1/2} dt$ számot értjük.

A fenti megközelítéssel már el tudunk jutni a Riemann–tér (illetve a Riemann–sokaság) értelmezéséhez. A sokaságon a metrikát tehát relatíve szabadon választhatjuk, és nem a befoglaló euklideszi tér metrikájából származtatjuk.

Az $\mathbb{R}^m$ euklideszi térrel kapcsolatos jelölések

Az $\mathbb{R}^m$ euklideszi téren mindig az euklideszi metrika által meghatározott topológiát fogjuk tekinteni. Az $\mathbb{R}^m$ lineáris tér természetes bázisának a vektorai legyenek $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$. Az $u^i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ($i = 1, \ldots, m$) függvényeket, ahol fennáll $u^i(a_1, \ldots, a_m) = a_i$ tetszőleges $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ esetén az $\mathbb{R}^m$ koordináta–függvényeinek fogjuk nevezni.

Legyen U egy nyílt tartomány $\mathbb{R}^m$–ben ($m \geq 2$). Vegyünk egy C^∞–osztályú $f\colon U \to \mathbb{R}$ függvényt. Az f i–edik parciális derivált függvényére ($i = 1, \ldots, m$) vagy a $\partial_i f$ vagy pedig a $D_i f$ jelölést alkalmazzuk. Eszerint a $\partial_i f\colon U \to \mathbb{R}$ függvényre fennáll a

$$\partial_i f(a_1, \ldots, a_m) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \big(f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_m) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_m)\big)$$

összefüggés tetszőleges $(a_1, \ldots, a_m) \in U$ esetén.

Az U tartományon definiált C^∞–osztályú függvények (más szóval sima függvények) halmazát a továbbiakban $\mathcal{F}(U)$ fogja jelölni. Mivel természetes módon értelmezhető két $\mathcal{F}(U)$–beli elem összege és szorzata, az $\mathcal{F}(U)$ egy kommutatív gyűrűnek tekinthető. Ugyanakkor $\mathcal{F}(U)$ egy lineáris teret (más szóval egy vektorteret) is képez az $\mathbb{R}$ számtest felett.

Legyen adott egy tetszőlegesen sokszor differenciálható $g\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyváltozós valós függvény az I nyílt intervallumon. A szokásoknak megfelelően, a g–nek a $t \in I$ helyen vett deriváltját $g'(t)$–vel fogjuk jelölni.

Az érintővektor mint speciális lineáris forma a sima függvények terén

Tekintsünk az $\mathbb{R}^m$ euklideszi térben egy M nyílt tartományt, és rögzítsünk egy $p \in M$ pontot. Vegyünk egy $\mathbb{R}^m$–beli $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m v_i\,\mathbf{e}_i$ vektort. Rendeljük hozzá $\mathbf{v}$–hez azt a $D_{\mathbf{v}}(p)\colon \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ leképezést, ahol tetszőlges C^∞–osztályú $f\colon M \to \mathbb{R}$ függvényre fennáll

$$D_{\mathbf{v}}(p)(f) = \sum_{i=1}^m v_i \cdot \partial_i f(p)\,.$$

Evidens, hogy $D_{\mathbf{v}}(p)$ egy lineáris formát ad az $\mathcal{F}(M)$ vektortéren. Amennyiben veszünk egy olyan $\boldsymbol{\sigma}\colon I \to M \subset \mathbb{R}^m$ sima görbét, amelyre igaz $\boldsymbol{\sigma}'(t_0) = \mathbf{v}$ valamely $t_0 \in I$ helyen, akkor nyilván teljesül a $D_{\mathbf{v}}(p)(f) = (f \circ \boldsymbol{\sigma})'(t_0)$ összefüggés. Ha pedig $\mathbf{v}$ egy egységvektora $\mathbb{R}^m$–nek, akkor a $D_{\mathbf{v}}(p)(f)$ érték nem más mint az f függvény $\mathbf{v}$–nek megfelelő iránymenti deriváltja.

Legyen adott egy olyan $\alpha\colon \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ lineáris forma az $\mathcal{F}(M)$ vektortéren, amelyre tetszőleges $f,\ g \in \mathcal{F}(M)$ esetén fennáll az

$$\alpha(f\,g) = \alpha(f)\cdot g(p) + f(p)\cdot \alpha(g) \tag{NL}$$

tulajdonság, ami megfelel a szorzatfüggvény deriváltjára vonatkozó összefüggésnek.
Nyilvánvaló, hogy az $\mathcal{F}(M)$ vektortér (NL) feltételt kielégítő lineáris formái egy vektorteret képeznek $\mathbb{R}$ felett, amelyet a továbbiakban T_pM–mel jelölünk.

Bizonyítható, hogy bármely az (NL) tulajdonsággal rendelkező α lineáris forma esetén egyértelműen létezik egy olyan $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ vektor, amelyre teljesül $\alpha = D_{\mathbf{v}}(p)$. Eszerint a $T_pM = \{\, D_{\mathbf{v}}(p) \mid \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \,\}$ vektortér izomorf az $\mathbb{R}^m$ vektortérrel.

A fenti kapcsolat indokolja azt, hogy az $\mathcal{F}(M)$ térnek az (NL) feltételt kielégítő lineáris formáit tekintjük az M tartomány p–beli érintővektorainak, a T_pM vektorteret pedig a p pontbeli érintőtérnek.

A sima sokaság érintővektorait és az általuk alkotott érintőtereket analóg módon fogjuk értelmezni.

1) A differenciálható sokaságokra vonatkozó alapfogalmak

A topologikus sokaság C^∞–osztályú atlasza

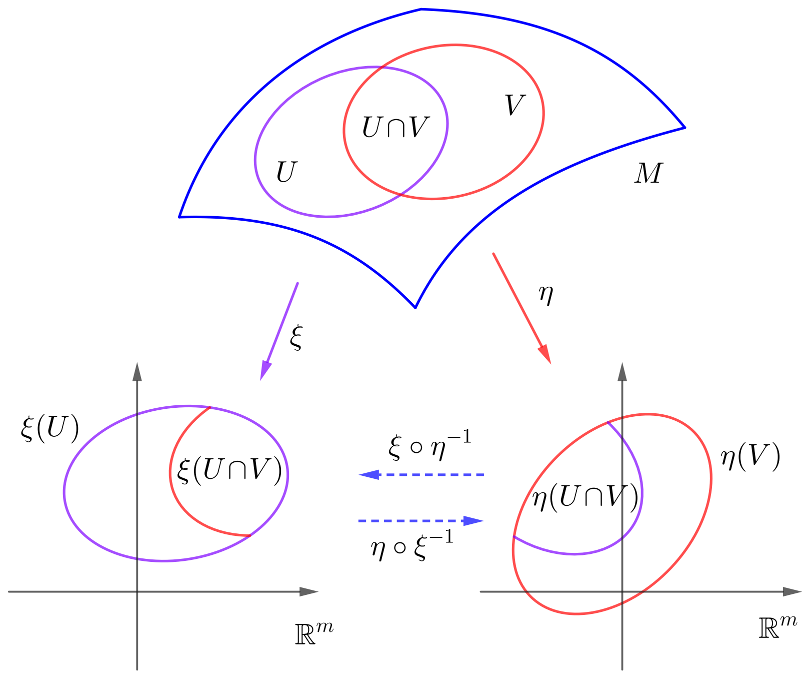
1.1. Definíció. Legyen adott egy M topologikus tér. Az M–et egy m–dimenziós topologikus sokaságnak mondjuk ($m \geq 1$), ha teljesülnek rá az alábbi feltételek:
(1) Az M egy Hausdorff–féle topologikus tér.
(2) Az M megszámlálható bázisú.
(3) Az M tetszőleges pontjának van olyan nyílt környezete, amely homeomorf az $\mathbb{R}^m$ euklideszi tér egy nyílt halmazával.

1.2. Definíció. Legyen adott az m–dimenziós M topológikus sokaság egy U nyílt részhalmazán egy olyan $\xi\colon U \to \mathbb{R}^m$ leképezés, ahol $\xi(U)$ egy nyílt halmaz $\mathbb{R}^m$–ben és ξ egy homeomorfizmust ad U és $\xi(U)$ között. Ez esetben az (U, ξ) párt az M sokaság egyik térképének mondjuk.

Megjegyzés. Az U–t térképtartománynak, a ξ–t pedig térképezésnek vagy koordinátázásnak nevezzük.

Az $x^i = u^i \circ \xi\colon U \to \mathbb{R}$ függvényt a φ térképezés i–edik koordináta–függvényének hívjuk ($i = 1, \ldots, m$).

A térkép elnevezés helyett az (U, ξ) párt szokás az M egyik lokális koordináta–rendszerének mondani.



1. ábra. *Az M sokaság (U, ξ) és (V, η) térképeihez tartozó átmenet-leképezések.*

A továbbiakban M mindig egy m–dimenziós ($m \geq 1$) sokaságot fog jelölni.

1.3. Definíció. Legyenek (U, ξ) és (V, η) térképei az M topologikus sokaságnak. Azt mondjuk, hogy ezek egymással C^∞–kompatibilisek, amennyiben teljesül az alábbi két feltétel egyike:
(1) A térképtartományok diszjunktak, azaz $U \cap V = \emptyset$.
(2) $U \cap V \neq \emptyset$ és az $\eta \circ \xi^{-1} \colon \xi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\xi \circ \eta^{-1} \colon \eta(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ leképezések C^∞–osztályúak.

Megjegyzés. Ha egy sokaság két térképénél a térképtartományok nem diszjunktak, akkor azok C^∞–kompatibilitása speciális esetnek tekinthető.

Példaként vegyük az 1–dimenziós $\mathbb{R}$ sokaság azon φ, $\psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ térképezéseit, ahol fennáll $\varphi(t) = t$ és $\psi(t) = t^3$ $(t \in \mathbb{R})$. Mivel a $\varphi \circ \psi^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény nem differenciálható, az $(\mathbb{R}, \varphi)$ és $(\mathbb{R}, \psi)$ térképek nem C^∞–kompatibilisek egymással.

1.4. Definíció. Az M topologikus sokaság atlaszán az M térképeinek egy olyan $\mathcal{A} = \{\, (U_\beta, \xi_\beta) \mid \beta \in B \,\}$ rendszerét értjük, amelyre fennáll $\cup_{\beta \in B} U_\beta = M$.

1.5. Definíció. Az M topologikus sokaság egy $\mathcal{A}$ atlaszát C^∞–osztályúnak mondjuk, amennyiben az $\mathcal{A}$ bármely két térképe C^∞–kompatibilis egymással.

Megjegyzés. Tekintsük az $S^n = \{\, (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} (a_i)^2 = 1 \,\}$ ponthalmazt és azon az $\mathbb{R}^{n+1}$ euklideszi térből örökölt topológiát. Evidens, hogy S^n egy n–dimenziós topológikus sokaság, melyet az n–dimenziós szférának nevezünk.

Vegyük az S^n szférán azt az $\mathbb{R}^n$–re történő két sztereografikus vetítést, melyeknél a vetítési centrum $(0, \ldots, 0, 1)$ és $(0, \ldots, 0, -1)$. Ily módon az S^n szféra két térképet kapjuk, melyekről belátható, hogy C^∞–kompatibilisek. Eszerint ez a két térkép egy C^∞–osztályú atlaszt alkot.

Megjegyzés. M. Kervaire 1960–ban elsőként tudott példákat mutatni olyan topologikus sokaságokra, amelyeken nem lehet megadni C^∞–osztályú atlaszt.

A differenciálható sokaság értelmezése

1.6. Definíció. Az M topológikus sokaság egy C^∞–osztályú $\mathcal{A}$ atlaszát teljesnek nevezzük, ha az M tetszőleges (U, ξ) térképére teljesül az alábbi két feltétel egyike:
(1) Az (U, ξ) benne van az $\mathcal{A}$ atlaszban, azaz $(U, \xi) \in \mathcal{A}$.
(2) Az $\mathcal{A}$ atlaszban van olyan térkép, amely nem C^∞–kompatibilis az (U, ξ) térképpel.

Megjegyzés. A fenti definíció szerint akkor mondjuk teljesnek az M–nek egy C^∞–osztályú atlaszát, ha azt már nem lehet további térképekkel bővíteni.

Evidens, hogy amennyiben $\mathcal{A}$ egy teljes C^∞–osztályú atlasz és az (U, ξ) annak egy térképe, akkor tetszőleges $W \subset U$ nyílt részhalmaz esetén a φ leszűkítésével nyert $(W, \xi|W)$ térkép szintén eleme az $\mathcal{A}$–nak.

1.7. Állítás. *Az M topologikus sokaságon legyen adott egy C^∞–osztályú $\mathcal{A}$ atlasz. Egyételműen létezik az M–nek egy olyan teljes C^∞–osztályú $\mathcal{B}$ atlasza, amely tartalmazza $\mathcal{A}$–t.*

A bizonyítás vázlata.
Legyen $\mathcal{B}$ az M sokaság azon térképeinek az összessége, amelyek C^∞–kompatibilisek az

$\mathcal{A}$ atlasz bármely térképével. Evidens, hogy $\mathcal{B}$ egy olyan atlasza az M–nek, amely tartalmazza $\mathcal{A}$–t.

Mivel az $\mathbb{R}^m$–beli leképezések differenciálhatósága egy lokális tulajdonság, meg lehet mutatni, hogy a $\mathcal{B}$ atlasz is C^∞–osztályú. Ezt követően belátható, hogy a $\mathcal{B}$ atlasz teljes.

Legyen $\tilde{\mathcal{B}}$ egy olyan teljes C^∞–osztályú atlasza az M–nek, amely szintén tartalmazza $\mathcal{A}$–t. Ekkor nyilván fennáll $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$. Felhasználva a $\tilde{\mathcal{B}}$ teljességét, igazolni lehet a $\mathcal{B} \subset \tilde{\mathcal{B}}$ összefüggést, amiből $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}$ adódik. $\square$

Megjegyzés. Akkor mondjuk, hogy az M topologikus sokaságon meg van adva egy differenciálható struktúra, ha ki lett jelölve az M–nek egy teljes C^∞–osztályú atlasza.

A fenti állítás szerint az M–nek már egy C^∞–osztályú atlasza is elegendő a differenciálható struktúra meghatározásához.

Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy az $\mathbb{R}^m$ euklideszi téren végtelen sok egymástól különböző differenciálható struktúrát lehet megadni.

1.8. Definíció. Differenciálható sokaságon egy olyan $(M, \mathcal{A})$ párt értünk, ahol M egy m–dimenziós topologikus sokaság és $\mathcal{A}$ egy teljes C^∞–osztályú atlasza az M–nek.

Megjegyzés. A tömörség érdekében a differenciálható sokaság jelölésére az $(M, \mathcal{A})$ pár helyett többnyire csupán az M szimbólumot fogjuk használni. Amennyiben az M sima sokaságról szólunk, akkor ezen egy olyan M topológikus sokaságot értünk, amelyen egy teljes C^∞–osztályú atlasz is ki van jelölve.

Az euklideszi terek mint speciális sima sokaságok

Mint azt a Bevezetésben is említettük, az $\mathbb{R}^m$ téren mindig az euklideszi metrika által meghatározott topológiát fogjuk tekinteni.

Az identikus leképezést véve az m–dimenziós $\mathbb{R}^m$ topológikus sokaságnak az $(\mathbb{R}^m, id)$ pár egy globális térképe. (Ez a térkép egyedül képez egy C^∞–osztályú atlaszt az $\mathbb{R}^m$ sokaságon.) Az 1.7. Állítás szerint az $\mathbb{R}^m$ azon térképei, amelyek C^∞–kompatibilisek az $(\mathbb{R}^m, id)$ térképpel egy teljes C^∞–osztályú atlaszt képeznek.

A továbbiakban az $\mathbb{R}^m$–en mindig azt a differenciálható struktúrát vesszük, amelyet az $(\mathbb{R}^m, id)$ globális térkép meghatároz. Ezt szokás mondani az $\mathbb{R}^m$ természetes differenciálható struktúrájának.

A differenciálható sokaságon vett sima függvények tere

1.9. Definíció. Legyen adott egy M sokaság az $\mathcal{A}$ differenciálható struktúrával. Az M–en vett $f\colon M \to \mathbb{R}$ függvényt simának (vagy differenciálhatónak) mondjuk, ha tetszőleges $(U, \xi) \in \mathcal{A}$ térkép esetén az $f \circ \xi^{-1}\colon \xi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ függvény C^∞–osztályú.

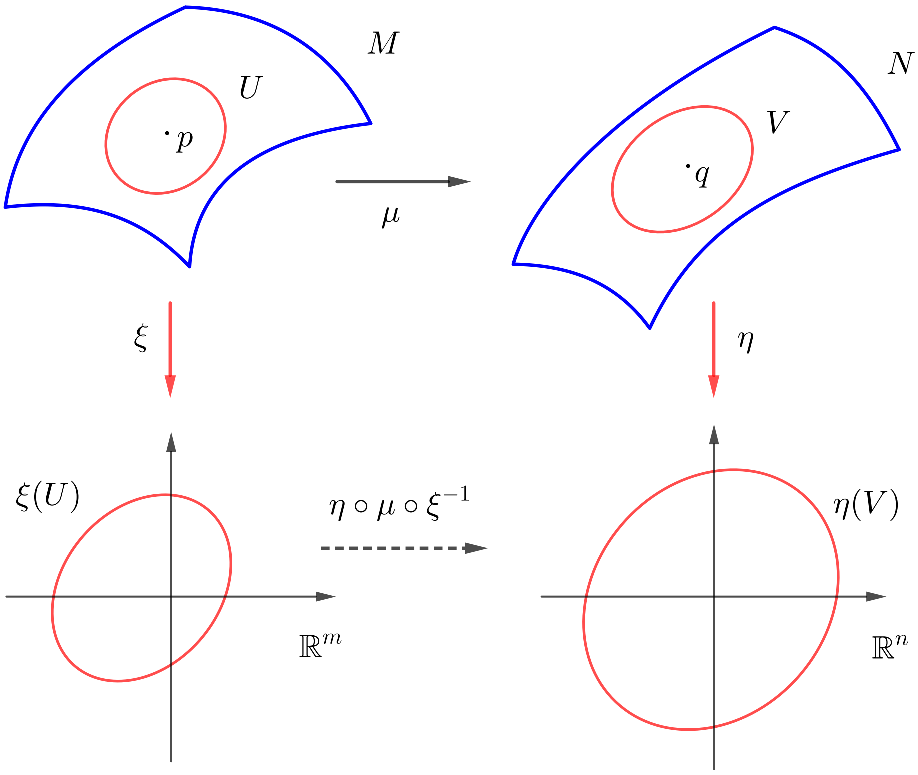
Jelölje $\mathcal{F}(M)$ az M sokaságon értelmezett sima függvények halmazát. Természetes módon lehet definiálni két sima függvény összegét és szorzatát. Evidens, hogy ezen műveletekre nézve az $\mathcal{F}(M)$ egy egységelemes kommutatív gyűrűt ad. Értelmezni lehet még az $\mathcal{F}(M)$–beli függvényeknek a skalárokkal (azaz a valós számokkal) vett szorzatait is. Ily módon az $\mathcal{F}(M)$ egy valós vektortérnek, illetve egy $\mathbb{R}$ feletti algebrának is tekinthető.

Differenciálható leképezések sokaságok között

1.10. Definíció. Legyenek adva az $(M,\mathcal{A})$ és $(N,\mathcal{B})$ differenciálható sokaságok, melyek dimenziója m és n. Egy $\mu\colon M\to N$ leképezést simának mondunk, ha bármely olyan $(U,\xi)\in\mathcal{A}$ és $(V,\eta)\in\mathcal{B}$ térképek esetén, ahol fennáll $\mu(U)\cap V\neq\emptyset$, a

$$\eta\circ\mu\circ\xi^{-1}\colon \xi(U\cap\mu^{-1}(V))\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

leképezés C^∞–osztályú.



2. ábra. *Egy $\mu: M\to N$ leképezés koordináta–kifejezése a (U,ξ) és (V,η) térképekkel.*

Megjegyzés. Az (1.1) kifejezésben szereplő leképezést a $\mu\colon M\to N$ leképezés (U,ξ) és (V,η) térképekre vonatkozó koordináta–kifejezésének nevezzük.

Megjegyzés. Tekintsük az $(M,\mathcal{A})$ és $(N,\mathcal{B})$ sima sokaságoknak egy–egy olyan C^∞–osztályú $\hat{\mathcal{A}}$ és $\hat{\mathcal{B}}$ atlaszát, amelyekre teljesül $\hat{\mathcal{A}}\subset\mathcal{A}$ és $\hat{\mathcal{B}}\subset\mathcal{B}$. Amennyiben a $\mu\colon M\to N$ leképezésre fennáll, hogy tetszőleges $(U,\xi)\in\hat{\mathcal{A}}$ és $(V,\eta)\in\hat{\mathcal{B}}$ térképeknél az $\eta\circ\mu\circ\xi^{-1}$ leképezés C^∞–osztályú, akkor ezen tulajdonságból már következik, hogy a μ összes koordináta–kifejezése C^∞–osztályú.

Megjegyzés. Világos, hogy amennyiben a $\mu\colon M\to N$ leképezés sima, akkor μ egyúttal folytonos is.

A sima leképezések kompozíciójára vonatkozik az alábbi egyszerű állítás.

1.11. Állítás. *Legyenek adva a* $\mu\colon M \to N$ *és* $\rho\colon N \to P$ *sima leképezések az* $(M,\mathcal{A})$, $(N,\mathcal{B})$, $(P,\mathcal{C})$ *sokaságok között. Ez esetben a* $\rho\circ\mu\colon M \to P$ *leképezés is differenciálható.*

A diffeomorf sokaságok

1.12. Definíció. Az $(M,\mathcal{A})$ és $(N,\mathcal{B})$ differenciálható sokaságok között értelmezett $\mu\colon M \to N$ sima leképezést diffeomorfizmusnak mondjuk, ha a μ bijektív és a $\mu^{-1}\colon N \to M$ inverz leképezés is differenciálható.

1.13. Definíció. Az $(M,\mathcal{A})$ és $(N,\mathcal{B})$ sima sokaságokat egymással diffeomorfaknak nevezzük, ha létezik egy $\mu\colon M \to N$ diffeomorfizmus.

Megjegyzés. Evidens, hogy a sima sokaságok diffeomorfizmusa egy ekvivalenciareláció.

Amennyiben a $\mu\colon M \to N$ leképezés egy diffeomorfizmust ad az $(M,\mathcal{A})$ és $(N,\mathcal{B})$ sima sokaságok között, akkor a sokaságok teljes C^∞–osztályú atlaszaira fennáll
$\mathcal{A} = \{\ (\mu^{-1}(V), \psi\circ\mu) \mid (V,\psi)\in\mathcal{B}\ \}$.

Megjegyzés. A sokaságok elméletének felépítése során nyilván felmerült az alapvető kérdés, hogy meg lehet–e adni egy topologikus sokaságon olyan differenciálható struktúrákat, amelyek egymással nem diffeomorf sima sokaságokat eredményeznek. Erre a problémára J. Milnor adott választ 1956–ban, amikor igazolta, hogy az S^7 szférán 28 olyan differenciálható struktúrát lehet megadni, amelyek egymással páronként nem diffeomorfak.

Igen meglepő eredményre jutott S. K. Donaldson 1983–ban. Bebizonyította be, hogy az $\mathbb{R}^4$ euklideszi téren van olyan differenciálható struktúra, amely nem diffeomorf az $\mathbb{R}^4$ természetes differenciálható struktúrájával. Ma már ismeretes, hogy az $\mathbb{R}^4$ euklideszi teret végtelen sok egymással nem diffeomorf differenciálható struktúrával lehet ellátni.

A nyílt részsokaság és a szorzatsokaság

Legyenek adott egy $(M,\mathcal{A})$ differenciálható sokaság. Tekintsük az M–nek egy U nyílt részhalmazát, továbbá vegyük U–n az M–től örökölt topológiát. Ily módon az U is egy m–dimenziós topologikus sokaságot ad.

Jelölje $\mathcal{A}_U$ az U azon térképeinek az összességét, amelyek benne vanak az M sokaság $\mathcal{A}$ atlaszában. Ez azt jelenti, hogy fennáll $\mathcal{A}_U = \{\ (V,\psi)\in\mathcal{A} \mid V\subset U\ \}$. Könnyen belátható, hogy az $\mathcal{A}_U$ egy teljes C^∞–osztályú atlasza az U topologikus sokaságnak.

1.14. Definíció. Az $(U,\mathcal{A}_U)$ sima sokaságot az $(M,\mathcal{A})$ differenciálható sokaság egyik nyílt részsokaságának nevezzük.

Legyenek adva az $(M,\mathcal{A})$ és $(N,\mathcal{B})$ sima sokaságok. Az $M\times N$ szorzaton vegyük azt a legdurvább topológiát, amelynél az M és N sokaságokra történő természetes projekciók még folytonos leképezések. Evidens, hogy az $M\times N$ halmazt ellátva ezen szorzattopológiával egy $(m+n)$–dimenziós topológikus sokaságot kapunk.

Vegyünk az $\mathcal{A}$ atlaszból egy (U,φ) térképet és $\mathcal{B}$–ből egy (V,ψ) térképet.
A $\varphi\times\psi\colon U\times V \to \mathbb{R}^{m+n}$ leképezés, ahol fennáll $\varphi\times\psi(p,q) = (\varphi(p),\psi(q))$ bármely $p\in U$ és $q\in V$ esetén, egy homeomorfizmust ad az $M\times N$ sokaság $U\times V$ nyílt halmaza és az $\mathbb{R}^{m+n}$–beli $\varphi(U)\times\psi(V)$ nyílt halmaz között, tehát az $(U\times V,\varphi\times\psi)$ pár egy térképe az $M\times N$ sokaságnak. Egyszerű belátni, hogy az összes így nyert térkép együttesen az

$M \times N$–nek egy C^∞–osztályú atlaszát alkotja. Az 1.7. Állításnak megfelelően ezt az atlaszt egyértelműen lehet kibővíteni az $M \times N$ sokaság egy teljes C^∞–osztályú atlaszává, amelyet most jelöljön $\mathcal{D}$.

1.15. Definíció. Az $(M \times N, \mathcal{D})$ sima sokaságot az $(M, \mathcal{A})$ és az $(N, \mathcal{B})$ differenciálható sokaságok szorzatsokaságának nevezzük.

A differenciálható sokaság sima görbéi

Legyen I egy nyílt intervallum az $\mathbb{R}$–ben, amelyet úgy tekintünk mint az $\mathbb{R}$ egy nyílt részsokaságát. Tehát ezen az (I, id) térkép határozza meg a differenciálhatósági struktúrát.

1.16. Definíció. Egy $\sigma\colon I \to M$ sima leképezést az M differenciálható sokaság egy sima görbéjének mondunk.

Az M–beli $\sigma(I)$ alakzatot a σ görbe pályájának nevezzük.

A Lie–csoport fogalma

Legyen adott egy olyan $(G, \mathcal{A})$ sima sokaság, ahol a G halmazon adva van egy $\cdot$ által jelölt kétváltozós művelet, amelyre nézve G egy csoport. Tekintsük a $G \times G$ szorzatsokaságot, továbbá azon a $\mu(g, h) = g \cdot h \quad (g,\ h \in G)$ összefüggéssel leírt $\mu\colon G \times G \to G$ leképezést. A G sokaságon vegyük azt a $\iota\colon G \to G$ leképezést, ahol fennáll $\iota(g) = g^{-1}$ tetszőleges $g \in G$ esetén.

1.17. Definíció. A G sokaságot Lie–csoportnak nevezzük, ha a $\mu\colon G \times G \to G$ és $\iota\colon G \to G$ leképezések differenciálhatóak.

Megjegyzés. Evidens, hogy az $\mathbb{R}^m$ euklideszi tér egy Lie–csoportot ad az összeadásra nézve.

Figyelembe véve az 1 abszolút értékű komplex számokat és kvaterniókat belátható, hogy az S^1 és S^3 szférák a megfelelő szorzásművelettel ellátva Lie–csoportokat képeznek.

Nevezetes mátrix Lie–csoportok

Legyen $\mathbf{M}(n, \mathbb{R})$ az $n \times n$–es mátrixok tere az $\mathbb{R}$ valós számtest felett, melyet természetes módon azonosítani lehet az $\mathbb{R}^{n^2}$ térrel. Jelölje $GL(n, \mathbb{R})$ az invertálható mátrixok csoportját, amely az $\mathbb{R}^{n^2}$ euklideszi térnek egy nyílt részhalmaza. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $GL(n, \mathbb{R})$ egy Lie–csoportot képez a mátrixszorzásra nézve.

A $GL(n, \mathbb{R})$ általános lineáris csoport nevezetes részcsoportjai közé tartozik $SL(n, \mathbb{R}) = \{\, A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid det(A) = 1 \,\}$ és $SO(n) = \{\, A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A\,A^T = I,\ det(A) = 1 \,\}$. A részsokaságokra vonatkozó eredmények alapján igazolható, hogy az örökölt topológiával az $SL((n, \mathbb{R})$ egy $(n^2 - 1)$–dimenziós, az $SO(n)$ pedig egy $\frac{1}{2}n(n-1)$–dimenziós sokaságot ad. Nem nehéz belátni, hogy a mátrixszorzásra nézve ezek a sokaságok is Lie–csoportok.

2) A differenciálható sokaság érintőterei

A pontbeli érintővektor értelmezése

2.1. Definíció. Érintővektoron az M sima sokaság valamely p pontjában egy olyan $v_p\colon \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ leképezést értünk, amelyre tetszőleges $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ és $f,\ g \in \mathcal{F}(M)$ esetén fennállnak az alábbi összefüggések:
(1) $v_p(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot v_p(f) + \beta \cdot v_p(g)$,
(2) $v_p(fg) = v_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v_p(g)$.

Megjegyzés. A fenti definíció szerint az M sokaság p pontbeli érintővektora egy olyan lineáris forma a sima függvények $\mathcal{F}(M)$ terén, amely eleget tesz a (2) feltételnek. Egyébként a (2) összefüggést Newton–Leibniz–tulajdonságnak szokás nevezni, mivel az megfelel a szorzatfüggvény deriváltjára vonatkozó közismert egyenlőségnek.

A $v_p(f)$ számot az $f \in \mathcal{F}(M)$ függvény v_p érintővektor szerinti deriváltjának is mondjuk.

A továbbiakban 0_p–vel fogjuk jelölni azt az $\mathcal{F}(M)$ téren vett lineáris formát, amely az $\mathcal{F}(M)$ összes elemén 0 értéket vesz fel. Az M sokaság p pontbeli érintővektorainak halmazát jelölje T_pM.

A T_pM halmazon természetes módon adódik egy vektortér–struktúra. Legyen v_p és w_p a T_pM két tetszőleges eleme. Ezek összegén az $\mathcal{F}(M)$–nek azt a $v_p + w_p$ által jelölt lineáris formáját értjük, amelyre igaz $(v_p + w_p)(f) = v_p(f) + w_p(f)$ bármely $f \in \mathcal{F}(M)$ esetén. Amennyiben veszünk egy $\lambda \in \mathbb{R}$ számot, akkor v_p–nek a λ–val vett szorzatán azt a $\lambda\, v_p\colon \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ leképezést értjük, ahol fennáll $(\lambda\, v_p)(f) = \lambda \cdot v_p(f)$. Evidens, hogy $v_p + w_p$ és $\lambda\, v_p$ az M–nek egy–egy érintővektorát adják a p pontban. Nyilvánvaló az is, hogy az előbb értelmezett összeadásra és skalárral való szorzásra nézve T_pM egy vektorteret képez.

2.2. Definíció. A T_pM vektorteret az M sokaság p pontbeli érintőterének nevezzük.

A sokaság egy térképéhez tartozó alapvektorok

Vegyük az M differenciálható sokaság egy p pontját és egy p–beli $(U,\ x)$ lokális koordinátarendszerét. (Ez azt jelenti, hogy fennáll $p \in U$.) Mint ismeretes, az $x\colon U \to \mathbb{R}^m$ térképezés i–edik koordináta–függvényén az $x^i = u^i \circ x\colon U \to \mathbb{R}$ leképezést értjük $(i = 1, \ldots, m)$, ami egy sima függvény az U nyílt részsokaságon.

Tekintsük azt a $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\colon \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ leképezést, amelyet a

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p)(f) = \partial_i(f \circ x^{-1})\,(x(p))$$

összefüggés ír le tetszőleges $f \in \mathcal{F}(M)$ függvényre. Eszerint a $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)(f)$ érték megegyezik a C^∞–osztályú $f \circ x^{-1}\colon x(U) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ valós függvénynek az $x(p)$ pontban vett i–edik parciális deriváltjával. Könnyű belátni, hogy a $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ leképezés eleget tesz a 2.1. Definíció feltételeinek, azaz $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ egy érintővektora M–nek a tekintett p pontban.

2.3. Definíció. Az M sokaság p pontbeli $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ $(i = 1, \ldots, m)$ érintővektorait az $(U,\ x)$ térképhez tartozó alapvektoroknak mondjuk.

A dudorfüggvény és egy alkalmazása

Az alábbi kijelentést a későbbiek során többször is alkalmazni fogjuk.

2.1. Állítás. *Legyen adott az M sokaság egy U nyílt részhalmaza és egy $p \in U$ pont. Van olyan $f \in \mathcal{F}(M)$ sima függvény, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*
(1) Az f tartójára fennáll $\operatorname{supp} f \subset U$.
(2) Tetszőleges $q \in M$ pontbeli függvényértékre $0 \leq f(q) \leq 1$ teljesül.
(3) A p–nek van olyan V nyílt környezete, hogy bármely $q \in V$ pontra igaz $f(q) = 1$.

Könnyen igazolható, hogy amennyiben egy konstans $c \in \mathcal{F}(M)$ függvényt veszünk, akkor egy $p \in M$ pontban vett bármely v_p érintővektorra fennáll $v_p(c) = 0$.

A 2.1. Állítást alkalmazva könnyen igazolni lehet az alábbi kijelentést.

2.2. Állítás. *Az M sokaság egy p pontjában legyen adott egy v_p érintővektor. Amennyiben valamely $g,\ h \in \mathcal{F}(M)$ sima függvényeknek a p egy nyílt környezetére történő leszűkítései megegyeznek, akkor $v_p(g) = v_p(h)$ teljesül.*

Megjegyzés. Tekintsük az M–nek egy U nyílt részhalmazát és azon egy $g\colon U \to \mathbb{R}$ sima függvényt. Egy U–beli p pontot és egy $v_p \in T_pM$ érintővektort véve értelmezni lehet v_p–nek a g–n nyert értékét is az alábbiak szerint.

A 2.1. Állítást (vagyis a megfelelő dudorfüggvényt) alkalmazva konstruálni tudunk egy olyan $\hat{g} \in \mathcal{F}(M)$ sima függvényt, hogy a p–nek egy V ($V \subset U$) nyílt környezetén fennáll $\hat{g}|V = g|V$. A $g \in \mathcal{F}(U)$ függvénynek a v_p érintővektor szerinti deriváltján a $v_p(\hat{g})$ számot értjük. A 2.2. Állítás szerint ez az érték nem függ a $\hat{g}$ megválasztásától.

A következő állítás bizonyítása igen egyszerű.

2.3. Állítás. *Az M sokaság egy p pontjában vegyünk egy $(U,\, x)$ térképet. A $\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}(p)$ alapvektorok egy lineárisan független vektorrendszert adnak a T_pM érintőtérben.*

A valós függvényekre vonatkozó segédtétel

A továbbiakban azt szeretnénk megmutatni, hogy az M sokaság érintőterei m–dimenziós vektorterek. Ennek bizonyításához azonban szükségünk van egy segédtételre.

Rögzítsük az $\mathbb{R}^m$ euklideszi tér egy $a = (a_1, \ldots, a_m)$ pontját és annak egy ε sugarú $B_\varepsilon(a)$ gömbkörnyezetét ($\varepsilon > 0$). Valamely $b \in B_\varepsilon(a)$ pontot tekintve vegyük a $\gamma_b\colon [0,1] \to B_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R}^m$ sima görbét, amelyet a $\gamma_b(\tau) = (1-\tau)\, a + \tau\, b$ ($\tau \in [0,1]$) egyenlet határoz meg. Eszerint a γ_b leképezés éppen az $a,\ b$ pontokat összekötő szakaszt írja le.

Legyen adva egy $g\colon B_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tetszőlegesen sokszor differenciálható (más szóval sima) függvény. A g–nek az i–edik parciális derivált függvényét jelölje most $D_i g$ $(i = 1, \ldots, m)$. Definiáljuk a $P_i g\colon B_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ függvényt a

$$P_i g\,(b) = \int_0^1 (D_i g \circ \gamma_b)(\tau)\, d\tau = \int_0^1 D_i g\,((1-\tau)a + \tau b)\, d\tau$$

$(\, b \in B_\varepsilon(a)\,)$ formulával. Igazolható, hogy ezen $P_i g$ függvények ugyancsak C^∞–osztályúak.

2.1. Lemma. *A $g\colon B_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sima függvény kifejezhető a*

$$g = g(a) + \sum_{i=1}^{m} u^i \cdot P_i g - \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot P_i g \tag{2.1}$$

formában.

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges $b \in B_\varepsilon(a)$ pontot. A $g \circ \gamma_b \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ valós függvényre alkalmazzuk a Newton–Leibniz–formulát. Ily módon a

$$g(b) - g(a) = g \circ \gamma_b(1) - g \circ \gamma_b(0) = \int_0^1 (g \circ \gamma_b)'(\tau)\, d\tau \tag{2.2}$$

összefüggéshez jutunk. A $g \circ \gamma_b$ összetett függvény deriválásával a

$$(g \circ \gamma_b)'(\tau) = \sum\nolimits_{i=1}^{m} (b_i - a_i) \cdot D_i g\,(\gamma_b(\tau)) \qquad (\tau \in [0,1])$$

egyenlet adódik. Ha ezt behelyettesítjük (2.2)–be és figyelembe vesszük a $P_i g$ $(i = 1, \ldots, m)$ függvények fenti definícióját, a

$$g(b) - g(a) = \sum\nolimits_{i=1}^{m} (b_i - a_i) \cdot P_i g\,(b) \tag{2.3}$$

összefüggést nyerjük. Az $u^i \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ koordináta–függvényeket alkalmazva (2.3)–ból már következik a

$$g(b) = g(a) + \sum\nolimits_{i=1}^{m} (u^i(b) - a_i) \cdot P_i g\,(b) \qquad (b \in B_\varepsilon(a))$$

összefüggés. Mivel ez az $\mathbb{R}^m$–beli $B_\varepsilon(a)$ nyílt gömb tetszőleges b elemére fennáll, teljesül a (2.1) egyenlet.

Megjegyzés. Tekintsük a (2.1) összefüggésben szereplő $P_i g \colon B_\varepsilon(a) \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ függvényeknek az ε sugarú gömbkörnyezet a centrumában felvett értékeit. Mivel $\forall\, \tau \in [0,1]$ esetén fennáll $\gamma_a(\tau) = a$, így egyszerűen a

$$P_i g\,(a) = \int_0^1 (D_i g \circ \gamma_a)(\tau)\, d\tau = D_i g\,(a) \tag{2.4}$$

egyenlőséget nyerjük.

Az érintőtérre vonatkozó alaptétel

Vegyük az m–dimenziós M differenciálható sokaság egy p pontját és egy p–beli (U, x) lokális koordináta–rendszerét. Az $x \colon U \to \mathbb{R}^m$ térképezés tartományának alkalmas leszűkítésével egy olyan (W, x) térképet nyerünk, ahol az $\mathbb{R}^m$–beli $x(W)$ nyílt tartomány egybeesik az $a = x(p)$ pont valamely ε sugarú $B_\varepsilon(a)$ gömbkörnyezetével ($\varepsilon > 0$). A továbbiakban egy ilyen (W, x) térképet használunk.

Legyen v egy érintővektora M–nek a p pontban. Mint ismeretes, a $v(f) \in \mathbb{R}$ érték csupán az $f \in \mathcal{F}(M)$ függvény p–beli lokális viselkedésétől függ. Ily módon a W nyílt részsokaságon definiált sima függvényeken is értelmezni tudjuk v értékét (más szóval ezen függvények v szerinti deriváltját). Ha $\tilde{f}$ jelöli az $f \in \mathcal{F}(M)$ függvény W nyílt tartományra való leszűkítését, akkor fennáll a $v(\tilde{f}) = v(f)$ egyenlőség. A v érintővektornál tehát tekinthetjük az $x^i = u^i \circ x$ $(i = 1, \ldots, m)$ koordináta–függvényeken felvett $v(x^i) \in \mathbb{R}$ értékeket is.

Ennyi előkészítés után már ki tudjuk mondani a sokaságok tárgyalása során oly gyakran alkalmazott tételt.

2.1. Tétel. *Az M sokaságnak a p pontban vett tetszőleges v érintővektora előáll a $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ $(i = 1, \ldots, m)$ alapvektorok lineáris kombinációjaként a*

$$v = \sum_{i=1}^{m} v(x^i) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \tag{2.5}$$

formában.

Bizonyítás.

Be fogjuk látni, hogy tetszőleges $f \in \mathcal{F}(M)$ függvény esetén fennáll a

$$v(f) = \sum_{i=1}^{m} v(x^i) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(p)\,(f) \tag{2.6}$$

egyenlőség. Nyilvánvaló, hogy a (2.6) összefüggésből már következik (2.5) teljesülése.

A $g = f \circ x^{-1} \colon B_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ függvényre (ahol $a = x(p)$) alkalmazzuk a 2.1. Lemmában szereplő (2.1) kifejezést. Eszerint fennáll az

$$f \circ x^{-1} = f \circ x^{-1}(a) + \sum_{i=1}^{m} u^i \cdot P_i(f \circ x^{-1}) - \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot P_i(f \circ x^{-1})$$

egyenlet. Vegyük a fenti egyenletben szereplő függvények kompozícióját az $x \colon W \to \mathbb{R}^m$ térképezéssel. Ily módon az f–nek a W nyílt tartományra való $\tilde{f}$ leszűkítése az

$$\tilde{f} = f(p) + \sum_{i=1}^{m} (u^i \circ x) \cdot \big(P_i(f \circ x^{-1}) \circ x\big) - \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \big(P_i(f \circ x^{-1}) \circ x\big)$$

alakban fejezhető ki. Vegyük észre, hogy a jobb oldali összeg első tagja konstans, és csak a második tagban szerepelnek szorzatfüggvények.

A v érintővektornak egy szorzatfüggvényen felvett értéke eleget tesz az ún. Newton–Leibniz–tulajdonságnak. Ily módon az $\tilde{f}$ függvénynek a v szerinti deriváltja a

$$v(\tilde{f}) = 0 + \sum_{i=1}^{m} v(x^i) \cdot P_i(f \circ x^{-1})(a) + \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot v\big(P_i(f \circ x^{-1}) \circ x\big) - \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot v\big(P_i(f \circ x^{-1}) \circ x\big)$$

egyenlettel írható fel. Egyszerűsítés után a fenti kifejezésből a

$$v(f) = v(\tilde{f}) = \sum_{i=1}^{m} v(x^i) \cdot P_i(f \circ x^{-1})(x(p))$$

összefüggést nyerjük. Innen a (2.4) egyenlet felhasználásával a (2.6)–nak megfelelő

$$v(f) = \sum_{i=1}^{m} v(x^i) \cdot D_i(f \circ x^{-1})(x(p)) = v(x^i) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(p)\,(f)$$

egyenlőséget kapjuk.

Az előbb bizonyított tétel szerint az $(U,\, x)$ térképhez tartozó $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ $(i = 1, \dots, m)$ alapvektorok már generálják a T_pM érintőteret. A 2.3. Állításban már kimondtuk, hogy ezek a T_pM–beli vektorok lineárisan függetlenek. Ezáltal igaz a következő kijelentés.

Következmény. *Legyen $(U,\, x)$ egy lokális koordináta–rendszere az M differenciálható sokaságnak. Tekintsük az U térképtartomány egy p pontját. A p–beli T_pM érintőtérnek egy bázisát képezik az $(U,\, x)$ térképhez tartozó $\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}(p)$ alapvektorok.*

Megjegyzés. A $p \in M$ pontban vegyünk egy másik $(V,\, y)$ egy lokális koordináta–rendszert. A $(V,\, y)$ térképhez tartozó p–beli $\frac{\partial}{\partial y^i}(p)$ $(i = 1, \dots, m)$ alapvektorok szintén egy bázisát adják a T_pM érintőtérnek. A (2.5) összefüggés alapján belátható, hogy

$$\frac{\partial}{\partial y^i}(p) = \sum_{r=1}^{m} D_i(x^r \circ y^{-1})(y(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial x^r}(p)$$

teljesül. Eszerint az $(U,\, x)$ és $(V,\, y)$ térképek alapvektoraira vonatkozó bázistranszformációt a C^∞–osztályú $x \circ y^{-1} \colon y(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ átmenet–leképezés $y(p)$–beli Jacobi–mátrixa írja le.

A nyílt részsokaság érintőtereinek azonosítása a tartalmazó sokaság érintőtereivel

Vegyük az M sima sokaság egy U nyílt részsokaságát és egy $p \in U$ pontot.

Egy p–beli $v \in T_pM$ érintővektorhoz rendeljük hozzá a $\tilde{v} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathbb{R}$ leképezést, amelyet az alábbiak szerint értelmezünk. Legyen adott egy $g \in \mathcal{F}(U)$ sima függvény. A 2.1. Állítás felhasználva tekintsünk egy olyan $\hat{g} \in \mathcal{F}(M)$ függvényt, amelynek a p egy V $(V \subset U)$ nyílt környezetére való leszűkítése megegyezik a g leszűkítésével, azaz fennáll $\hat{g}|V = g|V$. A $\tilde{v}$ leképezés g–beli értéke definíció szerint legyen $\tilde{v}(g) = v(\hat{g})$.

Látható, hogy $\tilde{v}$ egy érintővektora az U sokaságnak a p pontban. Azt is könnyű igazolni, hogy ez a hozzárendelés egy lineáris izomorfizmust ad a T_pM és T_pU érintőterek között. Ezen izomorfizmus a két vektortér egy természetes azonosítását határozza meg.

A továbbiakban az U nyílt részsokaság érintőterét és a tartalmazó M sokaság érintőterét bármely $p \in U$ pontban azonosnak tekintjük.

Az euklideszi terek érintőterei

Tekintsük a természetes differenciálható struktúrával ellátott $\mathbb{R}^m$ euklideszi teret, továbbá az $(\mathbb{R}^m,\, id)$ globális térképet. Ezen térkép koordináta–függvényei az $u^i \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ projekciók $(i = 1, \dots, m)$.

Vegyünk $\mathbb{R}^m$–ben egy $p = (p_1, \dots, p_m)$ pontot és egy $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ sima függvényt. A 2.3. Definíció szerint az $(\mathbb{R}^m,\, id)$ térképhez tartozó $\dfrac{\partial}{\partial u^i}(p)$ alapvektornak az f–en nyert értékére fennáll $\frac{\partial}{\partial u^i}(p)(f) = D_i f(p)$, vagyis az f–nek a $\frac{\partial}{\partial u^i}(p)$ érintővektor szerinti deriváltja megegyezik az f függvény i–edik parciális deriváltjával a p helyen.

A $\frac{\partial}{\partial u^i}(p)$ $(i = 1, \dots, m)$ vektorok egy természetes bázisát adják a $T_p\mathbb{R}^m$ érintőtérnek. Amennyiben az $\mathbb{R}^m$ lineáris tér tetszőleges $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m v_i\, \mathbf{e}_i$ vektorának megfeleltetjük a p pontbeli $v = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial u^i}(p)$ érintővektort, akkor egy izomorfizmust kapunk az $\mathbb{R}^m$ és T_pM vektorterek között. Ily módon az $\mathbb{R}^m$ euklideszi tér érintőtereit azonosítani lehet az $\mathbb{R}^m$ lineáris térrel. (Ezt nevezik a $T_p\mathbb{R}^m$ és $\mathbb{R}^m$ vektorterek természetes azonosításának.)

Megjegyzés. A klasszikus differenciálgeometriában úgy tudtuk elkerülni az elmélet teljes formalizmusának az időigényes kidolgozását, hogy kihasználtuk a fenti azonosítást.

Tekintsük az 1–dimenziós $\mathbb{R}$ euklideszi teret, továbbá egy C^∞–osztályú $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Egy $t \in \mathbb{R}$ pontban az $(\mathbb{R}, id)$ térképhez tartozó alapvektort jelölje $\dfrac{d}{du}(t)$. Nyilvánvaló, hogy ennek a g függvényen nyert értékére fennáll $\frac{d}{du}(t)(g) = g'(t)$.

A lineáris érintőleképezés

Legyen adott egy $\mu\colon M \to N$ sima leképezés az M és N differenciálható sokaságok között. Tekintsünk egy $v \in T_pM$ érintővektort a $p \in M$ pontban. Feleltessük meg v–nek azt a $v_\mu\colon \mathcal{F}(N) \to \mathbb{R}$ leképezést, amelyre igaz $v_\mu(g) = v(g \circ \mu)$ tetszőleges $g \in \mathcal{F}(N)$ esetén.

Könnyen ellenőrizhető, hogy v_μ egy érintővektort ad az N sokaság $\mu(p)$ pontjában.

2.4. Definíció. Azt a $T_p\mu\colon T_pM \to T_{\mu(p)}N$ leképezést, ahol tetszőleges $v \in T_pM$ esetén fennáll $T_p\mu(v) = v_\mu$, a μ érintőleképezésének mondjuk a $p \in M$ pontban.

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy a $T_p\mu$ egy lineáris leképezés az érintőterek között.

Megjegyzés. Legyenek adott egy $\mu\colon M \to N$ sima leképezés. Tekintsük az M egy p pontját és abban egy (U, x) térképet, továbbá az N sokaság egy (V, y) térképét a $\mu(p)$ pontban. A (2.5) összefüggés alapján adódik, hogy fennáll a

$$T_p\mu\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\Big) = \sum_{j=1}^{n} D_i(y^j \circ \mu \circ x^{-1})(x(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial y^j}(\mu(p)) \tag{2.7}$$

egyenlet $(i = 1, \ldots, m)$. Eszerint a $T_p\mu$ érintőleképezést a T_pM–beli $\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}(p)$ és a $T_{\mu(p)}N$–beli $\frac{\partial}{\partial y^1}(\mu(p)), \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}(\mu(p))$ bázisokra nézve az $y \circ \mu \circ x^{-1}\colon x(U \cap \mu^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ leképezés $x(p)$–beli Jacobi–mátrixa írja le.

A következő összefüggést az érintőleképezésre vonatkozó *láncszabálynak* szokás mondani.

2.4. Állítás. *Legyenek adva a $\mu\colon M \to N$ és $\rho\colon N \to P$ sima leképezések. Ez esetben tetszőleges $p \in M$ pontban fennáll $T_p(\rho \circ \mu) = T_{\mu(p)}\rho \circ T_p\mu$.*

A differenciálható sokaság sima görbéi

Legyen I egy nyílt intervallum az $\mathbb{R}$–ben, amelyet úgy tekintünk mint az $\mathbb{R}$ egy nyílt részsokaságát.

2.5. Definíció. Egy $\sigma\colon I \to M$ sima leképezést az M differenciálható sokaság egy sima görbéjének mondunk.

2.6. Definíció. A $\sigma\colon I \to M$ sima görbének a $t \in I$ helyen vett érintővektorán a $\sigma(t)$ pontbeli $\dot\sigma(t) = T_t\sigma(\frac{d}{du}(t))$ vektort értjük.

Megjegyzés. A definíciókból adódik, hogy egy $f \in \mathcal{F}(M)$ függvénynek a $\dot\sigma(t)$ érintővektor szerinti deriváltjára $\dot\sigma(t)(f) = (f \circ \sigma)'(t)$ teljesül.

Tegyük fel, hogy a $\sigma\colon I \to M$ sima görbe pályája benne van az M egy (U, x) térképének az U tartományában. Ez esetben az $x^i \circ \sigma\colon I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ differenciálható függvényeket a σ görbe (U, x) térképre vonatkozó koordináta–függvényeinek nevezzük. Könnyen belátható, hogy a σ–nak a $t \in I$ helyen vett érintővektorára fennáll

$$\dot{\sigma}(t) = \sum_{i=1}^{m} (x^i \circ \sigma)'(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(\sigma(t)) .$$

A sima vektormezők és az integrálgörbék

Az M érintőtereit diszjunkt halmazoknak tekintve jelölje TM azok unióját. Eszerint TM az M összes érintővektorának a halmaza, amelyet az M sokaság *érintőnyalábjának* nevezünk.

2.7. Definíció. Az M sokaságon vett vektormezőn egy olyan $Y\colon M \to TM$ leképezést értünk, ahol bármely $p \in M$ pontban fennáll $Y(p) \in T_pM$.

Tekintsünk az M sokaságon egy Y vektormezőt és egy $f \in \mathcal{F}(M)$ függvényt. Ez esetben értelmezni lehet az $Yf\colon M \to \mathbb{R}$ leképezést, amelyre igaz $Yf(p) = Y(p)(f)$ $(p \in M)$.

2.8. Definíció. Az M egy Y vektormezőjét simának mondjuk, ha tetszőleges $f \in \mathcal{F}(M)$ esetén az $Yf\colon M \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható.

2.9. Definíció. Az M sokaság egy (U, x) térképéhez tartozó i–edik alapvektormezőn azt a $\frac{\partial}{\partial x^i}\colon U \to TU$ leképzést értjük, amely az U térképtartomány tetszőleges p pontjához a $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ érintővektort rendeli.

Megjegyzés. Evidens, hogy az M egy (U, x) térképéhez tartozó alapvektormezők sima vektormezők az U nyílt részsokaságon.

Megjegyzés. Legyen Y egy vektormező az M sokaságon és legyen (U, x) egy térképe az M–nek. A 2.1. Tételnek megfelelően az Y bármely $p \in U$ pontbeli értéke egyértelműn kifejezhető az $Y(p) = \sum_{i=1}^{m} \eta^i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ formában, ahol fennáll $\eta^i(p) = Y(p)(x^i)$. Ily módon m számú $\eta^i\colon U \to \mathbb{R}$ függvényt nyerünk az U nyílt részsokaságon, melyeket nevezzünk el az Y mező (U, x) térképre vonatkozó koordináta–függvényeinek.

Nem nehéz belátni, hogy az Y vektormező sima akkor és csak akkor, ha az M bármely térképére vonatkozó koordináta–függvényei differenciálhatóak.

A sima vektormező integrálgörbéi

Az M differenciálható sokaságon legyen adott egy Y sima vektormező.

2.10. Definíció. A $\sigma\colon I \to M$ sima görbét az Y integrálgörbéjének mondjuk, ha tetszőleges $t \in I$ helyen fennáll $\dot{\sigma}(t) = Y(\sigma(t))$.

Tegyük fel, hogy a $\sigma\colon I \to M$ sima görbe pályája benne van az (U, x) térkép U tartományában. Tekintsük a görbe $\sigma_i = x^i \circ \sigma$ $(i = 1, \ldots, m)$ koordináta–függvényeit és az Y–nak megfelelő $\eta^i\colon U \to \mathbb{R}$ sima függvényeket, melyekre igaz $\eta^i = (Y|U)x^i$. Vegyük emellett az $x(U) \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmazon az $F_i = \eta^i \circ x^{-1}$ összefüggéssel meghatározott $F_i\colon x(U) \to \mathbb{R}$ C^∞–osztályú függvényeket.

Látható, hogy a σ akkor integrálgörbéje az Y–nak, ha teljesülnek a $\sigma_i' = \eta^i \circ \sigma$ egyenlőségek. Ez egyenértékű azzal, hogy bármely $t \in I$ pontban fennállnak a

$$\sigma_i'(t) = F_i(\sigma_1(t), \ldots, \sigma_m(t)) \tag{2.8}$$

$(i = 1, \dots, m)$ összefüggések.

A differenciálegyenlet–rendszerekre vonatkozó alaptétel és (2.8) alapján már könnyen belátható az alábbi kijelentés.

2.5. Állítás. *Az M sokaságon legyen adott egy Y sima vektormező. Tetszőleges $p \in M$ pont esetén van az Y–nak olyan $\sigma \colon I \to M$ integrálgörbéje, amelyre igaz $0 \in I$ és $\sigma(0) = p$.*

Megjegyzés. Legyenek $\sigma \colon I \to M$ és $\gamma \colon I \to M$ olyan integrálgörbéi az Y–nak, hogy valamely $t_0 \in I$ helyen igaz $\sigma(t_0) = \gamma(t_0)$. Ez esetben fennáll $\sigma = \gamma$.

Megjegyzés. Az Y sima vektormező egy $\sigma \colon I \to M$ integrálgörbéjét maximálisnak mondjuk, ha nincs olyan $\gamma \colon J \to M$ integrálgörbe, amelyre teljesül $I \subset J$, $I \neq J$ és $\gamma | I = \sigma$.

A 2.5. Állítást élesíteni lehet az alábbi formában. *Az Y–nak egyérteműen létezik egy olyan $\sigma \colon I \to M$ maximális integrálgörbéje, amelyre igaz $0 \in I$ és $\sigma(0) = p$.*

A Lie–algebrák

Mint ismeretes, valós algebrán egy olyan $\mathcal{A}$ vektorteret értünk az $\mathbb{R}$ számtest felett, amelyen az összeadás mellett egy $\cdot$ szorzásművelet is értelmezve van, és fennállnak az alábbi tulajdonságok:
Bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ és $a,\ b \in \mathcal{A}$ esetén igaz $\lambda(a \cdot b) = (\lambda\, a) \cdot b = a \cdot (\lambda\, b)$.
Tetszőleges $a,\ b,\ c \in \mathcal{A}$ vektorokkal teljesül $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ és
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

2.11. Definíció. Legyen adott egy olyan $\mathcal{A}$ valós algebra, ahol az $a,\ b \in \mathcal{A}$ elemek szorzatát $[a, b]$ jelöli. Az $\mathcal{A}$–t Lie–algebrának nevezzük, ha tetszőleges $a,\ b,\ c \in \mathcal{A}$ elemekre teljesülnek az alábbi összefüggések:
(1) $[a, b] + [b, a] = 0$.
(2) $\big[[a, b], c\big] + \big[[b, c], a\big] + \big[[c, a], b\big] = 0$.

Megjegyzés. Az előző definícióban szereplő (2) egyenlőséget Jacobi–azonosságnak nevezik. Könnyen belátható, hogy az $\mathbb{R}^3$ vektortér a vektoriális szorzással egy Lie–algebrát képez.

Megjegyzés. Legyen adott egy $\mathcal{A}$ algebra az asszociatív $\cdot$ szorzásművelettel. Vezessük be $\mathcal{A}$–an az $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$ összefüggéssel meghatározott $[\ ,\ ]$ műveletet. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy amennyiben a $[\ ,\ ]$ szorzásművelettel látjuk el az $\mathcal{A}$ vektorteret, egy Lie–algebrát kapunk.

Két sima vektormező Lie–zárójelének fogalma

Jelölje $\mathfrak{X}(M)$ az M sokaságon vett sima vektormezők halmazát. Természetes módon definiálni lehet két sima vektormező összegét, továbbá egy sima vektormezőnek egy skalárral vett szorzatát. Könnyű belátni, hogy ha az $\mathfrak{X}(M)$–en bevezetjük az összeadás és a skalárral való szorzás műveletét, akkor egy végtelen dimenziós vektorteret kapunk.

A továbbiakban egy Y vektormezőnek egy $p \in M$ pontbeli értékét $Y(p)$ mellett Y_p–vel is jelöljük a jobb áttekinthetőség érdekében.

2.12. Definíció. Az $X,\ Y \in \mathfrak{X}(M)$ sima vektormezők Lie–zárójelének egy $p \in M$ pontbeli értékén azt az $[X, Y]_p \colon \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ leképezést értjük, ahol fennáll
$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$ tetszőleges $f \in \mathcal{F}(M)$ esetén.

Megjegyzés. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $[X,Y]_p$ leképezés az M–nek egy érintővektora a p pontban.

2.13. Definíció. Az $X,\ Y \in \mathfrak{X}(M)$ sima vektormezők Lie–zárójelén azt az $[X,Y]\colon M \to TM$ vektormezőt értjük, amelynek a $p \in M$ pontbeli értéke azonos az $[X,Y]_p$ érintővektorral.

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy az $[X,Y]$ vektormező is sima, továbbá teljesül $[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \quad (f \in \mathcal{F}(M))$.

Nem nehéz belátni, hogy a sima vektormezők $\mathfrak{X}(M)$ tere a Lie–zárójel műveletre nézve egy Lie–algebrát képez.

Megjegyzés. Tekintsük az M sokaság egy $(U,\, x)$ térképét és az ahhoz tartozó $\frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ alapvektormezőket. Látható a definícióból, hogy két alapvektormező Lie–zárójele, ami egy sima vektormező az U nyílt részsokaságon, mindig eltűnik.

Vegyünk egy $g \in \mathcal{F}(M)$ függvényt és egy $Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőt. Értelmezhető a $gY : M \to TM$ sima vektormező, ahol bármely $p \in M$ pontban fennáll $gY(p) = g(p) \cdot Y(p)$. Ezt nevezzük g és az Y szorzatának.

Eszerint a sima vektormezők $\mathfrak{X}(M)$ terét úgy is tekinthetjük, mint egy modulust az $\mathcal{F}(M)$ kommutatív gyűrű felett.

Egyszerűen levezethető, hogy tetszőleges $f,\ g \in \mathcal{F}(M)$ függvények és $X,\ Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén fennáll

$$[f\,X, g\,Y] = f\,g\,[X,Y] + f\,(Xg)\,Y - g\,(Yf)\,X\,.$$

Sima leképezések osztályozása az érintőleképezés alapján

2.14. Definíció. A $\mu\colon M \to N$ sima leképezést immerziónak (illetve szubmerziónak) mondjuk egy $p \in M$ pontban, ammennyiben a $T_p\mu$ érintőleképezés injektív (illetve szürjektív).

Amennyiben az M bármely p pontjában a $T_p\mu$ leképezés injektív (illetve szürjektív), akkor a μ–t immerziónak (illetve szubmerziónak) nevezzük.

2.15. Definíció. A $\mu\colon M \to N$ sima leképezésről azt mondjuk, hogy az egy lokális diffeomorfizmus a $p \in M$ pontban, ha a p–nek van olyan U nyílt környezete, amelyre a μ–t leszűkítve egy diffeomorfizmust kapunk az $U \subset M$ és $\mu(U) \subset N$ nyílt részsokaságok között.

Megjegyzés. Evidens, hogy amennyiben a $\mu\colon M \to N$ sima leképezés egy lokális diffeomorfizmus a $p \in M$ pontban, akkor a $T_p\mu$ érintőleképezés egy lineáris izomorfizmus.

Az inverz leképezés tétele alapján bizonyítható a következő kijelentés.

2.2. Tétel. *Legyen adott egy olyan $\mu\colon M \to N$ sima leképezés, ahol valamely $p \in M$ pontban a $T_p\mu$ érintőleképezés egy lineáris izomorfizmus. Ekkor a μ egy lokális diffeomorfizmust ad p–ben.*

3) A differenciálható sokaságok részsokaságai

A sima függvény pontbeli differenciálja

Legyen adott egy $f\colon M \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény az M sokaságon. Valamely $p \in M$ pontban tekintsük azt a $df(p)\colon T_pM \to \mathbb{R}$ leképezést, amelyet a $df(p)(v) = v(f)$ összefüggés ír le tetszőleges $v \in T_pM$ esetén. Evidens, hogy a $df(p)$ egy lineáris formát ad a T_pM érintőtéren.

3.1. Definíció. A $df(p)$ lineáris formát az M sokaságon vett f sima függvény p pontbeli differenciáljának nevezzük.

Megjegyzés. Amennyiben egy g sima függvény nem a teljes M sokaságon, hanem csak a $p \in M$ pont egy nyílt környezetén van értelmezve, akkor is definiálni lehet a p–beli $dg(p)\colon T_pM \to \mathbb{R}$ differenciált.

Az M sokaság T_pM érintőterének a duális terét a továbbiakban T_p^*M fogja jelölni. Legyen (U, x) egy térképe az M–nek a kijelölt p pontban. Vegyük a térképezés koordináta–függvényeinek a p–beli $dx^i(p)$ $(i = 1, \ldots, m)$ differenciáljait. Evidens, hogy az így nyert T_p^*M–beli $dx^1(p), \ldots, dx^m(p)$ bázis duálisa a T_pM–beli $\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}(p)$ bázisnak.

3.2. Definíció. A $df : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ leképezést, ahol bármely $Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőre fennáll $df(Y) = Yf$, az $f \in \mathcal{F}(M)$ függvény differenciáljának mondjuk.

Az érintőleképezés által indukált lineáris leképezés

Legyenek V és W valós vektorterek, ezek dimenziója legyen m és n. A V vektortér duális terét (azaz a V lineáris formáinak terét) jelölje V^*. Vegyünk egy $\alpha : V \to W$ lineáris leképezést, amelyet a V–beli $e_1, \ldots, e_m$ és a W–beli $b_1, \ldots, b_n$ bázisvektorokra nézve az $n \times m$–es $\mathbf{A}$ mátrix ír le. Eszerint az $\mathbf{A}$ mátrix A_i^j elemeivel teljesülnek az $\alpha(e_i) = \sum_{j=1}^{n} A_i^j \cdot b_j$ $(i = 1, \ldots, m)$ egyenlőségek.

Tekintsük azt az $\alpha^* : W^* \to V^*$ leképezést, ahol tetszőleges $\eta \in W^*$ lineáris forma és $v \in V$ vektor esetén fennáll $\alpha^*(\eta)(v) = \eta(\alpha(v))$. Mint ismeretes, az α^* lineáris leképezést az α által a duális terek között *indukált leképezésnek* mondjuk.

Könnyen be lehet látni, hogy az eredeti bázisok $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m$ és $\beta^1, \ldots, \beta^n$ duális bázisaival fennáll $\alpha^*(\beta^j) = \sum_{i=1}^{m} A_i^j \cdot \varepsilon^i$ $(j = 1, \ldots, n)$. Ennek következtében az α és α^* lineáris leképezések rangja megegyezik. Ily módon azt kapjuk, hogy az α leképezés injektív (illteve szürjektív) akkor és csak akkor, ha az α^* indukált leképezés szürjektív (illteve injektív).

Legyen adott egy $\mu\colon M \to N$ sima leképezés az M és N sokaságok között. Valamely $p \in M$ pontban tekintsük a $T_p\mu\colon T_pM \to T_{\mu(p)}N$ érintőleképezést. A $T_p\mu$ által indukált lineáris leképezést jelölje $T_p^*\mu\colon T_{\mu(p)}^*N \to T_p^*M$.

Vegyük az M–nek egy $(U,\, x)$ térképét a p pontban, továbbá az N sokaságnak egy $(V,\, y)$ térképét a $\mu(p)$ pontban. A (2.7) összefüggésből adódik, hogy fennállnak a

$$T_p^*\mu\Big(dy^j(\mu(p))\Big) = \sum_{i=1}^{m} D_i(y^j \circ \mu \circ x^{-1})(x(p)) \cdot dx^i(p)$$

$(j = 1, \ldots, n)$ egyenletek.

Megjegyzés. Az N sokaságon vett tetszőleges $h \in \mathcal{F}(N)$ függvény esetén teljesül a $d(h \circ \mu)(p) = T_p^*\mu(dh(\mu(p)))$ összefüggés a pontbeli differenciálokra.

A sokaság sima függvényeiből nyert térképezés

3.3. Definíció. Legyenek adva az M sokaságon az $y^1, \ldots, y^k \in \mathcal{F}(M)$ sima függvények. Ezekről azt mondjuk, hogy függetlenek a $p \in M$ pontban, ha a T_p^*M–beli $dy^1(p), \ldots, dy^k(p)$ vektorok lineárisan függetlenek.

A következő kijelentést a 2.2. Tétel felhasználásával lehet a legkönnyebben bizonyítani.

3.1. Állítás. *Legyenek $y^1, \ldots, y^m \in \mathcal{F}(M)$ olyan sima függvények az M sokaságon, amelyek függetlenek a $p \in M$ pontban. Tekintsük azt az $y\colon M \to \mathbb{R}^m$ sima leképezést, amelyre fennáll $y(q) = (y^1(q), \ldots, y^m(q))$ bármely $q \in M$ pontban. Ez esetben a p–nek van olyan U nyílt környezete, hogy az $(U,\ y|U)$ pár egy térképe az M sokaságnak és ez a térkép benne van az M differenciálható struktúráját meghatározó teljes C^∞–osztályú atlaszban.*

3.2. Állítás. *Legyen a P egy k–dimenziós az M pedig egy m–dimenziós differenciálható sokaság. Legyen a $\mu : P \to M$ egy olyan sima leképezés, amely immerziót ad egy $p \in P$ pontban. Tekintsük az M sokaságnak egy (U, x) térképét a $\mu(p)$ pontban. Ez esetben az $x^i \circ \mu : \mu^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ sima függvények közül kiválasztható k számú oly módon, hogy a kiválasztott függvényeknek a p pont egy megfelelő nyílt környezetére vett leszűkítései egy térképezését adják a P sokaságnak.*

A részsokaság értelmezése

3.4. Definíció. A P differenciálható sokaságot az M részsokaságának mondjuk, ha teljesül az alábbi két feltétel.
(1) A P az M–nek részhalmaza, és a P sokaság topológiája azonos az M által indukált altér–topológiával.
(2) A $\iota : P \to M$ természetes injekció egy immerzió.

Megjegyzés. Legyen P egy k–dimenziós részsokasága az M–nek. Amennyiben fennáll $k = m$, akkor P egy nyílt részsokaság az M–ben.

Tegyük fel, hogy $k < m$ teljesül. Ez esetben egy $p \in P$ pontbeli T_pP érintőteret (a $T_p\iota$ injektív leképezés által) azonosítani lehet a T_pM–nek egy k–dimenziós alterével.

Egy térkép koordináta–szeletei

Felhasználva a sokaság térképeit könnyen lehet példát mutatni alacsonyabb dimenziójú részsokaságokra.

Tekintsük az M sima sokaságnak egy (U, x) térképét és egy $(c_1, \ldots, c_m) \in x(U) \subset \mathbb{R}^m$ elemet. Valamely k $(1 \leq k < m)$ egész számhoz vegyük az

$$S = \{\ q \in U \ \mid\ x^{k+j}(q) = c_{k+j}\ \ (j = 1, \ldots, m-k)\ \}$$

ponthalmazt és azon az U–ból (vagyis az M–ből) származtatott altér–topológiát. Evidens, hogy ily módon az S egy k–dimenziós topológikus sokaságot képez.

3.5. Definíció. Az indukált topológiával ellátott S ponthalmazt az (U, x) térkép egyik k–dimenziós koordináta–szeletének nevezzük.

Legyen a $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ leképezés az $\mathbb{R}^m$ tér természetes projekciója az $\mathbb{R}^k$–ba. Ez nyilván azt jelenti, hogy bármely $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ esetén fennáll $\pi(a_1, \ldots, a_m) = (a_1, \ldots, a_k)$. Tekintsük a $\tilde{x} = \pi \circ x|S$ leképezést, amely egy homeomorfizmust ad S és az $\mathbb{R}^k$–beli $\tilde{x}(S)$ nyílt halmaz között. Az $(S, \tilde{x})$ teljes térkép meghatároz egy differenciálható struktúrát az

S topológikus sokaságon. *A továbbiakban egy koordináta–szeleten mindig ezt a természetes differenciálható struktúrát fogjuk tekinteni.*

Az $(S, \tilde{x})$ és az (U, x) térképeket alkalmazva könnyen igazolható, hogy a $\iota : S \to M$ természetes injekció egy immerzió. Ily módon az S koordináta–szelet egy részsokasága az M–nek.

A differenciálható sokaság részsokaságainak jellemzése

Mint ismeretes, egy P sima sokaságot akkor mondunk az M részsokaságának, ha P részhalmaza M–nek, a P–beli topológia megegyezik az M–ből nyert altér–topológiával, továbbá a $\iota : P \to M$ természetes leképezés (ahol $\iota(p) = p$ bármely $p \in P$–re) egy immerzió.

A következő tétel szerint egy részsokaságot minden esetben elő lehet állítani koordináta–szeletek uniójaként.

3.1. Tétel. *Legyen P egy k–dimenziós részsokasága az M sokaságnak* $(1 \leq k < m)$. *Ekkor tetszőleges $p \in P$ pontban meg lehet adni az M–nek egy olyan (U, x) térképét, hogy az $U \cap P$ ponthalmaz megegyezik az (U, x) térkép egyik k–dimenziós koordináta–szeletével.*

Bizonyítás.

Tekintsük az M egy olyan $(\hat{U}, z)$ térképét a $p \in P$ pontban, amelyre fennáll $z(p) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$. Mivel a $\iota : P \to M$ természetes injekció egy immerzió, a P–beli $\hat{U} \cap P$ nyílt tartományon vett $z^i \circ \iota : \hat{U} \cap P \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ sima függvények p–beli $d\big(z^1 \circ \iota\big)(p), \ldots, d\big(z^m \circ \iota\big)(p)$ differenciáljai generálják a k–dimenziós T_p^*P vektorteret. Eszerint a $z^i \circ \iota$ $(i = 1, \ldots, m)$ függvények közül ki lehet választani k darabot oly módon, hogy azok függetlenek a p pontban. Az általánosság elvének megsértése nélkül feltehetjük, hogy az első k függvény rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

A 3.1. Állítás következtében a P sokaságon van a p–nek olyan W nyílt környezete, hogy a $z^j \circ \iota$ $(j = 1, \ldots, k)$ függvényeknek a W–re való leszűkítései egy térképezését adják P–nek. Eszerint az $y : W \to \mathbb{R}^k$ leképezéssel, amelynek koordináta–függvényeire fennáll $y^j = z^j \circ \iota | W$ $(j = 1, \ldots, k)$, a P részsokaság (W, y) lokális koordináta–rendszerét kapjuk. Nyilvánvaló, hogy a $\pi(a_1, \ldots, a_m) = (a_1, \ldots, a_k)$ összefüggéssel leírt $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ természetes projekciót alkalmazva teljesül $y = \pi \circ z \circ \iota | W$.

Tekintsük az $f^i = z^i \circ \iota \circ y^{-1}$ összefüggéssel meghatározott $f^i : y(W) \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ differenciálható függvényeket az $\mathbb{R}^k$–beli $y(W)$ nyílt tartományon. Emellett vegyük az M–ben a p pontnak egy olyan V nyílt környezetét, amelyre teljesül $V \subset \hat{U}$, $V \cap P \subset W$ és $\pi \circ z(V) \subset y(W)$.

Legyen $x : V \subset M \to \mathbb{R}^m$ az a leképezés $\mathbb{R}^m$–be, amelynek koordináta–függvényei

$$x^j = z^j | V \ \ (j = 1, \ldots, k) \qquad \text{s} \qquad x^i = (z^i - f^i \circ \pi \circ z) | V \ \ (i = k+1, \ldots, m).$$

Evidens, hogy az x^r $(r = 1, \ldots, m)$ komponens–függvények differenciálhatóak. Fejezzük ki ezen függvények p–beli differenciáljait a T_p^*M duális érintőtér $dz^1(p), \ldots, dz^m(p)$ bázisvektoraiból. Könnyű belátni, hogy

$$dx^r(p) = \textstyle\sum_{i=1}^m dx^r(p)\Big(\frac{\partial}{\partial z^i}(p)\Big) \cdot dz^i(p) = \sum_{i=1}^m D_i\big(x^r \circ z^{-1}\big)(z(p)) \cdot dz^i(p).$$

teljesül. Az egyszerűség kedvéért alkalmazzuk a $B_i^r = D_i\big(x^r \circ z^{-1}\big)(z(p))$ $(r,\, i = 1, \ldots, m)$ jelölést.

Amennyiben fennáll $1 \leq j \leq k$, akkor az $x^j \circ z^{-1} = z^j \circ z^{-1}|z(V) = u^j|z(V)$ összefüggés következtében $B_i^j = \delta_i^j$ $(i = 1, \dots, m)$ adódik.

Tekintsük most a $k < r \leq m$ esetet. Ekkor az $x^r \circ z^{-1} = (u^r - f^r \circ \pi)|z(V)$ egyenlőségből következik, hogy $B_i^r = \delta_i^r - D_i\big(f^r \circ \pi\big)(z(p))$ teljesül. Ha még azt is feltesszük, hogy fennáll $i > r$, akkor a $D_i\big(f^r \circ \pi\big)(z(p)) = 0$ és $B_i^r = \delta_i^r$ összefüggésekhez jutunk.

A fent leírtak alapján a B_i^r $(r,\, i = 1, \dots, m)$ együtthatókból képzett $\mathbf{B}$ mátrix főátlójában végig 1 szerepel és a főátló felletti elemek eltűnnek. Ebből már adódik, hogy a $\mathbf{B}$ mátrix invertálható, tehát az x^i $(i = 1, \dots, m)$ függvények p pontban vett $dx^1(p), \dots, dx^m(p)$ differenciáljai is egy bázisát adják a T_p^*M duális érintőtérnek.

Egy korábbi eredményünk szerint ekkor az M–ben a p–nek van olyan U $(U \subset V)$ nyílt környezete, hogy az $x : V \to \mathbb{R}^m$ leképezésnek az U–ra történő leszűkítése egy térképezése az M–nek. Az U tartomány megfelelő megválasztásával azt is el tudjuk érni, hogy fennálljon a $\pi \circ z(U) = y(U \cap P)$ összefüggés. Tekintsük az így nyert (U, x) lokális koordináta–rendszert, továbbá ennek az
$S = \{\ q \in U \mid x^r(q) = 0\ (r = k+1, \dots, m)\ \}$ k–dimenziós koordináta–szeletét.

Vegyünk egy tetszőleges $q \in U \cap P$ pontot. Látható, hogy $r > k$ esetében fennáll

$$x^r(q) = z^r(q) - z^r \circ \iota \circ y^{-1} \circ \pi \circ z(q) = z^r(q) - z^r \circ \iota \circ y^{-1} \circ y(q) = 0,$$

tehát $q \in S$ teljesül.

Tekintsünk most egy $t \in S$ pontot. Az U tartományra vonatkozó fenti feltevés szerint van olyan $q \in U \cap P$ pont, amelyre igaz $\pi \circ z(t) = y(q)$. Ily módon a t, q pontok (U, x) térképbeli koordinátáira $x^r(t) = 0 = x^r(q)$ $(r = k+1, \dots, m)$ mellett az $x^j(t) = x^j(q)$ $(j = 1, \dots, k)$ egyenlőségek is teljesülnek, amiből $t = q$ adódik.

A fentiek szerint fennáll $U \cap P = S$, vagyis az (U, x) egy olyan térkép, amelynek az $U \cap P$ ponthalmaz az egyik koordináta–szelete.

A 3.1. Tétel előbbi bizonyítása egyúttal az alábbi kijelentést is igazolja.

3.2. Tétel. *Legyen adva egy $\iota : P \to M$ immerziója a k–dimenziós P sokaságnak az M sokaságba $(1 \leq k < m)$. Tetszőleges $p \in P$ pontot véve meg lehet adni az M–nek egy olyan $\iota(p)$–beli (U, x) térképét és a p–nek egy olyan W nyílt környezetét P–ben, hogy az $U \cap \iota(W)$ ponthalmaz megegyezik az (U, x) térkép egyik k–dimenziós koordináta-szeletével.*

3.3. Állítás. *Legyen a P egy részsokasága az M–nek, továbbá legyen adott egy olyan $\mu : N \to M$ differenciálható leképezés az N sokaságból az M–be, amelyre fennáll $\mu(N) \subset P$. Tekintsük azt a $\tilde{\mu} : N \to P$ leképezést, ahol $\tilde{\mu}(q) = \mu(q)$ igaz tetszőleges $q \in N$ esetén. Ekkor a $\tilde{\mu}$ leképezés is sima.*

Az előbbi kijelentés alapján már könnyen bizonyítani lehet a következő állítást.

3.4. Állítás. *Legyen a P egy olyan részhalmaza az M differenciálható sokaságnak, hogy az indukált altér–topológiával a P egy topológikus sokaság. Ez esetben a P–n legfeljebb egyféleképpen adható meg olyan differenciálható struktúra, amelyre nézve a P részsokasága az M–nek.*

Eddigi eredményeinket felhasználva már igazolható az alábbi tétel.

3.3. Tétel. *Legyen P egy olyan részhalmaza az M sokaságnak, ahol tetszőleges $p \in P$ pontban az M–nek van olyan (U, ξ) térképe, hogy az $U \cap P$ metszethalmaz annak egy k–dimenziós koordináta–szelete ($1 \leq k < m$). Ekkor P egy topologikus sokaság, amelyen egyértelműen létezik egy olyan differenciálható struktúra, hogy arra nézve P egy k–dimenziós részsokaságát képezi az M–nek.*

Bizonyítás.

A P részhalmazon vegyük az úgynevezett altér–topológiát. Mint ismeretes, ezen topológiában P–nek egy részhalmaza akkor nyílt, ha előáll egy M–beli nyílt halmaz és P metszeteként. Nem nehéz belátni, hogy az így nyert P topologikus tér is Hausdorff–féle és megszámlálható bázisú.

Legyen (U, ξ) egy olyan térképe M–nek egy $p \in P$ pontban, hogy az $U \cap P$ metszet megegyezik ezen térképezés egyik k-dimenziós koordináta–szeletével. A ξ térképezés koordináta–függvényeire szokás szerint alkalmazzuk az $x^i = u^i \circ \xi$ $(i = 1, \ldots, m)$ jelölést. Mivel $U \cap P$ egy koordináta–szelet, valamely $c_{k+1}, \ldots, c_m$ konstansokkal fennáll az

$$U \cap P = \{\ q \in U \ \mid \ x^{k+j}(q) = c_{k+j} \ \ (j = 1, \ldots, m-k)\ \}$$

összefüggés. Tekintsük az $\mathbb{R}^m$ tér $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ természetes projekcióját az $\mathbb{R}^k$ euklideszi térre, amelyet a $\pi(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_m) = (v_1, \ldots, v_k)$ összefüggés ír le. Vegyük észre, hogy a π projekció egy folytonos és nyílt leképezés. Ez alapján már adódik, hogy a szeletre leszűkített $\pi \circ \xi | U \cap P : U \cap P \to \mathbb{R}^k$ leképezés egy homeomorfizmust ad a P–beli $U \cap P$ nyílt halmaz és az $\mathbb{R}^k$–beli $\pi \circ \xi(U \cap P)$ nyílt halmaz között, vagyis a P–beli $U \cap P$ nyílt halmaz homeomorf az $\mathbb{R}^k$ euklideszi tér egy nyílt részhalmazával. Mivel a P tetszőleges pontjának van ilyen környezete, az altér–topológiával ellátott P részhalmaz egy k–dimenziós topologikus sokaságot képez.

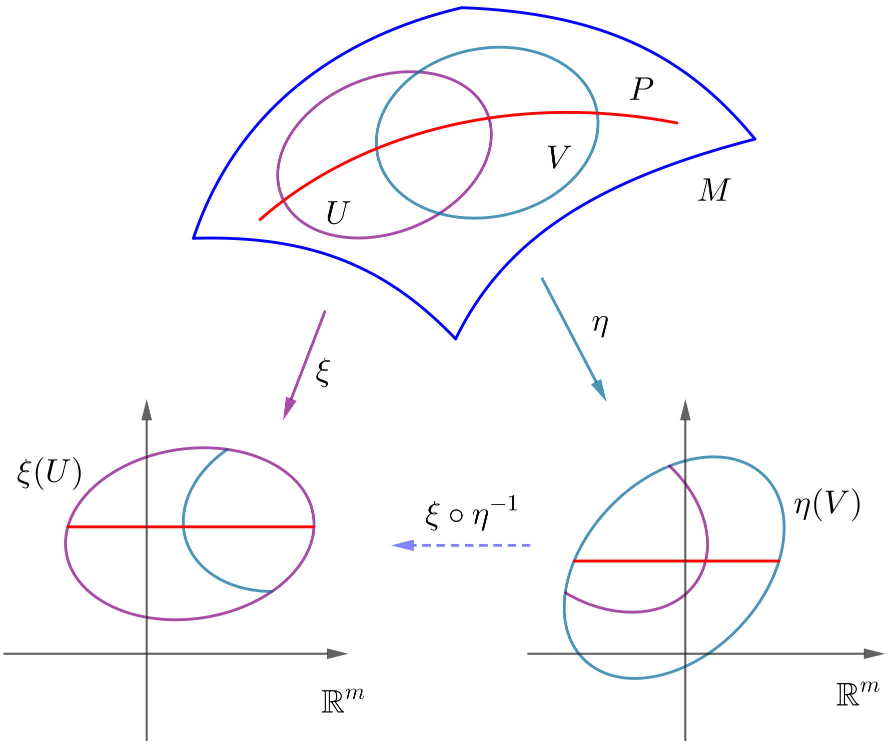
A továbbiakban az M–nek egy (U, ξ) térképét a P topologikus sokasághoz adaptált térképnek mondjuk, ha $U \cap P \neq \emptyset$ és az $U \cap P$ metszet egy koordináta–szelete a térképnek. Ez esetben alkalmazni fogjuk az $U_P = U \cap P$ és $\xi_P = \pi \circ \xi | U \cap P$ jelöléseket. Ily módon az (U_P, ξ_P) pár a P topologikus sokaság egy térképét adja, melyet az adaptált (U, ξ) térképből származtatott térképnek nevezünk.

Az alábbiak során igazoljuk, hogy a P sokaságnak az M–beli adaptált térképekből származtatott térképei C^∞–kompatibilisek. Az (U, ξ) mellett vegyük az M–nek egy másik olyan (V, η) térképét, amely a P–hez adaptált, vagyis amelynél az $V \cap P$ metszet szintén egy koordináta–szelet. Az η térképezés koordináta–függvényeire alkalmazzuk az $y^i = u^i \circ \eta$ $(i = 1, \ldots, m)$ jelölést. Legyenek b_{k+j} $(j = 1, \ldots, n-k)$ a $V_P = V \cap P$ szeletnek megfelelő valós számok, melyekkel fennáll

$$V \cap P = \{\ q \in V \ \mid \ y^{k+j}(q) = b_{k+j} \ \ (j = 1, \ldots, m-k)\ \}\,.$$

A fenti eljárás szerint ezen térképből a P topologikus sokaságnak egy (V_P, η_P) térképét nyerjük, amelynél a térképezés $\eta_P = \pi \circ \eta | V_P$.

Az $\mathbb{R}^k$ euklideszi tér $\eta_P(V_P)$ nyílt halmazán tekintsük azt a $\beta : \eta_P(V_P) \to \mathbb{R}^m$ leképezést, melyet a $\beta(v_1, \ldots, v_k) = (v_1, \ldots, v_k, b_{k+1}, \ldots, b_m)$ összefüggés ír le. Vegyük észre, hogy az η_P térképezés inverzére teljesül $\eta_P^{-1} = \eta^{-1} \circ \beta$.



3. ábra. *A P topologikus sokasághoz adaptált (U,ξ) és (V,η) térképek.*

Tegyük fel, hogy a P sokaság (V_P,η_P) és (U_P,ξ_P) térképeinek tartományai nem diszjunktak, azaz $U_P \cap V_P \neq \emptyset$. A fentiek alapján kapjuk, hogy az $\mathbb{R}^k$–beli $\eta_P(U_P \cap V_P)$ nyílt halmazon értelmezett $\xi_P \circ \eta_P^{-1} : \eta_P(U_P \cap V_P) \to \mathbb{R}^k$ valós függvény kifejezhető az

$$\xi_P \circ \eta_P^{-1} = (\pi \circ \xi) \circ (\eta^{-1} \circ \beta) = \pi \circ (\xi \circ \eta^{-1}) \circ \beta$$

alakban, vagyis előáll három C^∞–osztályú valós függvény kompozíciójaként. Ebből következik, hogy a $\xi_P \circ \eta_P^{-1}$ valós függvény is C^∞–osztályú. Ez pedig már igazolja, hogy a P sokaság (V_P,η_P) és (U_P,ξ_P) térképei C^∞–kompatibilisek egymással.

Mivel a P topologikus sokaságnak az M–beli adaptált térképekből származtatott térképei C^∞–kompatibilisek, ezek meghatároznak egy C^∞–osztályú teljes atlaszt, vagyis egy differenciálható struktúrát a P sokaságon.

Tekintsük a P sokaságon a származtatott térképekkel meghatározott differenciálható struktúrát. A fenti speciális térképeket alkalmazva könnyű belátni, hogy a $\iota : P \to M$ természetes injekció egy olyan sima leképezés, amely egy immerzió. Ezerint P egy sima részsokasága az M sokaságnak.

A 3.4. Állításból pedig az következik, hogy a P–n nem adható meg egy másik olyan differenciálható struktúra, amellyel teljesülnek a részsokaságra kiszabott feltételek. □

Megjegyzés. Legyen P egy részsokasága az M differenciálható sokaságnak. Tekintsük a $\iota : P \to M$ ternészetes injekciót, továbbá P–nek egy p pontját és abban a T_pP érintőteret. Emlékezzünk rá, hogy a 2.1. Definíció szerint T_pP elemei lineáris formák a sima függvények $\mathcal{F}(P)$ terén. A továbbiakban ezt a T_pP teret majd azonosnak tekintjük a T_pM érintőtér $T_p\iota(T_pP)$ alterével.

Sima leképezés reguláris értékének az inverz képe

3.6. Definíció. Legyen adott egy $\mu : M \to N$ sima leképezés. Egy $q \in N$ pontot a μ reguláris értékének mondunk, ha $q \in \mu(M)$ és μ érintőleképezése szürjektív a $\mu^{-1}(q)$ inverz kép összes pontjában.

A továbbiakban ha vesszük a sokaság egy részhalmazát, akkor azt egyúttal az altér–topológiával is ellátjuk. A legtöbb részhalmazról az alábbi tétel alkalmazásával lehet belátni, hogy egy részsokaságot képez a befoglaló sokaságban.

3.4. Tétel. *Legyen adott egy $\mu : M \to N$ differenciálható leképezés az M sokaságból az N sokaságba $(m > n)$. Amennyiben a $q \in \mu(M)$ pont egy reguláris értéke a μ–nek, akkor a $\mu^{-1}(q)$ ponthalmaz egy $(m-n)$–dimenziós részsokaságot ad az M sokaságban.*

Bizonyítás.

Legyen $q \in \mu(M)$ reguláris értéke a μ sima leképezésnek. Vegyük az N sokaságnak egy olyan (V, η) térképét a q pontban, amelyre fennáll $\eta(q) = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$. A térképezés koordináta–függvényeire alkalmazzuk a szokásos $y^r = u^r \circ \eta$ $(r = 1, \ldots, n)$ jelölést.

Legyen p egy pontja a $P = \mu^{-1}(q)$ inverz képnek. Tekintsük az M–nek egy olyan (W, ζ) térképét a p pontban, amelynek tartományára teljesül a $\mu(W) \subset V$ tartalmazás. A ζ térképezés koordináta–függvényei legyenek a $z^i = u^i \circ \zeta$ $(i = 1, \ldots, m)$ függvények.

Mivel a $T_p\mu : T_pM \to T_qN$ érintőleképezés szürjektív, a duális tereken vett $(T_p\mu)^* : T_q^*N \to T_p^*M$ indukált leképezés injektív. Emlékezzünk rá, hogy a koordináta–függvények differenciáljaival fennáll a $(T_p\mu)^*(dy^r(q)) = d(y^r \circ \mu)(p)$ összefüggés. Eszerint a $d(y^1 \circ \mu)(p), \ldots, d(y^n \circ \mu)(p)$ 1–formák lineárisan függetlenek a T_p^*M duális térben. Mivel a ζ térképezés koordináta–függvényeinek a $dz^1(p), \ldots, dz^m(p)$ differenciáljai egy bázist képeznek a T_p^*M térben, ezek közül kiválasztható $m - n$ számú oly módon, hogy azok a $d(y^r \circ \mu)(p)$ $(r = 1, \ldots, n)$ 1–formákkal kiegészítve is egy bázist alkotnak.

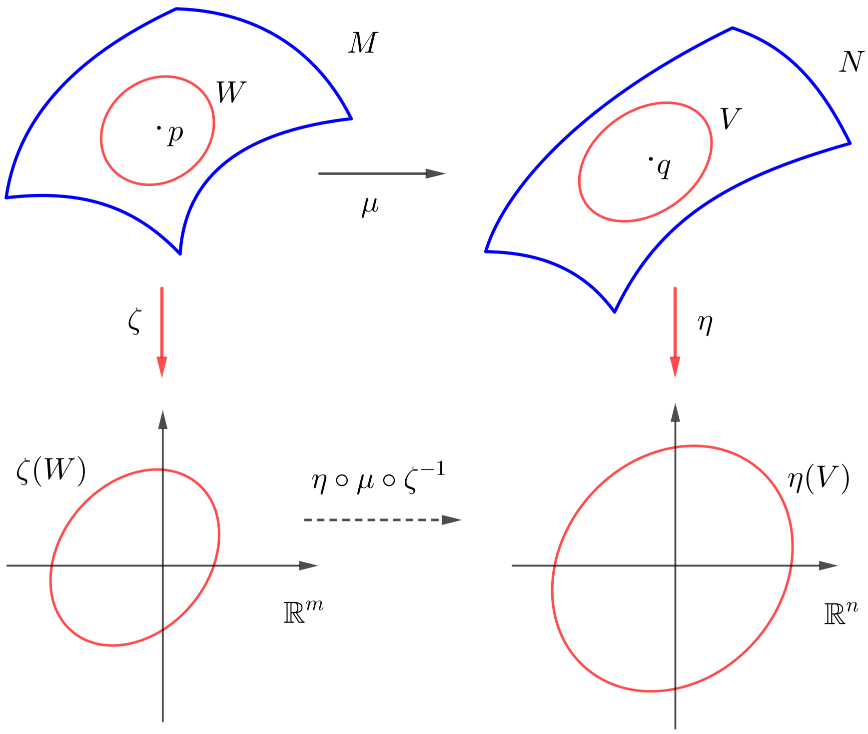
Vezessük be a $k = m-n$ jelölést. Az általánosság elvének megsértése nélkül feltehetjük, hogy a $dz^1(p), \ldots, dz^k(p),\ d(y^1 \circ \mu)(p), \ldots, d(y^n \circ \mu)(p)$ 1–formák egy bázisát képezik a T_p^*M duális térnek. Ugyanis, a koordináta–függvények megfelelő felcserélésével mindig el tudunk jutni egy ilyen (W, ζ) térképhez.

Tekintsük azon $x^i : W \to \mathbb{R}$ valós függvényeket, amelyekre fennáll $x^i = z^i$ amennyiben $i \leq k$, és $x^{k+r} = y^r \circ \mu$ $(r = 1, \ldots, n)$. Ezekből képezzük azt a $\xi : W \to \mathbb{R}^m$ sima leképezést az M–beli W nyílt halmazon, ahol $\xi(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ tetszőleges $t \in W$ esetén. Alkalmazzuk most a 3.1. Állítást. Mivel a $dx^1(p), \ldots, dx^m(p)$ 1–formák egy bázisát adják a T_p^*M duális térnek, létezik olyan a W által tartalmazott U halmaz, hogy $p \in U$ és ξ–nek az U–ra történő leszűkítése egy térkepezése az M sokaságnak.

Vegyük ξ–nek és koordináta–függvényeinek a p pont ezen U nyílt környezetére való leszűkítését. Ezekre a leszűkített függvényekre már nem alkalmazunk új jelölést. Tekintsük az (U, ξ) térképnek a $c_{k+r} = 0$ $(r = 1, \ldots, n)$ konstansokkal meghatározott $S = \{\ t \in U \mid x^{k+r}(t) = 0\ (r = 1, \ldots, n)\ \}$ k–dimenziós koordináta–szeletét. Ekkor tetszőleges $t \in U \cap P$ pontra fennállnak a $x^{k+r}(t) = y^r \circ \mu(t) = y^r(q) = 0$ $(r = 1, \ldots, n)$ összefüggések, amiből $U \cap P \subset S$ következik.

Ha pedig egy $t \in S$ pontot veszünk, akkor az $y^r(\mu(t)) = x^{k+r}(t) = 0$ $(r = 1, \ldots, n)$ egyenlőségekből $\eta(\mu(t)) = \mathbf{0}$ adódik, amiből $\mu(t) = q$ és $t \in P$ következik. Ezerint fennáll az $S \subset U \cap P$ tartalmazás is, vagyis $S = U \cap P$ teljesül.

Azt kaptuk, hogy a p pontbeli (U, ξ) térképnek $U \cap P$ metszet egy koordináta–szelete. Mivel a $P = \mu^{-1}(q)$ részhalmaz tetszőleges pontjához létezik ilyen M–beli térkép, a 3.3. Tétel szerint P egy részsokaságát képezi az M–nek. $\square$



4. ábra. *Egy $\mu : M \to N$ leképezés koordináta–kifejezése a (W, ζ) és (V, η) térképekkel.*

Megjegyzés. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ sokaságon azt a $\mu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sima leképezést, amelyre fennáll $\mu(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ tetszőleges $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ esetén. Könnyű belátni, hogy amennyiben a $q \in \mathbb{R}$ szám különbözik 0–tól, akkor q egy reguláris érték és $\mu^{-1}(q)$ egy hiperboloid az $\mathbb{R}^3$ térben.

Egyedül a 0 nem reguláris értéke μ–nek, és a $\mu^{-1}(q)$ alakzat egy forgáskúpot ad $\mathbb{R}^3$–ban. A forgáskúp nem képez részsokaságot.

A differenciálható beágyazás

3.7. Definíció. Az M sokaságnak egy N sokaságba történő differenciálható beágyazásán egy olyan $\iota : M \to N$ sima leképezést értünk, amelyre teljesül az alábbi két feltétel.
(1) A ι egy injektív immerzió.
(2) A ι egy homeomorfizmust ad az M sokaság és az N–beli $\iota(M)$ altér között.

Megjegyzés. Legyen adott egy $\iota : M \to N$ differenciálható beágyazás. A 3.2. Tétel alapján könnyen belátható, hogy a $\iota(M)$ ponthalmaz egy olyan m–dimenziós részsokasága az N–nek, amely diffeomorf az M–mel.

Megjegyzés. Nem nehéz példát mutatni olyan injektív immerzióra, amely nem ad differenciálható beágyazást. Tekintsük $\mathbb{R}^2$–ben a $D = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ nyílt halmazt Vegyük azon $\mathbf{r}\colon D \to \mathbb{R}^3$ differenciálható leképezést, ahol $\mathbf{r}(u, v) = (2 \sin u, \sin(2\,u), v)$ teljesül bármely $(u, v) \in D$ esetén. Az $\mathbf{r}(D)$ képalakzat egy olyan "hengerfelület", amelynek vezérgörbéje a nyolcas számjegyhez hasonlít. Látható, hogy az $\mathbf{r}(D)$ képalakzat nem adhat részsokaságot.

Megjegyzés. Az alábbi fontos eredményt, amelyet bizonyítás nélkül közlünk, Whitney tételeként tartják számon.

Bármely m–dimenziós M sokaságnak meg lehet adni egy differenciálható beágyazását a $(2m + 1)$–dimenziós $\mathbb{R}^{2m+1}$ euklideszi térbe.

Differenciálható beágyazások a felületelméletben

Idézzük fel a Klasszikus differenciálgeometria egyik alapvető definícióját.
Legyen D egy összefüggő nyílt halmaz $\mathbb{R}^m$–ben. Az $\mathbf{r}\colon D \to \mathbb{R}^{m+1}$ differenciálható leképezésről azt mondjuk, hogy egy sima elemi hiperfelületet ír le az $\mathbb{R}^{m+1}$ euklideszi térben, ha teljesül rá az alábbi két feltétel:
(1) Tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in D$ esetén az $\mathbf{r}$ leképezés Jacobi–mátrixának rangjára fennáll $rk\, \mathbf{Jr}(\mathbf{u}) = m$.
(2) Az $\mathbf{r}$ vektorfüggvény egy homeomorfizmust ad a D tartomány és az $\mathbf{r}(D) = \{\, \mathbf{r}(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in D \,\}$ ponthalmaz között.
Az $\mathbf{r}$ leképezés által leírt sima elemi hiperfelületen az $\mathbb{R}^{m+1}$–beli $M = \mathbf{r}(D)$ összefüggő alakzatot értjük.

Az (1) feltétel fennállásából adódik, hogy az $\mathbf{r}$ leképezés egy immerzió. Amennyiben (2) is teljesül, az $\mathbf{r}$ egy differenciálható beágyazását adja a $D \subset \mathbb{R}^m$ tartománynak $\mathbb{R}^{m+1}$–be.

Ily módon az $M = \mathbf{r}(D)$ hiperfelület egy m–dimenziós részsokasága az $\mathbb{R}^{m+1}$ euklideszi térnek. Alkalmazva az $\mathbf{r}^{-1}\colon M \to \mathbb{R}^m$ inverz leképezést nyilvánvaló, hogy az $(M,\, \mathbf{r}^{-1})$ pár egy globális térképét képezi az M sokaságnak.

4) Kovariáns deriválás a differenciálható sokaságon

Kovariáns tenzormezők a sokaságon

Mint ismeretes, az M differenciálható sokaság sima vektormezőinek $\mathfrak{X}(M)$ halmaza egy modulust képez a sima függvények $\mathcal{F}(M)$ gyűrűje felett.

A modulus fogalma valójában a vektortér fogalmával analóg. Mindkettő esetében értelmezve van az összeadás és a szorzás művelete, melyek eleget tesznek megadott feltételeknek. A különbség annyi, hogy míg a vektortér esetében egy számtest elemeivel történik a szorzás, addig a modulusnál egy kommutatív gyűrű elemeivel.

Vezessük be a tenzormező fogalmát.

4.1. Definíció. Az M sokaságon vett $(0,r)$ típusú tenzormezőn $(r\in\mathbb{N})$ egy olyan $Q:\mathfrak{X}(M)^r\to\mathcal{F}(M)$ leképezést értünk, amely az $\mathcal{F}(M)$ gyűrűre nézve r–lineáris, azaz tetszőleges $f\in\mathcal{F}(M)$ függvény és $Y_1,\dots,Y_i,\hat{Y}_i,\dots,Y_r$ $(1\le i\le r)$ vektormezők esetén fennállnak az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned} Q(Y_1,\dots,f\,Y_i,\dots,Y_r) &= f\cdot Q(Y_1,\dots,Y_i,\dots,Y_r),\\ Q(Y_1,\dots,Y_i+\hat{Y}_i,\dots,Y_r) &= Q(Y_1,\dots,Y_i,\dots,Y_r)+Q(Y_1,\dots,\hat{Y}_i,\dots,Y_r). \end{aligned}$$

Megjegyzés. A $(0,r)$ típusú Q tenzormezőt szokás r–szer kovariáns tenzormezőnek is mondani. Jelölje $\mathcal{T}_r^0(M)$ az M–en vett $(0,r)$ típusú tenzormezők halmazát. Ezen természetes módon értelmezhető az összeadás és az $\mathcal{F}(M)$ elemeivel való szorzás művelete. Ily módon $\mathcal{T}_r^0(M)$ is egy modulust képez az $\mathcal{F}(M)$ kommutatív gyűrű felett.

4.2. Definíció. Az M sokaságon vett $(1,r)$ típusú tenzormezőn $(r\in\mathbb{N})$ egy olyan $Q:\mathfrak{X}(M)^r\to\mathfrak{X}(M)$ leképezést értünk, amely az $\mathcal{F}(M)$ gyűrűre nézve r–lineáris.

Az alábbi állítás érvényben marad a $(0,r)$ típusú tenzormezők esetében is.

4.1. Állítás. *Legyen adott egy $(1,r)$ típusú $Q:\mathfrak{X}(M)^r\to\mathfrak{X}(M)$ tenzormező, továbbá legyenek adva az $Y_1,\dots,Y_r\in\mathfrak{X}(M)$ vektormezők. Ha egy $p\in M$ pontban valamelyik k $(1\le k\le r)$ indexre igaz $Y_k(p)=0_p$, akkor fennáll $Q(Y_1,\dots,Y_r)(p)=0_p$.*

Bizonyítás.

Tekintsük az M sokaság egy (U,ξ) térképét a p pontban. Szokás szerint vegyük a ξ térképezés $x^i=u^i\circ\xi$ $(i=1,\dots,m)$ koordináta-függvényeit az U térképtartományon. A térképezéshez tartozó alapvektormezőkre alkalmazzuk az $X_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$ jelölést. Ezeket az $X_i\in\mathfrak{X}(U)$ vektormezőket terjesszük a teljes sokaságra a 2.1. Állításban leírt dudorfüggvény alkalmazásával.

Vegyünk egy olyan $h:M\to\mathbb{R}$ nemnegatív valós függvényt, amelyre teljesülnek a $0\le h\le 1$, $\mathit{supp}\,h\subset U$ és $h(p)=1$ feltételek. Emlékezzünk rá, hogy a h függvény $\mathit{supp}\,h$ tartója azon pontok halmazának az M–beli lezártja, melyekben a h nem tűnik el, vagyis $\mathit{supp}\,h=\overline{\{\,p\in M\ \mid h(p)\ne 0\,\}}$.

Legyen $\tilde{X}_i$ $(i=1,\dots,m)$ az a vektormező az M sokaságon, amelyre a $q\in U$ esetben fennáll $\tilde{X}_i(q)=h(q)\cdot X_i(q)$, a $q\in M\setminus U$ pontbeli értékére pedig igaz $\tilde{X}_i(q)=0_q$. Világos, hogy $\tilde{X}_i$ egy sima vektormező az M–en.

Az Y_k vektormezőnek az U tartományra vonatkozó $Y_k|U$ leszűkitése egyértelműen fejezhető ki az X_i bázisvektormezőkkel. Legyenek $\eta_i:U\to\mathbb{R}$ $(i=1,\dots,m)$ azon sima függvények, melyekkel teljesül az $Y_k|U = \sum_{i=1}^{m} \eta_i\, X_i$ összefüggés. Ezeket a valós függvényeket is terjesszük ki az M sokaságra a fenti h dudorfüggvény felhasználásával. Legyen $\tilde{\eta}_i : M \to \mathbb{R}$ az a sima függvény az M sokaságon, amelyre egy $q \in U$ pontban fennáll $\tilde{\eta}_i(q) = h(q) \cdot \eta_i(q)$, a $q \in M \setminus U$ esetben pedig $\tilde{\eta}_i(q) = 0$.

Feltevésünk szerint az Y_k mező eltűnik a p pontban. Emiatt az $\tilde{\eta}_i$ $(i = 1, \dots, m)$ függvényekre teljesül $\tilde{\eta}_i(p) = 0$. Vegyük észre, hogy a h függvénnyel fennáll a $h^2 \cdot Y_k = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\eta}_i\, \tilde{X}_i$ összefüggés. Mindezek alapján a Q tenzormezőnek a vektormezőkön felvett p–beli értékére

$$Q(Y_1, \dots, Y_k, \dots, Y_r)(p) = (h^2 \cdot Q(Y_1, \dots, Y_k, \dots, Y_r))(p) =$$
$$= Q(Y_1, \dots, h^2\, Y_k, \dots, Y_r)(p) = Q(Y_1, \dots, \sum_{i=1}^{m} \tilde{\eta}_i\, \tilde{X}_i, \dots, Y_r)(p) =$$
$$= (\sum_{i=1}^{m} \tilde{\eta}_i \cdot Q(Y_1, \dots, \tilde{X}_i, \dots, Y_r))(p) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\eta}_i(p) \cdot Q(Y_1, \dots, \tilde{X}_i, \dots, Y_r)(p) = 0_p$$

adódik, ami igazolja az állítást. □

Az előző állítás alapján tudjuk bizonyítani az alábbi fontos eredményt.

4.2. Állítás. *Legyen adott egy $(1, r)$ típusú $Q : \mathfrak{X}(M)^r \to \mathfrak{X}(M)$ tenzormező. Amennyiben az $Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$ és $Z_1, \dots, Z_r \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőkre valamely $p \in M$ pontban fennáll $Y_k(p) = Z_k(p)$ $(k = 1, \dots, r)$, akkor $Q(Y_1, \dots, Y_r)(p) = Q(Z_1, \dots, Z_r)(p)$ teljesül.*

Bizonyítás.

Mivel az $Y_1 - Z_1$ vektormezőnek a p pontbeli értéke a 0_p nullvektor, a 4.1. Állítás szerint fennáll a

$$0_p = Q(Y_1 - Z_1, Y_2, \dots, Y_r)(p) = (Q(Y_1, Y_2, \dots, Y_r) - Q(Z_1, Y_2, \dots, Y_r))(p) =$$
$$= Q(Y_1, Y_2, \dots, Y_r)(p) - Q(Z_1, Y_2, \dots, Y_r)(p)$$

összefügés. Ebből pedig $Q(Y_1, Y_2, \dots, Y_r)(p) = Q(Z_1, Y_2, \dots, Y_r)(p)$ következik. Eszerint a Q tenzormezőnek a vektormezőkön felvett p–beli értéke nem változik, ha az Y_1 mezőt kicseréljük a Z_1 vektormezővel.

Hasonlóan adódik, hogy $(Y_2 - Z_2)(p) = 0_p$ teljesülése miatt az Y_2 vektormező kicserélhető a Z_2–vel, vagyis fennáll $Q(Z_1, Y_2, \dots, Y_r)(p) = Q(Z_1, Z_2, \dots, Y_r)(p)$.

Ezt az eljárást tovább folytatva, vagyis az Y_k mezőket egymás után kicserélve a Z_k vektormezőkre, végül azt kapjuk, hogy

$$Q(Y_1, Y_2, \dots, Y_r)(p) = Q(Z_1, Y_2, \dots, Y_r)(p) = Q(Z_1, Z_2, \dots, Y_r)(p) = \dots$$
$$= Q(Z_1, Z_2, \dots, Z_r)(p)\,. \;\square$$

A kovariáns tenzormező egy pontbeli értéke

Tekintsünk egy $(1,r)$ típusú $Q : \mathfrak{X}(M)^r \to \mathfrak{X}(M)$ tenzormezőt. A fenti 4.2. Állítás következtében a Q tetszőleges $p \in M$ pontban meghatároz egy $Q_p : (T_pM)^r \to T_pM$ leképezést, amelyet a következőképpen értelmezünk:

A $v_1, \ldots, v_r \in T_pM$ érintővektorokhoz vegyünk olyan $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőket, amelyekre igaz $Y_k(p) = v_k$ $(k = 1, \ldots, r)$. Definíció szerint $Q_p(v_1, \ldots, v_r)$ legyen egyenlő a $Q(Y_1, \ldots, Y_r)(p)$ vektorral.

Világos, hogy ezen Q_p leképezésre tetszőleges T_pM–beli $v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_r$, w_k vektorok és λ valós szám esetén fennállnak a

$$\begin{aligned} Q_p(v_1, \ldots, v_k + w_k, \ldots, v_r) &= Q_p(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_r) + Q_p(v_1, \ldots, w_k, \ldots, v_r), \\ Q_p(v_1, \ldots, \lambda \cdot v_k, \ldots, v_r) &= \lambda \cdot Q_p(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_r) \end{aligned}$$

összefüggések, vagyis Q_p egy r–lineáris leképezést ad a T_pM vektortéren.

Megjegyzés. Amennyiben egy $Q \in \mathcal{T}_r^0(M)$ tenzormező van adva, akkor a fentiek alapján bármely $p \in M$ pontban a Q meghatároz egy r–lineáris $Q_p : (T_pM)^r \to \mathbb{R}$ függvényt.

Megjegyzés. A $(0,1)$ típusú tenzormezőket elsőfokú differenciálformáknak is nevezzük. Ezek terét $\mathfrak{X}^*(M)$–mel is szokás jelölni.

Tekintsünk egy $f \in \mathcal{F}(M)$ függvényt. Evidens, hogy a $df : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ leképezés, amelyre igaz $df(Y) = Yf$ $(Y \in \mathfrak{X}(M))$, egy elsőfokú differenciálforma az M sokaságon.

Lineáris konnexió a sima sokaságon

Az eddigiek során csak a sokaságon vett sima függvények érintővektor szerinti deriváltját (vagy más szóval iránymenti deriváltját) értelmeztük. Amennyiben egy lineáris konnexiót is megadunk a sokaságon, akkor a vektormező érintővektor szerinti deriváltját is értelmezni lehet.

4.3. Definíció. Az M differenciálható sokaságon vett kovariáns deriváláson (vagy más szóval lineáris konnexión) egy olyan $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ leképezést értünk, amelyre tetszőleges X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők és $f \in \mathcal{F}(M)$ függvény esetén fennállnak az alábbi összefüggések:
(1) $\nabla(X + Y, Z) = \nabla(X, Z) + \nabla(Y, Z)$,
(2) $\nabla(fX, Y) = f \cdot \nabla(X, Y)$,
(3) $\nabla(X, Y + Z) = \nabla(X, Y) + \nabla(X, Z)$,
(4) $\nabla(X, fY) = f \cdot \nabla(X, Y) + (Xf)\,Y$.

Megjegyzés. A lineáris konnexióra vonatkozó (4) feltételből következik, hogy a ∇ nem képez (1,2) típusú tenzormezőt az M–en.

A $\nabla(X, Y)$ vektormezőt az Y mező X szerinti kovariáns deriváltjának mondjuk. Az egyszerűség érdekében ezen vektormezőre a $\nabla_X Y$ jelölést is szokás alkalmazni. Ez esetben a fenti négy feltétel az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} \nabla_{X+Y} Z &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z, \quad & \nabla_{fX} Y &= f \cdot \nabla_X Y, \\ \nabla_X (Y + Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z, \quad & \nabla_X (fY) &= (Xf) \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y\,. \end{aligned}$$

Megjegyzés. Könnyen lehet példát mutatni a kovariáns deriválásra. Tegyük fel, hogy az M egy olyan sokaság, amelyen léteznek olyan $Z_1, \dots, Z_m$ sima vektormezők, hogy tetszőleges $p \in M$ pontban a $Z_1(p), \dots, Z_m(p)$ vektorok egy bázisát adják a T_pM érintőtérnek. Rögzítsük ezen $Z_1, \dots, Z_m \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőket.

Tetszőleges $X,\ Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén vegyük azon egyértelműen meghatározott $\eta^i \in \mathcal{F}(M)$ $(i = 1, \dots, m)$ függvényeket, melyekkel fennáll $Y = \sum_{i=1}^m \eta^i Z_i$. Könnyű igazolni, hogy a $\nabla(X, Y) = \sum_{i=1}^m (X\eta^i) Z_i$ összefüggéssel leírt $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ leképezés egy kovariáns deriválást ad az M sokaságon.

Megjegyzés. Az $\mathbb{R}^m$ téren tekintsük az $(\mathbb{R}^m, id)$ globális térképpel meghatározott differenciálható struktúrát. Az $u^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$ projekciók, ahol fennáll $u^i(a_1, \dots, a_m) = a_i$, azonosak az $(\mathbb{R}^m, id)$ térkép koordináta–függvényeivel. Mint ismeretes, a $\frac{\partial}{\partial u^i}$ bázisvektormezőre $\frac{\partial}{\partial u^i} f = D_i f = \partial_i f$ teljesül $\forall\ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ esetén.

Az $\mathbb{R}^m$ téren vegyük a tetszőleges X és $Y = \sum_{i=1}^m \eta^i \dfrac{\partial}{\partial u^i}$ sima vektormezőket, ahol $\eta^i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$. A $\nabla_X Y = \sum_{i=1}^m (X\eta^i) \dfrac{\partial}{\partial u^i}$ összefüggéssel leírt kovariáns deriválást mondjuk az $\mathbb{R}^m$ tér *természetes lineáris konnexiójának.*

A vektormező érintővektor szerinti kovariáns deriváltja

Az M sokaságon legyen adva egy ∇ lineáris konnexió. Vegyünk egy $Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőt. Tekintsük a $Q_Y : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ leképezést, amelyet a $Q_Y(X) = \nabla_X Y$ összefüggéssel definiálunk. A 4.3. Definícióban szereplő (1), (2) feltételek alapján Q_Y egy (1,1) típusú tenzormezőt képez. A 4.2. Állítás következtében (rögzített Y esetén) a $\big(\nabla_X Y\big)(p)$ vektor csakis az X mező p–beli $X(p)$ értékétől függ.

A fentiek alapján értelmezni lehet egy vektormezőnek egy érintővektor szerinti kovariáns deriváltját is, amely egy vektort eredményez.

4.4. Definíció. Legyen adott az M–en egy Y sima vektormező és egy $v \in T_pM$ $(p \in M)$ érintővektor. Vegyünk egy olyan $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőt, amelyre fennáll $X(p) = v$. Az Y–nak a v szerinti kovariáns deriváltján a $\nabla_v Y = \big(\nabla_X Y\big)(p)$ vektort értjük.

A lineáris konnexióra vonatkozó (1)–(4) feltételek alapján könnyű belátni, hogy az érintővektor szerinti kovariáns derivált az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik.

Tetszőleges T_pM–beli $v,\ w$ vektorok, $Y,\ Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők, $f \in \mathcal{F}(M)$ függvény és $\lambda \in \mathbb{R}$ valós szám esetén fennállnak a

$$\begin{aligned} \nabla_{v+w} Y &= \nabla_v Y + \nabla_w Y, \quad \nabla_{\lambda v} Y = \lambda \cdot \nabla_v Y, \\ \nabla_v (Y + Z) &= \nabla_v Y + \nabla_v Z, \quad \nabla_v (f\, Y) = v(f) \cdot Y(p) + f(p) \cdot \nabla_v Y \end{aligned}$$

összefüggések.

A lineáris konnexióhoz rendelt tenzormezők

A továbbiakban feltesszük, hogy az M sokaságon adva van egy ∇ lineáris konnexió. Tekintsük azon $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ és $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ leképezéseket, amelyeket a $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ és

$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ kifejezések írnak le tetszőleges $X,\ Y,\ Z\in\mathfrak{X}(M)$ vektormezőkre.

Közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy a T egy (1,2) típusú, az R pedig egy (1,3) típusú tenzormező az M–en.

4.5. Definíció. A T–t a ∇ kovariáns deriválás torzió tenzorának, az R–et pedig a ∇ görbületi tenzorának nevezzük.

Kovariáns deriválás egy nyílt részsokaságon

A dudorfüggvény alkalmazásával könnyen igazolni lehet az alábbi kijelentést.

4.3. Állítás. *Legyenek adva az $Y_1,\ Y_2\in\mathfrak{X}(M)$ vektormezők és egy $v\in T_pM$ érintővektor. Ha a p pont egy U nyílt környezetén az $Y_1,\ Y_2$ vektormezők megegyeznek (vagyis fennáll $Y_1|U = Y_2|U$), akkor $\nabla_v Y_1 = \nabla_v Y_2$ teljesül.*

Bizonyítás.
Alkalmazzuk a 2.1. Állítást. Tekintsünk egy olyan $h : M \to \mathbb{R}$ nemnegatív valós függvényt, amelyre teljesülnek a $0 \le h \le 1$, $\mathit{supp}\, h \subset U$ és $h(p) = 1$ feltételek. A h–ra vonatkozóan most azt is tegyük fel, hogy a p pontnak egy V $(V \subset U)$ nyílt környezetén a h függvény értéke konstans 1.

Mivel az U nyílt környezeten az $Y_1,\ Y_2$ vektormezők megegyeznek a $Z = h(Y_1 - Y_2)$ vektormező a nullvektormezőt adja. Könnyű belátni, hogy a Z nullvektormező bármely érintővektor szerinti kovariáns deriváltja egy nullvektor. Ily módon azt kapjuk, hogy teljesül

$$\begin{aligned} 0_p &= \nabla_v Z = \nabla_v(h\,(Y_1 - Y_2)) = v(h)\cdot(Y_1 - Y_2)(p) + h(p)\cdot\nabla_v(Y_1 - Y_2) = \\ &= v(h)\cdot 0_p + \nabla_v Y_1 - \nabla_v Y_2 = \nabla_v Y_1 - \nabla_v Y_2\,. \end{aligned}$$

Ennek következtében igaz $\nabla_v Y_1 = \nabla_v Y_2\,.$ $\square$

Legyen U egy nyílt részhalmaz M–ben. Az 4.3. Állítás alapján az M sokaságon vett ∇ kovariáns deriválás természetes módon meghatároz egy lineáris konnexiót az U nyílt részsokaságon az alábbiak szerint.

Legyenek $X,\ Y \in \mathfrak{X}(U)$ sima vektormezők U–n. Tekintsük U–nak egy tetszőleges p pontját. A fenti bizonyításban alkalmazott h dudorfüggvénnyel az Y vektormezőt terjesszük ki az M sokaságra. Vegyük azt az $\tilde{Y}$ mezőt az M–en, amelyre egy $q \in U$ pontban fennáll $\tilde{Y}(q) = h(q)\cdot Y(q)$, a $q \in M \setminus U$ esetben pedig $\tilde{Y}(q) = 0_q$ teljesül. Mivel a h dudorfüggvény konstans 1 értékű a p pontnak egy V $(V \subset U)$ nyílt környezetén, a V–re való leszűkítéseket tekintve igaz $\tilde{Y}|V = Y|V$.

Az $Y \in \mathfrak{X}(U)$ mező X szerinti (vagy más szóval X irányú) kovariáns deriváltját úgy értelmezzük, hogy $\nabla_X Y$ legyen az a sima vektormező U–n, amelynek a $p \in U$ pontbeli értéke a $\nabla_{X(p)}\tilde{Y}$ vektor.

A lineáris konnexiónak egy térképezésre vonatkozó Christoffel–szimbólumai

Tekintsük M–nek egy (U,ξ) térképét. A térképezés bázisvektormezőire alkalmazzuk az $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ $(i = 1,\dots,m)$ jelölést. Fejezzük ki a $\nabla_{X_i}X_j\in\mathfrak{X}(U)$ vektormezőt a $\nabla_{X_i}X_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k\cdot X_k$ alakban a megfelelő $\Gamma_{ij}^k\in\mathcal{F}(U)$ függvényekkel $(i,\ j,\ k = 1,\dots,m)$.

4.6. Definíció. A $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ $(i,\, j,\, k = 1, \ldots, m)$ differenciálható függvényeket a ∇ kovariáns deriválás (U, ξ) térképre vonatkozó Christoffel–féle szimbólumainak nevezzük.

A Christoffel–féle szimbólumok ismeretében (lokálisan) le tudjuk írni a kovariáns deriválást. Tekintsük a térképezés U tartományán vett $Y = \sum_{i=1}^m \eta^i X_i$, $Z = \sum_{i=1}^m \zeta^i X_i$ sima vektormezőket, ahol η^i, $\zeta^i \in \mathcal{F}(U)$ $(i = 1, \ldots, m)$. A kovariáns deriválás tulajdonságait felhasználva a

$$\nabla_Y Z = \sum_{k=1}^m \Big(\sum_{i=1}^m \eta^i \cdot \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Gamma_{ij}^k \cdot \eta^i \cdot \zeta^j \Big) X_k \tag{4.1}$$

összefüggést kapjuk.

A $Z \in \mathfrak{X}(U)$ vektormezőnek egy $p \in U$ pontban vett $v = \sum_{i=1}^m \alpha^i \cdot X_i(p)$ $(\alpha^i \in \mathbb{R})$ érintővektor szerinti kovariáns deriváltjára a

$$\nabla_v Z = \sum_{k=1}^m \Big(\sum_{i=1}^m \alpha^i \cdot \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^i}(p) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Gamma_{ij}^k(p) \cdot \alpha^i \cdot \zeta^j(p) \Big) X_k(p) \tag{4.2}$$

kifejezés adódik a (4.1) egyenlőség alapján.

Sima vektormezők egy görbe mentén

Tekintsünk egy $\sigma : I \subset \mathbb{R} \to M$ sima görbét és egy $Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőt. Vegyünk egy olyan (U, ξ) térképet, amely tartalmazza a $\sigma(t)$ pontot (egy rögzített $t \in I$ esetében). Evidens, hogy van olyan $J \subset I$ intervallum, amelyre fennáll $\sigma(J) \subset U$ és $t \in J$. Vezessük be a J–n definiált $\sigma^i = x^i \circ \sigma | J$ $(i = 1, \ldots, m)$ valós függvényeket.

Mint ismeretes, a σ t–beli érintővektorára $\dot\sigma(t) = \sum_{i=1}^m (\sigma^i)'(t) \cdot X_i(\sigma(t))$ teljesül. Az Y–nak az U tartományra való leszűkítését fejezzük ki az $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ bázisvektormezőkkel az $Y|U = \sum_{i=1}^m \eta^i X_i$ alakban, ahol $\eta^i \in \mathcal{F}(U)$. A (4.2) összefüggés alapján könnyű belátni, hogy fennáll a

$$\nabla_{\dot\sigma(t)} Y = \sum_{k=1}^m \big\{ (\eta^k \circ \sigma)'(t) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Gamma_{ij}^k \circ \sigma(t) \cdot (\sigma^i)'(t) \cdot (\eta^j \circ \sigma)(t) \big\} X_k \circ \sigma(t) \tag{4.3}$$

egyenlőség.

Világos, hogy (4.3) következtében igaz az alábbi kijelentés.

4.4. Állítás. *Legyenek adva az Y_1, $Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők és egy $\sigma : I \to M$ sima görbe. Amennyiben $Y_1 \circ \sigma = Y_2 \circ \sigma$ teljesül, akkor tetszőleges $t \in I$–re fennáll $\nabla_{\dot\sigma(t)} Y_1 = \nabla_{\dot\sigma(t)} Y_2$.*

4.7. Definíció. Tekintsünk egy $\sigma : I \to M$ sima görbét. σ–menti vektormezőn egy olyan $Z : I \to TM$ leképezést értünk, ahol $Z(t) \in T_{\sigma(t)} M$ teljesül $\forall t \in I$–re.

Az M térképezéseit véve értelmezni lehet a σ–menti vektormező differenciálhatóságát is. Ugyanis, Z–nek az I részintervallumaira való leszűkítéseit ki lehet fejezni a bázisvektormezőkkel az alábbi formában: $Z(t) = \sum_{i=1}^m \zeta^i(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \sigma(t)$, ahol $\zeta^1, \ldots, \zeta^m$ egyértelműen meghatározott valós függvények. A Z–t simának nevezzük, ha az ilyen kifejezésekben szereplő $\zeta^i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ függvények mindegyike differenciálható.

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy a σ érintővektoraival nyert $\dot\sigma : I \to TM$ leképezés is egy sima vektormezőt ad a σ görbe mentén.

A σ–menti differenciálható vektormezők halmazára a továbbiakban az $\mathfrak{X}(\sigma)$ jelölést alkamazzuk. Vegyük észre, hogy $\mathfrak{X}(\sigma)$ egy modulust képez az $\mathcal{F}(I)$ gyűrű felett.

A görbementi vektormező kovariáns deriváltja

Legyen adott egy $\sigma : I \to M$ reguláris sima görbe. Mint ismeretes a regularitás azt jelenti, hogy $\dot{\sigma}(t) \neq 0$ teljesül bármely $t \in I$–re. Eszerint a σ leképezés egy immerziója az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumnak az M sokaságba.

Tekintsünk egy σ–menti Z differenciálható vektormezőt. Válasszunk ki egy $t \in I$ paraméterértéket. *Igazolható, hogy van olyan $\hat{Z} \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező, amelynél valamely $J \subset I$ részintervallumra teljesül $t \in J$ és $\hat{Z} \circ \sigma | J = Z | J$.*

A fenti kijelentés igazolásához használjuk fel a 3.2. Tételt. Eszerint van olyan a t–t tartalmazó J részintervallum, hogy a $\sigma(J)$ pálya egy 1–dimenziós koordináta–szelete egy $\sigma(t)$ pontbeli (U, ξ) térképnek. Világos, hogy emiatt van olyan $\tilde{Z} \in \mathfrak{X}(U)$ vektormező az U térképtartományon, amelyre fennáll $\tilde{Z}(\sigma(\tau)) = Z(\tau)$ bármely $\tau \in J$–re. A $\tilde{Z}$ egy lokális kiterjesztését adja az $Z|J$ vektormezőnek. Azonban egy $\sigma(t)$ pontbeli dudorfüggvény alkalmazásával ezt a $\tilde{Z} \in \mathfrak{X}(U)$ vektormezőt a teljes M sokaságra ki tudjuk terjeszteni, és így kaphatunk egy olyan $\hat{Z} \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőt, amelyre teljesül $\hat{Z} \circ \sigma | J = Z | J$ valamely a t–t tartalmazó J intervallumra.

Reguláris σ görbe esetében a σ–menti Z vektormező t helyen vett kovariáns deriváltján (definíció szerint) a $Z'(t) = \nabla_{\dot{\sigma}(t)} \hat{Z}$ vektort értjük.

A 4.4. Állításból következik, hogy a fenti $Z'(t)$ vektor nem függ a Z kiterjesztésével nyert $\hat{Z} \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező megválasztásától.

Az alábbiak során a görbementi vektormező kovariáns deriváltjának fogalmát olyan görbék esetében is értelmezzük, amelyek nem regulárisak. Ehhez már térképezést fogunk alkalmazni.

Tekinsünk egy $\sigma : I \to M$ sima görbét és egy $Z \in \mathfrak{X}(\sigma)$ vektormezőt. Vegyünk a $\sigma(t)$ pontban egy (U, ξ) térképet és a ∇ kovariáns deriválásnak a térképezésre vonatkozó $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{F}(U)$ Christoffel–féle szimbólumait $(i, j, k = 1, \ldots, m)$. A 4.6. Definíció szerint ezek azon függvények az U térképtartományon, melyekkel az $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ alapvektormezőkre fennállnak a $\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \cdot X_k$ összefüggések.

Legyen $J \subset I$ egy olyan valós intervallum, amelyre igaz $\sigma(J) \subset U$ és $t \in J$. Fejezzük ki a $\sigma|J$ görbe mentén vett $Z|J$ vektormezőt a $Z|J = \sum_{i=1}^m \zeta^i \cdot X_i \circ \sigma | J$ alakban, ahol $\zeta^i \in \mathcal{F}(J)$ $(i = 1, \ldots, m)$ valós függvények.

4.8. Definíció. A σ–menti $Z \in \mathfrak{X}(\sigma)$ vektormező t helyen vett kovariáns deriváltján a

$$Z'(t) = \sum_{k=1}^m \left\{ (\zeta^k)'(t) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Gamma_{ij}^k(\sigma(t)) \cdot (\sigma^i)'(t) \cdot \zeta^j(t) \right\} X_k(\sigma(t)) \tag{4.4}$$

vektort értjük.

Megjegyzés. Az előbbi definícióban szereplő $Z'(t) \in T_{\sigma(t)}M$ vektor, nem függ a $\sigma(t)$ pontbeli (U, ξ) térkép megválasztásától. Ugyanis, ha $\dot{\sigma}(t) \neq 0$, akkor fennáll $Z'(t) = \nabla_{\dot{\sigma}(t)} \hat{Z}$ bármely olyan $\hat{Z} \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőre, amelyre igaz $Z = \hat{Z} \circ \sigma$.

Amennyiben $\dot{\sigma}(t) = 0$ teljesül, akkor a definícióból a $Z'(t) = \sum_{k=1}^m (\zeta^k)'(t) \cdot X_k(\sigma(t))$ összefüggést kapjuk. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy egy másik $\sigma(t)$–beli térkép alkalmazása esetén a (4.4) kifejezés ugyanazt a vektort adja.

Megjegyzés. Könnyű igazolni, hogy tetszőleges $Y,\ Z \in \mathfrak{X}(\sigma)$ mezők és $h \in \mathcal{F}(I)$ függvény esetén teljesül $(Y+Z)'(t) = Y'(t) + Z'(t)$ és $(h\,Z)'(t) = h(t)\cdot Z'(t) + h'(t)\cdot Z(t)$.

Megjegyzés. Belátható, hogy a (4.4) összefüggéssel meghatározott $Z' : I \to TM$ leképezés szintén egy sima vektormezőt ad a σ görbe mentén.

Párhuzamos vektormezők egy görbe mentén

Legyen adott egy $\sigma : I \to M$ sima görbe.
4.9. Definíció. Egy $Z \in \mathfrak{X}(\sigma)$ vektormezőt párhuzamosnak mondjuk a σ mentén, ha fennáll $Z'(t) = 0$ bármely $t \in I$–re.

A (4.4) összefüggésből adódik, hogy egy $Z \in \mathfrak{X}(\sigma)$ vektormező párhuzamos akkor és csak akkor, ha tetszőleges (U,ξ) térképre vonatkozóan a ζ^k koordináta–függvények kielégítik a

$$(\zeta^k)'(t) + \sum_{j=1}^{m}\Big\{\sum_{i=1}^{m}\Gamma_{ij}^{k}\circ\sigma(t)\cdot(x^i\circ\sigma)'(t)\Big\}\,\zeta^j(t) = 0 \tag{4.5}$$

$(k = 1,\dots m)$ egyenleteket.

A sima görbe mentén vett párhuzamos vektormezőkre igaz a következő kijelentés.
4.1. Tétel. *Legyen adott egy $\sigma : I \to M$ sima görbe és annak valamely $\sigma(t_0)$ pontjában egy $v \in T_{\sigma(t_0)}M$ vektor. Pontosan egy olyan $Z \in \mathfrak{X}(\sigma)$ párhuzamos vektormező van, amelyre fennáll $Z(t_0) = v$.*
Bizonyítás.
Az egyértelműség igazolása.
Tegyük fel, hogy Z_1 és Z_2 olyan párhuzamos vektormezők a σ görbe mentén, melykre igaz $Z_1(t_0) = v,\ Z_2(t_0) = v$. Tekintsük a $J = \{\ t \in I \mid Z_1(t) = Z_2(t)\ \}$ részhalmazt I–ben.

Amennyiben valamely $a \in I$ helyen $Z_1(a) = Z_2(a)$ teljesül, akkor vegyünk egy (U,ξ) térképet a $\sigma(a)$ pontban, továbbá a $Z_1,\ Z_2$ vektormezők (lokális) koordináta–függvényeit ezen térképezésre vonatkozóan. Ezek a koordináta–függvények az I–nek egy részintervallumán vannak definiálva és megoldását adják a (4.5) elsőrendű lineáris differenciálegyenlet–rendszernek. Mivel az a helyen vett értékeik megegyeznek, a differenciálegyenletek elméletének idevágó tétele szerint Z_1 és Z_2 koordináta–függvényei azonosak. Tehát Z_1 és Z_2 az a–nak egy környezetén is egyenlőek, vagyis J egy nyílt halmaz I–ben.

Vegyük az M sokaság diszjunkt érintőtereinek uniójaként nyert TM érintőnyalábot. Ezen természetes módon adódik egy topológia, illetve egy differenciálható struktúra. A Z_1 és Z_2 vektormezőket tekintsük most sima (és egyúttal folytonos) leképezéseknek az I intervallumból a TM–be. Mivel a TM érintőnyaláb egy Hausdorff–féle topologikus tér, egy jólismert topológiai állítás szerint a $J = \{\ t \in I \mid Z_1(t) = Z_2(t)\ \}$ részhalmaz zárt I–ben. Azt kaptuk, hogy J egy nyílt és zárt részhalmaza az összefüggő I intervallumnak, továbbá $t_0 \in J$ miatt $J \neq \emptyset$. Ebből már következik, hogy $J = I$ és $Z_1 = Z_2$ teljesül.

A párhuzamos vektormező létezésének igazolása.
Tegyük fel, hogy van olyan (U,ξ) térkép, amelynek tartománya tartalmazza a σ görbe pályáját. Ez esetben vegyük a $\sigma(t_0)$ pontbeli v vektor $v = \sum_{i=1}^{m}\alpha^i\cdot X_i(p)$ kifejezését a térképezés bázisvektoraival. Tekintsük a $\zeta^k : I \to \mathbb{R}$ $(k = 1,\dots,m)$ valós függvényekre

felírt (4.5) differenciálegyenlet–rendszert a $\zeta^k(t_0) = \alpha^k$ kezdeti feltételekkel. A differenciálegyenletek elmélete szerint ennek egyértelműen létezik megoldása a teljes I intervallumon.

Ha nincs olyan térképe a sokaságnak, amely tartalmazza a $\sigma(I)$ pályát, akkor a (4.5) differenciálegyenlet–rendszer alkalmazásával csak egy $J \subset I$ részintervallumhoz tartozó $\sigma|J$ görbeszegmens mentén tudunk meghatározni olyan $\hat{Z} : J \to TM$ párhuzamos vektormezőt, amelynek t_0–beli értéke az adott v vektor. Azonban ezt a J–n értelmezett leképezést további térképezések alkalmazásával ki lehet terjeszteni a teljes I intervallumra. Ezt az alábbi tulajdonság miatt tehetjük meg.

Legyenek J_1 és J_2 olyan részintervallumai I–nek, hogy $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$. Tegyük fel, hogy $Z_1 : J_1 \to TM$ és $Z_2 : J_2 \to TM$ olyan párhuzamos vektormezők a $\sigma|J_1$, $\sigma|J_2$ görbeszegmensek mentén, melyek értékei valamely $a \in J_1 \cap J_2$ helyen egyenlőek, azaz fennáll $Z_1(a) = Z_2(a)$. Az egyértelműség bizonyításában leírtakat felhasználva, ekkor tetszőleges $\tau \in J_1 \cap J_2$ pontban igaz $Z_1(\tau) = Z_2(\tau)$. Ily módon a Z_1 és Z_2 mezők egyesítésével egy $\tilde{Z} : J_1 \cup J_2 \to TM$ párhuzamos vektormezőt kapunk a $\sigma|(J_1 \cup J_2)$ görbe mentén.

Ennek alapján további térképezéseket véve a $\hat{Z} : J \to TM$ leképezést ki lehet terjeszteni a teljes I intervallumra oly módon, hogy egy olyan $Z : I \to TM$ sima leképezést nyerjünk, amely párhuzamos vektormezőt ad a σ görbe mentén. $\square$

Megjegyzés. A fenti 4.1. Tétel ismeretében már könnyű belátni, hogy a σ görbe mentén vett párhuzamos vektormezők egy m–dimenziós vektorteret alkotnak.

A 4.1. Tétel lehetőséget ad arra, hogy a görbe egyik pontjának érintőterét párhuzamosan eltoljuk egy másik görbepont érintőterébe.

4.10. Definíció. Tekintsünk egy $\sigma : I \to M$ sima görbét és valamely $a,\ b \in I$ paraméterértékeket. A $T_{\sigma(a)}M$ érintőtérnek a $T_{\sigma(b)}M$–be történő, σ–menti párhuzamos eltolásán az alább meghatározott $\mathcal{P}_\sigma : T_{\sigma(a)}M \to T_{\sigma(b)}M$ leképezést értjük:

Egy tetszőleges $v \in T_{\sigma(a)}M$ vektorhoz vegyük azt a párhuzamos $Z \in \mathfrak{X}(\sigma)$ vektormezőt, amelyre $Z(a) = v$ teljesül. A v–hez a $\sigma(b)$ pontbeli $\mathcal{P}_\sigma(v) = Z(b)$ érintővektort rendeljük.

Megjegyzés. Könnyű belátni az eddigi eredmények alapján, hogy a $\mathcal{P}_\sigma : T_{\sigma(a)}M \to T_{\sigma(b)}M$ leképezés egy lineáris izomorfizmus.

4.11. Definíció. Egy $\sigma : I \to M$ sima görbét geodetikusnak (vagy más néven autoparallelnek) nevezünk, ha az érintővektoraival nyert $\dot{\sigma} \in \mathfrak{X}(\sigma)$ vektormező párhuzamos a σ mentén.

Tenzormezők kovariáns deriváltja

Tegyük fel a továbbiakban is, hogy az M sokaságon adva van egy ∇ lineáris konnexió. Ez esetben nemcsak vektormezők, hanem a $(0,r)$ és $(1,r)$ típusú tenzormezők kovariáns deriváltját is értelmezni lehet.

Jelölje $\mathcal{T}_r^0(M)$ az M sokaságon vett $(0,r)$ típusú tenzormezők terét. Tekintsünk egy $Q : \mathfrak{X}(M)^r \to \mathcal{F}(M)$ $(0,r)$ típusú tenzormezőt és egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ sima vektormezőt. Vegyük azt a $\nabla_X Q : \mathfrak{X}(M)^r \to \mathcal{F}(M)$ leképezést, ahol fennáll

$$(\nabla_X Q)(Y_1, \dots, Y_r) = X(Q(Y_1, \dots, Y_r)) - \sum_{i=1}^{r} Q(Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_r)$$

bármely $Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a leképezés $\mathcal{F}(M)$–lineáris, tehát a $\nabla_X Q$ is egy $(0,r)$ típusú tenzormező.

4.12. Definíció. A $Q \in \mathcal{T}_r^0(M)$ tenzormezőnek az $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező szerinti kovariáns deriváltján a fenti összefüggéssel értelmezett $\nabla_X Q$ tenzormezőt értjük.

Megjegyzés. Legyen adva az M sokaságon egy $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1–forma, amely egyúttal egy $(0,1)$ típusú tenzormező is. A fentiek szerint ennek az $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező szerinti kovariáns deriváltján azt a $\nabla_X \omega$ által jelölt 1–formát értjük, amelyre fennáll
$(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$ tetszőleges $Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén.

Tekintsük most azt a $\nabla Q : \mathfrak{X}(M)^{r+1} \to \mathcal{F}(M)$ leképezést, amelyet a

$$\nabla Q\,(Y_1, \dots, Y_{r+1}) = \nabla_{Y_{r+1}} Q(Y_1, \dots, Y_r)$$

kifejezés ír le, ahol $Y_1, \dots, Y_{r+1} \in \mathfrak{X}(M)$ tetszőleges vektormezők. Vegyük észre, hogy a ∇Q leképezés egy $(0, r+1)$ típusú tenzormezőt ad.

4.13. Definíció. A $\nabla Q \in \mathcal{T}_{r+1}^0(M)$ tenzormezőt a Q kovariáns deriváltjának mondjuk.

Megjegyzés. A kovariáns deriválással egy kovariáns tenzormezőből egy olyan tenzormezőt kapunk, amelynek a fokszáma már 1–gyel nagyobb.

A fenti fogalmakat az $(1,r)$ típusú tenzormezők esetében is be lehet vezetni.

4.14. Definíció. A $Q \in \mathcal{T}_r^1(M)$ tenzormezőnek az $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező szerinti kovariáns deriváltján azt a $\nabla_X Q : \mathfrak{X}(M)^r \to \mathfrak{X}(M)$ leképezést értjük, amelyre fennáll

$$(\nabla_X Q)(Y_1, \dots, Y_r) = \nabla_X(Q(Y_1, \dots, Y_r)) - \sum_{i=1}^{r} Q(Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_r)$$

tetszőleges $Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőkre.

Megjegyzés. A 4.14. Definíció esetében könnyen ellenőrizni lehet, hogy $\nabla_X Q$ is egy $(1,r)$ típusú tenzormező.)

Tenzormezők tenzori szorzata

A továbbiakban két kovariáns tenzormező szorzatát fogjuk értelmezni. Legyenek adva a $Q_1 \in \mathcal{T}_r^0(M)$ és $Q_2 \in \mathcal{T}_s^0(M)$ kovariáns tenzormezők. Vegyük azt a $Q_1 \otimes Q_2 : \mathfrak{X}(M)^{r+s} \to \mathcal{F}(M)$ leképezést, amelyet a $Q_1 \otimes Q_2\,(Y_1, \ldots, Y_{r+s}) = Q_1(Y_1, \ldots, Y_r) \cdot Q_2(Y_{r+1}, \ldots, Y_{r+s})$ összefüggés ír le. Nyilvánvaló, hogy ez a leképezés is $\mathcal{F}(M)$–lineáris, tehát $Q_1 \otimes Q_2 \in \mathcal{T}_{r+s}^0(M)$ teljesül.

4.15. Definíció. A $(0, r+s)$ típusú $Q_1 \otimes Q_2$ tenzormezőt a Q_1 és a Q_2 tenzori szorzatának nevezzük.

Tenzormező visszahúzása egy sima leképezésnél

Legyen adott egy $\mu : M \to N$ differenciálható leképezés az M sokaságból az N sokaságba. Az N sokaságon vegyünk egy $Q \in \mathcal{T}_r^0(N)$ tenzormezőt. Tekintsük azt a $\mu^*Q : \mathfrak{X}(M)^r \to \mathcal{F}(M)$ leképezést, ahol fennáll

$$\mu^*Q\,(Y_1, \ldots, Y_r)(p) = Q_{\mu(p)}(T\mu(Y_1(p)), \ldots, T\mu(Y_r(p)))$$

tetszőleges $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők és $p \in M$ pont esetén. Látható, hogy a μ érintőleképezése alapján értelmezett μ^*Q leképezés $\mathcal{F}(M)$–lineáris.

4.16. Definíció. A $\mu^*Q \in \mathcal{T}_r^0(M)$ tenzormezőt a Q μ általi visszahúzásának (vagy más szóval a Q μ szerinti transzformáltjának) mondjuk.

Megjegyzés. A $\mu : M \to N$ sima leképezés a fentiek szerint meghatároz egy $\mu^* : \mathcal{T}_r^0(N) \to \mathcal{T}_r^0(M)$ leképezést a $(0, r)$ típusú tenzormezők terén. Ezt a μ^* leképezést a μ transzformáltjának szokás nevezni.

Evidens, hogy amennyiben $h \in \mathcal{F}(N)$ és $Q \in \mathcal{T}_r^0(N)$, akkor fennáll $\mu^*(hQ) = (h \circ \mu) \cdot \mu^*Q$.

Szintén könnyen igazolható, hogy bármely $Q_1 \in \mathcal{T}_r^0(N)$ és $Q_2 \in \mathcal{T}_s^0(N)$ tenzormezők esetén $\mu^*(Q_1 \otimes Q_2) = \mu^*Q_1 \otimes \mu^*Q_2$ teljesül.

5) A Riemann–sokaságok elméletének alapjai

Az M differenciálható sokaságon legyen adott egy $(0,2)$ típusú $g : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ tenzormező, amelyre fennáll $g(X,Y) = g(Y,X)$ bármely $X,\, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőknél. Ismeretes, hogy a g az összes T_pM $(p\in M)$ érintőtéren meghatároz egy $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris formát.

5.1. Definíció. Amennyiben a $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris forma tetszőleges $p\in M$ pont esetén pozitív definit, akkor azt mondjuk, hogy a g egy Riemann–metrikát ad az M sokaságon.

Ez esetben az (M,g) párt egy Riemann–sokaságnak nevezzük. (A g–t a Riemann–sokaság metrikus tenzormezőjének hívjuk.)

A g metrikus tenzor a sokaság összes érintőterén meghatároz egy–egy skaláris szorzatot. Ennek következtében értelmezni tudjuk az érintővektor hosszát (az alábbiak szerint). A $v\in T_pM$ vektor hosszának mondjuk a $\|v\| = \sqrt{g_p(v,v)}$ nemnegatív számot.

Megjegyzés. A természetes differenciálható struktúrával ellátott $\mathbb{R}^m$ téren tekintsük azt a $g\in\mathcal{T}_2^0(\mathbb{R}^m)$ metrikus tenzormezőt, amelyre fennáll $g\big(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\big) = \delta_{ij} \quad (i,\, j = 1,\dots,m)$. Az $(\mathbb{R}^m, g)$ Riemann–sokaságot az m–dimenziós euklideszi térnek nevezzük.

Az $\mathbb{R}^m$ euklideszi tér metrikus tenzormezőjére a $\langle\ ,\ \rangle$ jelölést is szokás alkalmazni.

5.2. Definíció. A Riemann–sokaságon legyen adott egy $\sigma : I \subset \mathbb{R} \to M$ sima görbe. Vegyünk egy $[a,b] \subset I$ zárt intervallumot. A $\sigma|[a,b]$ görbedarab ívhosszán az

$$l(\sigma|[a,b]) = \int_a^b \|\dot\sigma(t)\|\, dt$$

nemnegatív számot értjük.

A Riemann–metrika visszahúzása egy immerziónál

Legyen adott egy $(N,\tilde g)$ Riemann–sokaság, továbbá egy M differenciálható sokaság és annak egy $\iota : M \to N$ immerziója az N–be. Könnyen belátható, hogy $\iota^*\tilde g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ egy metrikus tenzormezőt ad az M sokaságon.

Megjegyzés. A legtöbb esetben a szóban forgó Riemann–sokaságot részsokaságként írjuk le egy magasabb dimenziós Riemann–sokaságban (többnyire egy euklideszi térben).

A klasszikus differenciálgeometriában olyan sima elemi hiperfelületeket vizsgáltunk, melyeket valamely $\mathbf{r}\colon D \to \mathbb{R}^{m+1}$ reguláris vektorfüggvény képeként nyertünk. Az $\mathbb{R}^m$–beli D összefüggő nyílt halmazon vett $\mathbf{r}$ leképezés valójában egy differenciálható beágyazás. A $M = \mathbf{r}(D)$ hiperfelületen mindig azt a Riemann-metrikát vettük, amelyet a befoglaló $\mathbb{R}^{m+1}$ euklideszi tér Riemann-metrikájából nyertünk.

5.3. Definíció. Legyenek adva az (M,g) és $(N,\tilde g)$ Riemann–sokaságok. A $\mu : M \to N$ diffeomorfizmust *izometriának* mondjuk, ha $\mu^*\tilde g = g$ teljesül.

Megjegyzés. A korábbi definíciók alapján könnyen belátható, hogy egy $\mu : M \to N$ diffeomorfizmus akkor és csak akkor ad izometriát, ha tetszőleges $p \in M$ pontban a $T_p\mu : T_pM \to T_{\mu(p)}N$ érintőleképezés ortogonális (vagyis megőrzi az érintőtéren értelmezett skaláris szorzatot).

A metrikus tenzor komponensfüggvényei egy adott térképre vonatkozóan

Legyen adott egy (M,g) Riemann–sokaság. Vegyük az M sokaságnak egy (U,ξ) térképét, továbbá az ahhoz tartozó $x^i = u^i \circ \xi$ koordináta–függvényeket és $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ $(i = 1,\dots,m)$ alapvektormezőket.

Az U térképtartományon értelmezett azon $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$ $(i,j = 1,\dots,m)$ sima függvényeket, amelyeket a $g_{ij}(p) = g_p(\frac{\partial}{\partial x^i}(p), \frac{\partial}{\partial x^j}(p))$ összefüggés ír le tetszőleges $p \in U$–ra, a g metrikus tenzormező (U,ξ) térképre vonatkozó komponensfüggvényeinek nevezzük.

Evidens, hogy ezekre fennáll $g_{ij} = g_{ji}$, és a g tenzormezőnek az U–ra való leszűkítése kifejezhető a $g|U = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m g_{i\,j}\, dx^i \otimes dx^j$ alakban.

Valamely $p \in U$ pont esetén a $g_{ij}(p)$ $(i,j = 1,\dots,m)$ elemekből képzett $m \times m$–es mátrix legyen $\mathbf{G}(p)$. Ily módon egy $\mathbf{G} : U \to End(\mathbb{R}^m)$ differenciálható leképezést nyerünk, ahol $End(\mathbb{R}^m)$ az m–edrendű négyzetes mátrixok terét jelöli. Mivel fennáll $det\,\mathbf{G}(p) > 0$ $(p \in U)$, a $\mathbf{G}(p)$ mátrix invertálható. A $\mathbf{G}(p)$ inverz mátrixát jelölje $\mathbf{H}(p)$, ennek elemeit pedig $h^{ij}(p)$ $(i,j = 1,\dots,m)$. Eszerint a metrika alapján további $h^{i\,j} : U \to \mathbb{R}$ $(i,j = 1,\dots,m)$ sima függvényeket kapunk az U nyílt tartományon, melyekre fennáll $h^{i\,j} = h^{j\,i}$.

Az alábbi segédtételt többször is alkalmazni fogjuk a későbbiek során.

5.1. Lemma. *Legyen adva egy $\omega : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ elsőfokú differenciálforma az (M,g) Riemann-sokaságon. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan $Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező, amellyel fennáll az $\omega(Z) = g(Y,Z)$ összefüggés bármely $Z \in \mathfrak{X}(M)$ esetén.*

Bizonyítás.

A segédtételt elegendő a sokaság egy térképtartományán igazolni. Vegyünk egy (U,ξ) térképet. A térképezéshez tartozó koordináta–függvények legyenek $x^i = u^i \circ \xi$ $(i = 1,\dots,m)$, az alapvektormezők pedig $X_j = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ $(j = 1,\dots,m)$. Tetszőleges $p \in U$ pontban a $dx^1(p),\dots,dx^m(p)$ differenciálok egy bázisát adják a T_pM érintőtér T_p^*M duális terének, tehát az $\omega(p)$ lineáris forma egyértelműen áll elő ezek lineáris kombinációjaként. Tekintsük az ω 1–forma mezőnek az U–ra való leszűkítését és a $b_i(p) = \omega_p(X_i(p))$ kifejezéssel leírt $b_i : U \to \mathbb{R}$ $(i = 1,\dots,m)$ függvényeket, melyekkel teljesül az
$\omega|U = \sum_{i=1}^m b_i\, dx^i$ egyenlőség.

Egy $Y \in \mathfrak{X}(U)$ vektormező koordináta–függvényei legyenek $\eta^l : U \to \mathbb{R}$ $(l = 1,\dots,m)$. Ezekkel Y kifejezhető az $Y = \sum_{l=1}^m \eta^l X_l$ formában. Világos, hogy az Y mezőre pontosan akkor teljesül az $\omega(Z) = g(Y,Z)$ egyenlőség bármely $Z \in \mathfrak{X}(U)$ esetén, ha fennállnak az $g(Y,X_j) = \omega(X_j)$ $(j = 1,\dots,m)$ összefüggések. Ezekből a

$$\textstyle\sum_{l=1}^m g_{lj}\, \eta^l = b_j \qquad (j = 1,\dots,m)$$

egyenletekhez jutunk, amelyekben a $g_{lj} \in \mathcal{F}(U)$ függvények a g metrikának a térképezésre vonatkozó komponensfüggvényei. Látható, hogy ezen egyenletrendszernek pedig egyértelműen létezik megoldása az η^l függvényekre nézve. Ha a fenti egyenleteket megszorozzuk a h^{ij} függvényekkel és összegzést végzünk a j indextartományán, akkor azt kapjuk, hogy $\eta^i = \sum_{j=1}^m h^{ij}\, b_j$ teljesül. Eszerint az adott feltételnek eleget tevő Y mező egyértelműen meg van határozva a g metrikával és az ω 1–forma mezővel. $\square$

A Levi–Civita–féle lineáris konnexió a Riemann–sokaságon

A továbbiakban végig feltesszük, hogy adott egy (M,g) Riemann–sokaság. Tekintsünk az M sokaságon egy ∇ lineáris konnexiót. Ekkor a 4.12. Definíció alapján értelmezni lehet a g metrikus tenzormező egy $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektormező szerinti $\nabla_X g$ kovariáns deriváltját, melyet a

$$(\nabla_X g)(Y,Z)=X(g(Y,Z))-g(\nabla_X Y,Z)-g(Y,\nabla_X Z)$$

összefüggés ír le tetszőleges $Y,\ Z\in\mathfrak{X}(M)$ mellett. A 4.13. Definíciónak megfelelően a g tenzormező ∇g kovariáns deriváltja egy $(0,3)$ típusú tenzormező, melyet a $\nabla g\,(Y,Z,X)=(\nabla_X g)(Y,Z)$ egyenlet határoz meg.

5.4. Definíció. Az M Riemann–sokaságon vett ∇ kovariáns deriválást metrikusnak mondjuk, amennyiben fennáll $\nabla g=0$.

A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy a ∇ lineáris konnexió pontosan akkor metrikus, ha tetszőleges $X,\ Y,\ Z\in\mathfrak{X}(M)$ vektormezőkre teljesül az

$$X(g(Y,Z))=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z) \tag{5.1}$$

egyenlőség. Emlékezzünk rá, hogy ∇ torzió tenzorát a $T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$ összefüggéssel definiáltuk, ahol $[X,Y]$ a két vektormező Lie–zárójele. Ha az (1,2) típusú T mező eltűnik (azaz $T=0$), akkor azt szokás mondani, hogy ∇ torziómentes.

Az alábbi tételt a Riemann–geometria legfontosabb eredményeként tartják számon.

5.1. Tétel. *Az (M,g) Riemann–sokaságon egyértelműen létezik egy olyan ∇ lineáris konnexió, amely metrikus és torziómentes.*

Bizonyítás.

Az egyértelműség igazolása.

Tegyük fel, hogy ∇ egy olyan lineáris konnexió az M sokaságon, amelynek torzió tenzora eltűnik és amellyel fennáll $\nabla g=0$. Vegyünk három vektormezőt a sokaságon, melyek legyenek $X,\ Y$ és Z. Az (5.1) egyenlet alapján igazak az

$$\begin{aligned}X(g(Y,Z))&=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z),\\ Y(g(Z,X))&=g(\nabla_Y Z,X)+g(Z,\nabla_Y X),\\ Z(g(X,Y))&=g(\nabla_Z X,Y)+g(X,\nabla_Z Y)\end{aligned}$$

összefüggések. Ha az első két egyenlet összegéből vonjuk ki a harmadikat, akkor azt kapjuk, hogy fennáll

$$\begin{aligned}&X(g(Y,Z))+Y(g(Z,X))-Z(g(X,Y))=\\ &\qquad=g(\nabla_X Y+\nabla_Y X,Z)+g(\nabla_Y Z-\nabla_Z Y,X)+g(\nabla_X Z-\nabla_Z X,Y)\,.\end{aligned}$$

A ∇ torziómentessége miatt igaz $\nabla_Y X=\nabla_X Y-[X,Y]$. Ezt felhasználva az előző egyenletből

$$\begin{aligned}&X(g(Y,Z))+Y(g(Z,X))-Z(g(X,Y))=\\ &\qquad=2\,g(\nabla_X Y,Z)-g([X,Y],Z)+g([Y,Z],X)+g([X,Z],Y)\end{aligned}$$

adódik. Ebből átrendezéssel a

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\big(X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - \\ - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y])\big) \tag{5.2}$$

összefüggést nyerjük.

Legyenek X és Y két kiválasztott vektormező. Tekintsük azt az $\omega_{X,Y} : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ 1–forma mezőt, melyet az $\omega_{X,Y}(Z) = g(\nabla_X Y, Z)$ egyenlőséggel értelmezünk. Az (5.2) egyenlet szerint, az $\omega_{X,Y}$ differenciálformát a g metrika egyértelműen meghatározza. Ennek következtében az $\omega_{X,Y}$ 1–forma mezőnek megfelelő $\nabla_X Y$ vektormezőt g szintén meghatározza az 5.1. Lemma alapján. Mivel ez tetszőleges X, Y vektormezők esetében igaz, a ∇ kovariáns deriválás is egyértelmű a metrikusság és a torziómentesség feltétele mellett.

A lineáris konnexió létezésének igazolása.
Tekintsük azt a $C : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ leképezést, amelyre fennáll

$$C(X,Y,Z) = \frac{1}{2}\big(X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - \\ - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y])\big)$$

tetszőleges X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőkre. Világos, hogy a C leképezés mindhárom változójára nézve rendelkezik az úgynevezett additivitási tulajdonsággal. Emellett közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy amennyiben a vektormezőket egy $f \in \mathcal{F}(M)$ függvénnyel megszorozzuk, akkor a

$$C(X,Y,f\,Z) = f \cdot C(X,Y,Z), \qquad C(f\,X,Y,Z) = f \cdot C(X,Y,Z) \\ C(X,f\,Y,Z) = f \cdot C(X,Y,Z) + (Xf)\cdot g(Y,Z) \tag{5.3}$$

összefüggéseket kapjuk. Tehát a C leképezés nem ad tenzormezőt, mivel a második változójára nézve nem $\mathcal{F}(M)$–lineáris.

Legyen X és Y két kiválasztott vektormező. Vegyük azt a $C_{X,Y} : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ leképezést, melyet a $C_{X,Y}(Z) = C(X,Y,Z)$ egyenlet ír le. Látható, hogy $C_{X,Y}$ egy elsőfokú differenciálforma. Az 5.1. Lemma szerint ennek egyértelműen megfelel egy $D(X,Y)$ vektormező, amelyre teljesül $C_{X,Y}(Z) = g(D(X,Y),Z)$ bármely $Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező mellett. *(A vektormező jelölésének oka mindjárt kiderül.)*

A fenti eljárással egy $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ leképezést kapunk, amelyet a

$$g(D(X,Y),Z) = C(X,Y,Z)$$

egyenlet határoz meg, ahol X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ tetszőleges vektormezők. Világos, hogy a D leképezésre fennállnak a $D(X+\tilde{X},Y) = D(X,Y) + D(\tilde{X},Y)$ és $D(X,Y+\tilde{Y}) = D(X,Y) + D(X,\tilde{Y})$ egyenlőségek. Az (5.3) összefüggések felhasználásával pedig belátható, hogy igazak a

$$D(f\,X,Y) = f \cdot D(X,Y), \qquad D(X,f\,Y) = f \cdot D(X,Y) + (Xf)\,Y$$

egyenletek is. Vegyük észre, hogy a 4.3. Definíció alapján D egy kovariáns deriválást ad az M sokaságon. Emiatt a $D(X,Y)$ vektormezőre a $D_X Y$ jelölést is alkalmazhatjuk, hiszen ez az Y mezőnek a X szerinti deriváltja a D lineáris konnexióra nézve.

Azt kellene még megmutatni, hogy D torziómentes és metrikus. A C–t leíró formulából közvetlen számolással adódik, hogy fennáll a

$$g(D(X,Y),Z) - g(D(Y,X),Z) - g([X,Y],Z) = 0$$

összefüggés. Eszerint a D kovariáns deriválás T torzió tenzorára teljesül $g(T(X,Y),Z) = 0$ bármely $X,\ Y,\ Z \in \mathfrak{X}(M)$ mezőkre, amiből $T = 0$ következik.

Ugyancsak közvetlen számolással igazolható a

$$X(g(Y,Z)) = g(D(X,Y),Z) + g(D(X,Z),Y)$$

egyenlőség. Ez viszont az (5.1) összefüggés szerint azt bizonyítja, hogy a D kovariáns deriválás metrikus a g–re nézve. Ezzel beláttuk a keresett lineáris konnexió létezését is. $\square$

5.5. Definíció. Legyen adott egy (M,g) Riemann–sokaság. Az M Levi–Civita–féle lineáris konnexiójának mondjuk azt az egyértelműen meghatározott ∇ kovariáns deriválást, amely metrikus és torziómentes.

Megjegyzés. Az 5.1. Tétel bizonyítása szerint az (M,g) Riemann–sokaságon a Levi–Civita–féle ∇ lineáris konnexiót a

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\big(&X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - \\ &-g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y])\big) \end{aligned} \tag{5.2}$$

összefüggés határozza meg, amelyben $X,\ Y,\ Z \in \mathfrak{X}(M)$ tetszőleges vektormezők. Ezt az alapvető összefüggést a szakirodalomban Koszul–formulának szokás nevezni.

A Levi–Civita–féle kovariáns deriválás Christoffel–szimbólumai

Tekintsük az (M,g) Riemann–sokaságon a ∇ Levi–Civita–féle lineáris konnexiót. Legyen egy (U,ξ) egy térképe az M–nek. A ξ térképezés alapvektormezőit jelölje $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i = 1,\dots,m)$. Mint ismeretes, a ∇–nak az adott térképre vonatkozó Christoffel–szimbólumain azokat a $\Gamma^l_{i\,j} : U \to \mathbb{R}$ $(i,\ j,\ l = 1,\dots,m)$ függvényeket értjük melyekre teljesülnek a

$$\nabla_{X_i} X_j = \textstyle\sum_{l=1}^m \Gamma^l_{i\,j} \cdot X_l \tag{5.4}$$

összefüggések.

Ismeretes, hogy a Young–tétel következtében az alapvektormezők Lie–zárójele eltűnik, vagyis $[X_i, X_j] = 0$. Mivel a ∇ konnexió torziómentes, $\nabla_{X_i} X_j = \nabla_{X_i} X_j$ teljesül. Ebből viszont következik, hogy a Christoffel–szimbólumok a két alsó indexükre nézve szimmetrikusak, vagyis fennáll $\Gamma^l_{i\,j} = \Gamma^l_{j\,i}$.

Vegyük a g metrikus tenzormező ezen térképre vonatkozó $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$ $(i,j = 1,\dots,m)$ komponensfüggvényeit, melyeket a $g_{ij} = g(X_i, X_j)$ egyenletekkel nyerünk.

5.1. Állítás. *A Levi–Civita–féle ∇ lineáris konnexiónak az (U, ξ) térképhez tartozó Christoffel–szimbólumait a*

$$\Gamma^l_{i\,j} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} h^{lk}\big(\frac{\partial}{\partial x^i}(g_{jk}) + \frac{\partial}{\partial x^j}(g_{ki}) - \frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij})\big) \tag{5.5}$$

kifejezések adják meg $(i,\ j,\ l = 1, \ldots, m)$.

Bizonyítás.

Vegyük az $X_i,\ X_j,\ X_k$ alapvektormezőket. Mivel ezek Lie–zárójele eltűnik az (5.2) Koszul–formula az egyszerűbb

$$g(\nabla_{X_i} X_j, X_k) = \frac{1}{2}\big(X_i(g(X_j, X_k)) + X_j(g(X_k, X_i)) - X_k(g(X_i, X_j))\big)$$

alakot ölti. Alkalmazva a Christoffel-szimbólumokat definiáló (5.4) egyenletet a

$$\textstyle\sum_{r=1}^{m} \Gamma^r_{i\,j}\, g_{rk} = \frac{1}{2}\big(X_i(g_{jk}) + X_j(g_{ki}) - X_k(g_{ij})\big)$$

összefüggést kapjuk. Szorozzuk be ezt a h^{kl} függvényekkel. Ha az $i,\ j$ indexeket rögzítjük és k befutja az $1, \ldots, m$ indextartományt, akkor m számú egyenletet kapunk. Ezeket összeadva $\sum_{r=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \Gamma^r_{i\,j}\, g_{rk}\, h^{kl} = \sum_{r=1}^{m} \Gamma^r_{i\,j}\, \delta^l_r = \Gamma^l_{i\,j}$ következtében a

$$\Gamma^l_{i\,j} = \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{k=1}^{m} h^{kl}\big(X_i(g_{jk}) + X_j(g_{ki}) - X_k(g_{ij})\big)$$

egyenlőséget kapjuk, ami igazolja az állítást. $\Box$.

A továbbiakban egy (M, g) Riemann–sokaságon mindig a Levi–Civita–féle ∇ lineáris konnexiót alkalmazzuk.

A sima görbe mentén vett vektormező kovariáns deriváltját a 4.8. Definícióban, párhuzamosságát pedig azt követően a 4.9. Definícióban értelmeztük. Ezzel kapcsolatosan igaz az alábbi kijelentés.

5.2. Állítás. *Legyen adott egy $\sigma : I \to M$ sima görbe. Amennyiben az $Y,\ Z \in \mathfrak{X}(\sigma)$ vektormezők párhuzamosak a σ mentén, akkor az $f(t) = g(Y(t), Z(t))$ $(t \in I)$ kifejezéssel definiált $f \in \mathcal{F}(I)$ valós függvény konstans.*

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy a σ görbe $t \in I$ helyen vett érintővektorára fennáll $\dot\sigma(t) \neq 0$. Kövessük a 4.1. Tétel bizonyításában alkalmazott eljárást. Eszerint van olyan $J \subset I$ $(t \in J)$ részintervallum és vannak olyan $\hat{Y},\ \hat{Z} \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők a sokaságon, hogy fennáll $Y(\tau) = \hat{Y} \circ \sigma(\tau)$ és $Z(\tau) = \hat{Z} \circ \sigma(\tau)$ bármely $\tau \in J$ esetén. Emiatt teljesül $f(\tau) = g(\hat{Y}, \hat{Z}) \circ \sigma(\tau)$, illetve ebből adódóan $f'(t) = \dot\sigma(t)(g(\hat{Y}, \hat{Z}))$ is igaz. Mivel a ∇ konnexió metrikus, (5.1) következtében bármely $v \in T_p(M)$ érintővektor szerinti iránymenti deriváltra teljesül

$$v(g(\hat{Y}, \hat{Z})) = g(\nabla_v \hat{Y}, \hat{Z}(p)) + g(\hat{Y}(p), \nabla_v \hat{Z})\,.$$

Amennyiben v helyett a $\dot\sigma(t)$ vektort vesszük, akkor $Y'(t) = \nabla_{\dot\sigma(t)}\hat{Y}$ felhasználásával az

$$f'(t) = g(\nabla_{\dot\sigma(t)}\hat{Y}, \hat{Z}(\sigma(t))) + g(\hat{Y}(\sigma(t)), \nabla_{\dot\sigma(t)}\hat{Z}) = g(Y'(t), Z(t)) + g(Y(t), Z'(t))$$

összefüggést nyerjük. Az Y, Z párhuzamos vektormezők σ mentén, tehát igaz $Y'(t) = 0$ és $Z'(t) = 0$. Ezekből pedig $f'(t) = 0$ következik.

Könnyen igazolható a (4.4) kifejezés alkalmazásával, hogy amennyiben a $t \in I$ helyen fennáll $\dot{\sigma}(t) = 0$, akkor is teljesül $f'(t) = 0$. Ezek alapján az f függvény konstans. $\square$

A fenti állításból már következik az alábbi eredmény.

5.3. Állítás. *Vegyünk egy $\sigma : I \to M$ sima görbét és valamely a, $b \in I$ értékeket. A $\mathcal{P}_\sigma : T_{\sigma(a)}M \to T_{\sigma(b)}M$ párhuzamos eltolás σ mentén megőrzi a skaláris szorzatot az érintőtereken.*

A Riemann–sokaság geodetikus görbéi

Legyen adott az (M, g) Riemann–sokaság egy (U, ξ) térképe és egy olyan egy $\gamma : I \to M$ sima görbe, amelyre fennáll $\gamma(I) \subset U$. Mint ismeretes, a γ–t akkor mondjuk geodetikusnak, ha az érintővektoraival nyert $\dot{\gamma} \in \mathfrak{X}(\gamma)$ vektormező párhuzamos γ mentén, azaz teljesül $(\dot{\gamma})'(t) = 0$, $t \in I$. A görbementi párhuzamos vektormezőket a (4.5) egyenletrendszer jellemzi. Eszerint a γ pontosan akkor lesz geodetikus, ha az $y_k = x^k \circ \gamma$ $(k = 1, \ldots, m)$ koordináta–függvényei kielégítik az

$$y_k''(t) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \Gamma_{i\,j}^{k}(\gamma(t)) \cdot y_i'(t) \cdot y_j'(t) = 0 \tag{5.6}$$

másodrendű differenciálegyenlet–rendszert.

5.6. Definíció. A $\gamma : I \to M$ geodetikus görbét maximálisnak mondjuk, ha nincs olyan $\sigma : J \to M$ geodetikus, amelyre $I \subset J$, $I \neq J$ és $\sigma|I = \gamma$ egyaránt teljesül.

A differenciálegyenletek elmélete alapján igazolható az alábbi tétel.

5.2. Tétel. *Tekintsük az (M, g) Riemann–sokaság egy tetszőleges $v \in T_pM$ $(p \in M)$ érintővektorát. Egyértelműen létezik egy olyan $\gamma : I \to M$ maximális geodetikus, amelyre fennáll $\gamma(0) = p$ és $\dot{\gamma}(0) = v$.*

A Riemann–sokaság görbületi tenzorára vonatkozó összefüggések

A könnyebb áttekinthetőség érdekében az M sokaságon vett Riemann-metrikát g helyett jelölje $\langle\ ,\ \rangle$ az alábbiak során.

5.4. Állítás. *Az $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ Riemann–sokaság R görbületi tenzorára igazak az alábbi összefüggések tetszőleges X, Y, Z, $W \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén:*
(1) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$;
(2) $\langle R(X,Y)Z,\, W\rangle = -\langle R(X,Y)W,\, Z\rangle$;
(3) $\langle R(X,Y)Z,\, W\rangle = \langle R(Z,W)X,\, Y\rangle$.

5.7. Definíció. Legyen az S egy 2–dimenziós altere a T_pM $(p \in M)$ érintőtérnek. Vegyük az S altér tetszőleges v és w lineárisan független vektorait. A $K(S) = \dfrac{\langle R(v,w)w, v\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$ számot a Riemann–sokaság S síkálláshoz tartozó Gauss–görbületének nevezzük.

Megjegyzés. Az előző állításban szereplő összefüggések alapján be lehet látni, hogy a $K(S)$ Gauss–görbület értéke nem függ az S alteret generáló v, w vektorok megválasztásától.

6) Integrálás az irányítható sokaságon

6.1) Az alternáló multilineáris formák külső szorzata

A multilineáris formák tenzori szorzata

Legyen adott egy m–dimenziós V vektortér az $\mathbb{R}$ valós számtest felett. A V–n értelmezett k–lineáris formán ($k \geq 1$) egy olyan $\alpha : V^k \to \mathbb{R}$ leképezést értünk, amely az összes változójában lineáris, azaz bármely $v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k$, w_i vektorok és c valós szám esetén fennállnak az $\alpha(v_1, \ldots, v_i + w_i, \ldots, v_k) = \alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \alpha(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_k)$, $\alpha(v_1, \ldots, c\,v_i, \ldots, v_k) = c \cdot \alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$ összefüggések. A továbbiakban az α–t egy V feletti k–formának is mondjuk.

Világos, hogy természetes módon értelmezni lehet két k–forma összegét, illetve egy k–formának egy valós számmal vett szorzatát. Ezen műveletekre nézve a V téren vett k–formák egy vektorteret adnak az $\mathbb{R}$ számtest felett. Jelölje $\mathcal{L}^k(V)$ a V feletti k–lineáris formák terét. Igazolható, hogy ennek dimenziója m^k.

6.1. Definíció. Az $\alpha \in \mathcal{L}^k(V)$ és $\beta \in \mathcal{L}^l(V)$ multilineáris formák tenzoriális szorzatán azt az $\alpha \otimes \beta \in \mathcal{L}^{k+l}(V)$ $(k+l)$–lineáris formát értjük, amelyre fennáll
$\alpha \otimes \beta(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \alpha(v_1, \ldots, v_k) \cdot \beta(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l})$ tetszőleges $v_1, \ldots, v_{k+l} \in V$ vektorok esetén.

Megjegyzés. A definícióból azonnal adódik, hogy a V feletti multilineáris formák tenzoriális szorzása egy asszociatív művelet. Ez nyilván azt jelenti, hogy bármely $\alpha \in \mathcal{L}^k(V)$, $\beta \in \mathcal{L}^l(V)$ és $\gamma \in \mathcal{L}^n(V)$ mellett $(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)$ teljesül.

Ugyanakkor, könnyű belátni, hogy a tenzoriális szorzás nem kommutatív művelet.

A multilineáris formák transzformálása permutációkkal

Jelölje $\mathbb{N}_k$ az első k ($k \geq 1$) pozitív egész szám halmazát, vagyis legyen $\mathbb{N}_k = \{1, \ldots, k\}$. Az $1, \ldots, k$ számok permutációjának mondunk egy $s : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ bijektív leképezést.

Vegyünk egy további $r : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ bijektív leképezést. Az r, s permutációk szorzatán a bijektív leképezések $r \circ s : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ kompozícióját értjük. Az egyszerűség kedvéért a szorzatra az rs jelölést alkalmazzuk.

Mint ismeretes, az $1, \ldots, k$ számok összes permutációi a fenti szorzásműveletre nézve egy csoportot alkotnak, melyet k–adfokú szimmetrikus csoportnak nevezünk. A továbbiakban ezt a csoportot $\mathcal{S}_k$ fogja jelölni.

Erre vonatkozóan alkalmazni fogjuk a $\pi : \mathcal{S}_k \to \{-1, 1\}$ homomorfizmust is, ahol az $s \in \mathcal{S}_k$ páros permutációnál $\pi(s) = 1$, illetve az $s \in \mathcal{S}_k$ páratlan permutáció esetén $\pi(s) = -1$.

Egy $s \in \mathcal{S}_k$ permutációval transzformálni lehet a k–formákat az alábbi definíció szerint.

6.2. Definíció. Legyen adva $s \in \mathcal{S}_k$ permutáció. Az $\alpha \in \mathcal{L}^k(V)$ multilineáris formának az s permutáció általi transzformáltján azt az $s\alpha$ k–lineáris formát értjük, amelyet az $s\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(v_{s(1)}, \ldots, v_{s(k)})$ összefüggés ír le, ahol $v_1, \ldots, v_k \in V$.

Legyen adott egy $\alpha \in \mathcal{L}^k(V)$ forma és az r, $s \in \mathcal{S}_k$ permutációk. Emlékezzünk rá, hogy a permutációk rs szorzatát az $r \circ s : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ kompozíció–leképezéssel értelmeztük. Az előbbi definíció alapján vehetjük az $r(s\alpha)$ k–lineáris formát is, amelyet az $s\alpha$ formának az r általi transzformálásával nyerünk. Erre vonatkozóan alkalmazni fogjuk az alábbi segédtételt.

6.1. Lemma. *Tetszőleges* $\alpha \in \mathcal{L}^k(V)$ *forma és az* $r,\ s \in \mathcal{S}_k$ *permutációk esetén fennáll az* $r(s\alpha) = (rs)\alpha$ *összefüggés.*

Bizonyítás.
A V vektortérben vegyük a $v_1, \dots, v_k$ vektorokat. Vezessük be a $w_i = v_{r(i)}$ $(i = 1, \dots, k)$ jelölést. Mivel az s egy bijektív leképezést ad az $\mathbb{N}_k$ halmazon, bármely $i \in \mathbb{N}_k$ elemnek egyértelműen megfelel egy $j \in \mathbb{N}_k$ elem, amellyel fennáll $i = s(j)$. Világos, hogy ennek következtében $w_{s(j)} = v_{r(s(j))} = v_{rs(j)}$ $(j = 1, \dots, k)$ teljesül. Ily módon azt kapjuk, hogy fennáll

$$r(s\alpha)(v_1, \dots, v_k) = s\alpha(v_{r(1)}, \dots, v_{r(k)}) = = s\alpha(w_1, \dots, w_k) =$$
$$= \alpha(w_{s(1)}, \dots, w_{s(k)}) = \alpha(v_{r(s(1))}, \dots, v_{r(s(k))}) = (rs)\alpha(v_1, \dots, v_k),$$

ami igazolja az $r(s\alpha) = (rs)\alpha$ összefüggést. $\square$

Az alternáló multilineáris formák tere

Emlékezzünk rá, hogy az $\mathcal{S}_k$ k–adfokú szimmetrikus csoportot úgy tekintjük, mint az $\mathbb{N}_k$ bijektív leképezéseinek a csoportját. Tetszőleges $s \in \mathcal{S}_k$ esetén jelölje $I(s)$ a permutációban szereplő inverziók számát. Ennek alapján adódik a $\pi : \mathcal{S}_k \to \{-1, 1\}$ természetes homomorfizmus, melyet a $\pi(s) = (-1)^{I(s)}$ kifejezés ír le.

Világos, hogy amennyiben egy $t \in \mathcal{S}_k$ transzpozíciót veszünk, amely az $\mathbb{N}_k$ két elemét felcseréli és a többit fixen hagyja, akkor $\pi(t) = -1$ adódik. Mint ismeretes, bármely permutáció előállítható transzpozíciók szorzataként, és az előállításban szereplő transzpozíciók száma vagy mindig páros, vagy mindig páratlan.

6.3. Definíció. Az $\alpha \in \mathcal{L}^k(V)$ k–lineáris formát alternálónak (vagy más néven antiszimmetrikusnak) nevezzük, ha tetszőleges $s \in \mathcal{S}_k$ esetén fennáll $s\alpha = \pi(s) \cdot \alpha$.

Az előző definíciók szerint egy $\alpha \in \mathcal{L}^k(V)$ k–lineáris forma pontosan akkor alternáló, ha tetszőleges tetszőleges $v_1, \dots, v_{k+l} \in V$ vektorokra és $s \in \mathcal{S}_k$ permutációra teljesül az

$$\alpha(v_{s(1)}, \dots, v_{s(k)}) = \pi(s) \cdot \alpha(v_1, \dots, v_k)$$

összefüggés.

Megjegyzés. Evidens, hogy a V feletti alternáló k–lineáris formák egy alteret alkotnak az $\mathcal{L}^k(V)$ lineáris térben. A továbbiakban a V–n értelmezett alternáló k–formák terét $\mathcal{A}^k(V)$ fogja jelölni.

Nyilván fennáll az $\mathcal{A}^1(V) = \mathcal{L}^1(V)$ összefüggés is, azaz bármely 1–lineáris forma alternáló.

Megjegyzés. Vegyünk egy $\alpha \in \mathcal{A}^k(V)$ $(k \geq 2)$ alternáló formát. Mivel bármely $t \in \mathcal{S}_k$ transzpozícióra fennáll az $t\alpha = -\alpha$ egyenlőség, az α forma értéke bármely két változó felcserélése esetén előjelet vált. Ebből következik, hogy ha a $v_1, \dots, v_k \in V$ vektorok lineárisan összefüggők, akkor $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$ teljesül.

Ily módon azt is beláttuk, hogy amennyiben $k > m$ és $\alpha \in \mathcal{A}^k(V)$, akkor $\alpha = 0$.

Legyen $e_1, \dots, e_m$ egy bázisa a V–nek. A fentiek szerint egy $\alpha \in \mathcal{A}^k(V)$ alternáló k–formát az $\alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ $(1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m)$ értékek már egyértelműen meghatároznak. Vegyük az $\mathcal{A}^k(V)$ tér azon $\varepsilon^{i_1,\dots,i_k}$ $(1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m)$ elemeit, amelyeket az alábbi összefüggések írnak le:

$$\varepsilon^{i_1,\dots,i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 1 \quad \text{amennyiben} \quad (i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k),$$

$$\varepsilon^{i_1,\dots,i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 0 \ \text{ ha } \ j_1 < \dots < j_k \ \text{ s } \ (i_1, \dots, i_k) \neq (j_1, \dots, j_k).$$

Igazolható, hogy ezen alternáló k–formák egy bázisát képezik az $\mathcal{A}^k(V)$ térnek, és bármely $\alpha \in \mathcal{A}^k(V)$ formára fennáll

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \cdot \varepsilon^{i_1,\dots,i_k}.$$

Ennek következtében az $\mathcal{A}^k(V)$ $(1 \leq k \leq m)$ tér dimenziója $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}$.

Az alternáló operátor

Az alábbiak során azt tárgyaljuk, hogy a V vektortér feletti k–formákból miként lehet alternáló formákat kapni.

6.4. Definíció. A V vektortér k–lineáris formáinak terén vett alternáló operátoron azt az $\mathfrak{a} : \mathcal{L}^k(V) \to \mathcal{L}^k(V)$ leképezést $(k \geq 1)$ értjük, amelyet az $\mathfrak{a}(\alpha) = \sum_{s \in \mathcal{S}_k} \pi(s) \cdot s\alpha$ kifejezés ír le tetszőleges $\alpha \in \mathcal{L}^k(V)$ esetén.

Megmutatjuk, hogy az $\mathfrak{a}(\alpha)$ forma bármely $\alpha \in \mathcal{L}^k(V)$ mellett alternáló. Ugyanis, a 6.1. Lemmát alkalmazva azt kapjuk, hogy az $\mathfrak{a}(\alpha)$ formának egy $r \in \mathcal{S}_k$ permutáció általi transzformáltjára fennáll

$$r\mathfrak{a}(\alpha) = r\Big(\sum_{s \in \mathcal{S}_k} \pi(s) \cdot s\alpha\Big) = \sum_{s \in \mathcal{S}_k} \pi(s) \cdot (rs)\alpha =$$

$$= \pi(r) \cdot \Big(\sum_{s \in \mathcal{S}_k} \pi(rs) \cdot (rs)\alpha\Big) = \pi(r) \cdot \Big(\sum_{s \in \mathcal{S}_k} \pi(s) \cdot s\alpha\Big) = \pi(r) \cdot \mathfrak{a}(\alpha)\,.$$

A fenti összefüggés alapján adódik, hogy az $\mathfrak{a}$ alternáló operátor egy olyan lineáris leképezés a k–formák terén, amelyre $\mathfrak{a}(\mathcal{L}^k(V)) = \mathcal{A}^k(V)$ teljesül.

Vegyük észre azt is, hogy amennyiben egy $\alpha \in \mathcal{A}^k(V)$ alternáló formát veszünk, akkor fennáll $\mathfrak{a}(\alpha) = k! \cdot \alpha$.

Két multilineáris forma tenzori szorzatát már a fejezet elején értelmeztük. Az $\mathfrak{a}$ operátornak a tenzori szorzattal kapcsolatos tulajdonságait írja le az alábbi segédtétel.

6.2. Lemma. *Tetszőleges $\alpha \in \mathcal{L}^k(V)$ és $\beta \in \mathcal{L}^l(V)$ multilineáris formákra igazak az alábbi összefüggések:*

$\mathfrak{a}(\beta \otimes \alpha) = (-1)^{kl} \cdot \mathfrak{a}(\alpha \otimes \beta), \quad \mathfrak{a}(\mathfrak{a}(\alpha) \otimes \beta) = k! \cdot \mathfrak{a}(\alpha \otimes \beta), \quad \mathfrak{a}(\alpha \otimes \mathfrak{a}(\beta)) = l! \cdot \mathfrak{a}(\alpha \otimes \beta).$

Bizonyítás.

Mint ismeretes, az $\mathbb{N}_k$ halmaz tetszőleges r permutációját meg lehet adni egy $2 \times k$ típusú mátrixszal is az alábbi módon. Az r permutációt leíró $M(r)$ mátrix első sorában szerepeljenek az $1, \dots, k$ egész számok, a második sorban pedig ezeknek az r szerinti képei, vagyis az $r(1), \dots, r(k)$ számok.

Vegyük az $\mathbb{N}_{k+l}$ számhalmaznak azon t permutációját, amelyet az $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & k+l \\ l+1 & l+2 & \dots & l+k & 1 & \dots & l \end{pmatrix}$ mátrix ír le. Könnyű belátni, hogy a t permutációban szereplő inverziók száma $k\,l$, vagyis $\pi(t) = (-1)^{kl}$. Emellett a

$$\beta \otimes \alpha(v_1, \dots, v_{k+l}) = \beta(v_1, \dots, v_l) \cdot \alpha(v_{l+1}, \dots, v_{l+k}) =$$
$$= \alpha(v_{t(1)}, \dots, v_{t(k)}) \cdot \beta(v_{t(k+1)}, \dots, v_{t(k+l)}) = t(\alpha \otimes \beta)(v_1, \dots, v_{k+l})$$

összefüggés szerint igaz $\beta \otimes \alpha = t(\alpha \otimes \beta)$. Ennek ismeretében azt kapjuk, hogy fennáll

$$\mathfrak{a}(\beta \otimes \alpha) = \sum_{s \in \mathcal{S}_{k+l}} \pi(s) \cdot s(\beta \otimes \alpha) = \sum_{s \in \mathcal{S}_{k+l}} \pi(s) \cdot s(t(\alpha \otimes \beta)) =$$
$$\sum_{s \in \mathcal{S}_{k+l}} \pi(st) \cdot \pi(t) \cdot (st)(\alpha \otimes \beta) = \pi(t) \cdot \sum_{s \in \mathcal{S}_{k+l}} \pi(s) \cdot s(\alpha \otimes \beta) = (-1)^{kl} \cdot \mathfrak{a}(\alpha \otimes \beta)\,.$$

Ezzel pedig igazoltuk az állításban szereplő első egyenlőséget.

A második összefüggés levezetése érdekében tetszőleges $r \in \mathcal{S}_k$ permutációnak feleltessük meg azon $\tilde{r} \in \mathcal{S}_{k+l}$ permutációt, amelyet az $M(\tilde{r}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & k+l \\ r(1) & r(2) & \dots & r(k) & k+1 & \dots & k+l \end{pmatrix}$ mátrix ír le. Ez esetben bármely $s \in \mathcal{S}_{k+l}$ elemre és $v_1, \dots, v_{k+l}$ vektorokra fennáll

$$s((r\alpha) \otimes \beta)(v_1, \dots, v_{k+l}) = r\alpha(v_{s(1)}, \dots, v_{s(k)}) \cdot \beta(v_{s(k+1)}, \dots, v_{s(k+l)}) =$$
$$\alpha(v_{s(r(1))}, \dots, v_{s(r(k))}) \cdot \beta(v_{s(k+1)}, \dots, v_{s(k+l)}) = \alpha(v_{s(\tilde{r}(1))}, \dots, v_{s(\tilde{r}(k))}) \cdot \beta(v_{s(\tilde{r}(k+1))}, \dots, v_{s\tilde{r}(k+l)})$$
$$= (s\tilde{r})(\alpha \otimes \beta)(v_1, \dots, v_{k+l}).$$

Alkalmazva a fentiekben belátott $s(r\alpha) \otimes \beta) = (s\tilde{r})(\alpha \otimes \beta)$ egyenlőséget azt kapjuk, hogy

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{a}(\alpha) \otimes \beta) = \sum_{s \in \mathcal{S}_{k+l}} \pi(s) \cdot s\Big(\sum_{r \in \mathcal{S}_k} \pi(r) \cdot (r\alpha \otimes \beta)\Big) =$$
$$\sum_{r \in \mathcal{S}_k} \Big(\sum_{s \in \mathcal{S}_{k+l}} \pi(s\tilde{r}) \cdot (s\tilde{r})(r\alpha \otimes \beta)\Big) = k! \cdot \mathfrak{a}(\alpha \otimes \beta)$$

teljesül, ami igazolja a segédtételben szereplő második összefüggést.

A harmadik egyenlőség bizonyítása hasonló eljárással történik. $\square$

Az alternáló formák külső szorzata

Az eddigi előkészítések alapján már be tudjuk vezetni két alternáló multilineáris forma külső szorzatának a fogalmát.

6.5. Definíció. Az $\alpha \in \mathcal{A}^k(V)$ és $\beta \in \mathcal{A}^l(V)$ alternáló formák ($k,\, l \geq 1$) külső szorzatán az

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{k!\, l!}\, \mathfrak{a}(\alpha \otimes \beta)$$

alternáló $(k+l)$–formát értjük.

Megjegyzés. A korábbi definíciók alapján a külső szorzatra vonatkozóan fennáll az

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!\,l!} \sum_{s \in \mathcal{S}_{k+l}} \pi(s) \cdot \alpha(v_{s(1)}, \ldots, v_{s(k)}) \cdot \beta(v_{s(k+1)}, \ldots, v_{s(k+l)})$$

összefüggés bármely $v_1, \ldots, v_{k+l} \in V$ vektorokra.

A 6.2. Lemma első összefüggéséből már következik, hogy igaz az alábbi kijelentés.

6.1. Állítás. *Tetszőleges $\alpha \in \mathcal{A}^k(V)$ és $\beta \in \mathcal{A}^l(V)$ alternáló formák esetén fennáll* $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \cdot \beta \wedge \alpha$.

A definícióból azonnal adódik, hogy a külső szorzás egy disztributív művelet. Ezen persze azt értjük, hogy bármely α_1, $\alpha_2 \in \mathcal{A}^k(V)$ és $\beta \in \mathcal{A}^l(V)$ mellett teljesül $(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta$.

A külső szorzás asszociativitását mondja ki a következő állítás.

6.2. Állítás. *Tetszőleges $\alpha \in \mathcal{A}^k(V)$, $\beta \in \mathcal{A}^l(V)$ és $\gamma \in \mathcal{A}^n(V)$ alternáló formákra fennáll* $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.

Bizonyítás.
A 6.2. Lemma összefüggéseit alkalmazva közvetlen számolással kapjuk, hogy $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \frac{1}{k!} \frac{1}{l!} \frac{1}{n!} \mathfrak{a}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma) = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ teljesül, ami már igazolja az állítást.

Az első egyenlőség levezetését meg is adjuk

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \frac{1}{(k+l)!} \frac{1}{n!} \cdot \mathfrak{a}\big((\alpha \wedge \beta) \otimes \gamma\big) = \frac{1}{(k+l)!} \frac{1}{n!} \cdot \mathfrak{a}\Big(\frac{1}{k!} \frac{1}{l!} \mathfrak{a}(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma\Big)$$

$$\frac{1}{(k+l)!} \frac{1}{n!} \frac{1}{k!} \frac{1}{l!} \cdot (k+l)! \cdot \mathfrak{a}\big(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma\big) = \frac{1}{k!} \frac{1}{l!} \frac{1}{n!} \cdot \mathfrak{a}\big(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma\big) \quad \square$$

Az alábbi kijelentés az 1–formák külső szorzatát jellemzi.

6.3. Állítás. *Legyenek adva az $\alpha^1, \ldots, \alpha^k \in \mathcal{A}^1(V)$ 1–formák és a $v_1, \ldots, v_k \in V$ vektorok. Ez esetben teljesül az*

$$\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k(v_1, \ldots, v_k) = \begin{vmatrix} \alpha^1(v_1) & \alpha^1(v_2) & \ldots & \alpha^1(v_k) \\ \alpha^2(v_1) & \alpha^2(v_2) & \ldots & \alpha^2(v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^k(v_1) & \alpha^k(v_2) & \ldots & \alpha^k(v_k) \end{vmatrix} \quad \textit{összefüggés.}$$

Bizonyítás.
Akárcsak az előző állítás esetében, ezúttal is a 6.2. Lemmát kell alkalmaznunk. Az alapján belátható, hogy fennáll az

$$\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^k = \mathfrak{a}(\alpha^1 \otimes \alpha^2 \otimes \cdots \otimes \alpha^k)$$

egyenlőség. Amennyiben az $\mathfrak{a}(\alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^k)$ alternáló formát kiértékeljük a $v_1, \ldots, v_k$ vektorokon, akkor a

$$\mathfrak{a}\big(\alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^k\big)(v_1, \ldots, v_k) = \textstyle\sum_{s \in \mathcal{S}_k} \pi(s) \cdot \alpha^1(v_{s(1)}) \ldots \alpha^k(v_{s(k)})$$

kifejezést kapjuk, ami éppen a megadott determinánssal egyenlő. $\square$

Megjegyzés. A 6.3. Állításból azonnal következik, hogy akkor és csak akkor áll fenn $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k = 0$, ha az $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ 1–formák lineárisan összefüggők.

Legyen $e_1, \ldots, e_m$ egy bázisa a V vektortérnek ($m \geq 2$). Vegyük ennek $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m$ duális bázisát a $V^* = \mathcal{L}^1(V)$ duális térben. A korábbi eredményekből már következik az alábbi kijelentés.

6.4. Állítás. *A külső szorzással nyert* $\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m)$ *alternáló k–formák egy bázisát képezik az $\mathcal{A}^k(V)$ $(2 \leq k \leq m)$ térnek. Bármely $\beta \in \mathcal{A}^k(V)$ alternáló k–formára teljesül* $\beta = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \beta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \cdot \varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}$.

A lineáris leképezés által az alternáló formák terén indukált leképezés

Legyenek adva a V és W valós vektorterek, ahol $dim\, V = m$ és $dim\, W = n$.
Tekintsünk egy $\mu : V \to W$ lineáris leképezést.

6.6. Definíció. A $\mu^* : \mathcal{A}^k(W) \to \mathcal{A}^k(V)$ leképezést, ahol fennáll $\mu^*(\beta)(v_1, \ldots, v_k) = \beta(\mu(v_1), \ldots, \mu(v_k))$ tetszőleges $\beta \in \mathcal{A}^k(W)$ és $v_1, \ldots, v_k \in V$ esetén, az alternáló k–formák terén a μ által indukált leképezésnek mondjuk.

Számolással ellenőrizhető, hogy a μ^* indukált leképezés és a külső szorzás felcserélhetőek.

6.5. Állítás. *Bármely $\alpha \in \mathcal{A}^k(W)$ és $\beta \in \mathcal{A}^l(W)$ alternáló formák esetén teljesül* $\mu^*(\alpha \wedge \beta) = \mu^*(\alpha) \wedge \mu^*(\beta)$.

A vektortér térfogati formái

6.7. Definíció. Az m–dimenziós V vektortéren vett alternáló m–formákat a V térfogati formáinak nevezzük.

Korábban már beláttuk, hogy a térfogati formák $\mathcal{A}^m(V)$ tere 1–dimenziós. Legyenek $e_1, \ldots, e_m$ és $b_1, \ldots, b_m$ bázisai a V vektortérnek. A $b_i = \sum_{r=1}^m C_i^r\, e_r$ $(i = 1, \ldots, m)$ kifejezések együtthatóiból nyert $m \times m$–es mátrixot jelölje $\mathbf{C}$. Tekintsük a fenti bázisok $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m$ és $\beta^1, \ldots, \beta^m$ duális bázisait a V^* duális térben.

Mivel $\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^m$ és $\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^m$ nem eltűnő m–edfokú alternáló formák, az egyik forma a másiknak egy számszorosa. Vegyük észre, hogy emiatt a két térfogati formára fennáll

$$\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^m = (\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^m)(b_1, \ldots, b_m) \cdot \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^m\,.$$

Az $\varepsilon^r(b_i) = C_i^r$ egyenlőségekből és a 6.3. Állításból következik, hogy $(\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^m)(b_1, \ldots, b_m) = det\, \mathbf{C}$. Ezek alapján teljesül az

$$\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^m = det\, \mathbf{C} \cdot \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^m \tag{6.1}$$

összefüggés.

Megjegyzés. Vegyünk egy $\mu : V \to V$ lineáris leképezést. Ugyancsak a 6.3. Állítás alapján igazolható, hogy tetszőleges $\alpha \in \mathcal{A}^m(V)$ térfogati formára fennáll $\mu^*(\alpha) = det(\mu) \cdot \alpha$.

6.2) A sima sokaság differenciálformái

6.8. Definíció. Legyen adott egy m–dimenziós M differenciálható sokaság. Ennek k–adfokú differenciálformáján ($k \geq 1$) egy olyan $(0,k)$ típusú $\omega : \mathfrak{X}(M)^k \to \mathcal{F}(M)$ tenzormezőt értünk, ahol fennáll

$$\omega(X_1, \dots, X_k) = \pi(s) \cdot \omega(X_{s(1)}, \dots, X_{s(k)})$$

tetszőleges $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők és $s \in \mathcal{S}_k$ permutáció esetén.

Megjegyzés. Az M sokaságon vett k–adfokú differenciálformák terét, mint $\mathbb{R}$ feletti vektorteret, $\Omega^k(M)$ fogja jelölni. Nyilvánvaló, hogy $\Omega^k(M)$ tekinthető az $\mathcal{F}(M)$ gyűrű feletti modulusnak is. Megállapodás szerint fennáll $\Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$.

Tekintsünk egy $\omega \in \Omega^k(M)$ k–adfokú differenciálformát. Ennek tetszőleges pontban megfeleltethető egy $\omega_p : (T_pM)^k \to \mathbb{R}$ k–lineáris leképezés. Evidens, hogy ω_p egy alternáló k–formát ad a T_pM érintőtér fellett, vagyis fennáll $\omega_p \in \mathcal{A}^k(T_pM)$.

Definiálni tudjuk két differenciálforma külső szorzatát.

6.9. Definíció. Az $\omega \in \Omega^k(M)$ és $\eta \in \Omega^l(M)$ differenciálformák (k, $l \geq 1$) külső szorzatán azt az $\omega \wedge \eta$ által jelölt, $(k+l)$–edfokú differenciálformát értjük, ahol

$$\omega \wedge \eta \, (X_1, \dots, X_{k+l}) = \frac{1}{k!\, l!} \sum_{s \in \mathcal{S}_{k+l}} \pi(s) \cdot \omega(X_{s(1)}, \dots, X_{s(k)}) \cdot \eta(X_{s(k+1)}, \dots, X_{s(k+l)})$$

teljesül tetszőleges $X_1, \dots, X_{k+l} \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőkre.

Megjegyzés. Fontos megjegyeznünk, hogy a differenciálformák külső szorzása pontonként elvégezhető, vagyis fennáll $(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p \quad (p \in M)$. Ennek következtében a külső szorzás művelete disztributív és asszociatív, továbbá teljesül az $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \cdot \eta \wedge \omega$ összefüggés.

Legyen (U, ξ) egy (lokális) térképe az M sokaságnak. Tekintsük ezen térképezés $y^i = u^i \circ \xi : U \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$ koordináta–függvényeit. Ismeretes, hogy amennyiben az U nyílt részsokaságon vett elsőfokú differenciálformák $\Omega^1(U)$ terét mint az $\mathcal{F}(U)$ feletti modulust tekintjük, akkor ennek egy bázisát képezik a dy^i $(i = 1, \dots, m)$ 1–formák.
A 6.4. Állítás következtében igaz az alábbi kijelentés.

6.6. Állítás. *Az $\mathcal{F}(U)$ gyűrű feletti $\Omega^k(U)$ $(2 \leq k \leq m)$ modulusnak egy bázisát adják a $dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}$ $(1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m)$ k–adfokú differenciálformák. Tetszőleges $\omega \in \Omega^k(U)$ differenciálformára teljesül*

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \omega\Big(\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{i_k}}\Big) \cdot dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}. \tag{6.2}$$

A külső differenciál

6.10. Definíció. Az $f \in \mathcal{F}(M) = \Omega^0(M)$ sima függvény külső differenciálján azt a $df : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ elsőfokú differenciálformát értjük, amelyre fennáll $df(X) = X(f)$ tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőre.

6.11. Definíció. Vegyünk egy $\omega \in \Omega^k(M)$ differenciálformát ($k \geq 1$). Ennek külső differenciálján azt a $d\omega : \mathfrak{X}(M)^{k+1} \to \mathcal{F}(M)$ leképezést értjük, amelyet a

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots, \overline{X_i}, \dots, X_{k+1})) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \overline{X_i}, \dots, \overline{X_j}, \dots, X_{k+1}) \end{aligned} \tag{6.3}$$

összefüggés ír le, ahol $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$. *(A definiáló kifejezésben az $\overline{X_i}$ jel arra utal, hogy az X_i vektormezőt kihagyjuk a változók közül.)*

Megjegyzés. Vegyünk egy $\omega \in \Omega^1(M)$ elsőfokú differenciálformát. A definíció alapján a $d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$ összefüggéshez jutunk, ahol $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Ebből már adódik, hogy a $d\omega$ egy másodfokú differenciálforma az M sokaságon.

Jelen alfejezet összefüggéseinek igazolásában fontos szerephez jut az alábbi állítás.

6.7. Állítás. *Az M sokaságon legyenek adva az f, y^1, ..., $y^k \in \mathcal{F}(M)$ sima függvények. Az $\omega = f\, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^k$ k–adfokú differenciálforma külső differenciáljára teljesül a*

$$d\omega = df \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dy^k \tag{6.4}$$

összefüggés.

Bizonyítás.

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $X_1, \dots, X_{k+1}$ vektormezőkhöz a $d\omega$ leképezés ugyanazt a sima függvényt rendeli, mint a $df \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dy^k$ differenciálforma.

Elsőként vegyük a $J = (df \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dy^k)(X_1, \dots, X_{k+1})$ függvényt. A 6.3. Állítás szerint ez a J függvény előáll egy olyan $(k+1)$-edrendű négyzetes mátrix determinánsaként, amelynek elemei a $df(X_i) = X_i(f)$ és $dy^j(X_i) = X_i(y^j)$ függvények, vagyis az f, $y^1, \dots, y^k$ függvényeknek a vektormezők általi deriváltjai. Konkrétan fennáll a

$$J = det \begin{pmatrix} df(X_1) & df(X_2) & \dots & df(X_{k+1}) \\ dy^1(X_1) & dy^1(X_2) & \dots & dy^1(X_{k+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ dy^k(X_1) & dy^k(X_2) & \dots & dy^k(X_{k+1}) \end{pmatrix}$$

összefüggés. A fenti determinánst fejtsük ki a mátrix első sora alapján, és az egyszerűsítés érdekében alkalmazzuk a $1 \times k$-típusú $X_i\mathbf{y} = \begin{pmatrix} X_i(y^1) \\ \vdots \\ X_i(y^k) \end{pmatrix}$ oszlopmátrixokat. Az ilyen oszlopmátrixokból képzett $k \times k$-típusú mátrixok determinánsára használjuk az

$A_i = det\left(X_1\mathbf{y}, \ldots, \overline{X_i\mathbf{y}}, \ldots, X_{k+1}\mathbf{y}\right)$ jelölést $(i = 1, \ldots, m)$. Az $\overline{X_i\mathbf{y}}$ jel arra utal, hogy ezt az oszlopot hagyjuk ki a mátrixból. Ily módon azt kapjuk, hogy a J függvényre teljesül

$$J = \textstyle\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}\,(X_i f)\cdot A_i\,.$$

Tekintsük most a (6.3) kifejezéssel leírt $d\omega$ leképezés értékét az $X_1, \ldots, X_{k+1}$ mezőkön, vagyis vegyük a $K = d\omega\,(X_1, \ldots, X_{k+1})$ függvényt. Az egyszerűsítés érdekében vezessük be a

$$B_{ij} = det\left(X_i(X_j\mathbf{y}), X_1\mathbf{y}, \ldots, \overline{X_i\mathbf{y}}, \ldots, \overline{X_j\mathbf{y}}, \ldots, X_{k+1}\mathbf{y}\right)$$

jelölést is $(i,\, j = 1, \ldots, m;\;\; i \neq j)$. Ezen determináns első oszlopában az X_i, X_j vektormezők szerinti másodrendű deriváltak szerepelnek és az $\overline{X_i\mathbf{y}}$, $\overline{X_j\mathbf{y}}$ oszlopok maradnak ki. Amennyiben $i > j$ áll fenn, akkor az $\overline{X_j\mathbf{y}}$ függvényoszlop kerül előbb kihagyásra a B_{ij} függvény determináns–kifejezésében.

Belátható, hogy az $\omega = f\,dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k$ kifejezés és (6.1) következtében fennáll az

$$\omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \overline{X_i}, \ldots, \overline{X_j}, \ldots, X_{k+1}) = f(B_{ij} - B_{ji})$$

összefüggés. A (6.3) formula alapján a $K = d\omega\,(X_1, \ldots, X_{k+1})$ függvény kifejezhető a fentiek során értelmezett A_i, B_{ij} függvényekkel a

$$K = \textstyle\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i(f\cdot A_i) + f\cdot\left(\sum_{i<j}(-1)^{i+j}(B_{ij} - B_{ji})\right)$$

alakban. Vegyük észre, hogy az egyenlet felírható a

$$\begin{aligned} K = &\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}(X_i\, f)\cdot A_i + f\cdot\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i\,(A_i) + \\ &+ f\cdot\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\,B_{ij} + f\cdot\sum_{i>j}(-1)^{i+j+1}\,B_{ij} \end{aligned} \tag{6.5}$$

formában is. Azt kellene megmutatni, hogy jobboldalon szereplő kifejezés utolsó három tagjának összege 0. Ehhez használjuk fel a

$$\begin{aligned} X_i(A_i) &= X_i(det\left(X_1\mathbf{y}, \ldots, \overline{X_i\mathbf{y}}, \ldots, X_{k+1}\mathbf{y}\right)) = \\ &= det\left(X_i(X_1\mathbf{y}), \ldots, \overline{X_i\mathbf{y}}, \ldots, X_{k+1}\mathbf{y}\right)) + \cdots + det\left(X_1\mathbf{y}, \ldots, \overline{X_i\mathbf{y}}, \ldots, X_i(X_{k+1}\mathbf{y})\right) \\ &= \sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{j-1}B_{ij} + \sum_{j=i+1}^{k+1}(-1)^{j}B_{ij} \end{aligned}$$

összefüggést, amelyből az

$$\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i\,(A_i) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\,B_{ij} + \sum_{i>j}(-1)^{i+j}\,B_{ij}$$

egyenletet nyerjük. Ebből és a (6.5) összefüggésből már következik, hogy fennáll

$$K = \textstyle\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}\,(X_i f)\cdot A_i\,.$$

Mivel a $J = (df \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k)(X_1, \ldots, X_{k+1})$ és $K = d\omega\,(X_1, \ldots, X_{k+1})$ függvények tetszőleges vektormezőkre egyenlőek, az állítás igazolást nyert. $\square$

Megjegyzés. Legyenek adva az ω_1, $\omega_2 \in \Omega^k(M)$ differenciálformák és az a, $b \in \mathbb{R}$ számok. A (6.3) összefüggésből adódik, hogy teljesül

$$d(a\,\omega_1 + b\,\omega_2)(X_1, \ldots, X_{k+1}) = a \cdot d\omega_1(X_1, \ldots, X_{k+1}) + b \cdot d\omega_1(X_1, \ldots, X_{k+1})$$

bármely $X_1, \ldots, X_{k+1}$ vektormezőkre.

A 6.6. és 6.7. Állítások alapján már bizonyítható az alábbi kijelentés.

6.8. Állítás. *Tetszőleges $\omega \in \Omega^k(M)$ $(k \geq 0)$ differenciálforma esetén a (6.3) formulával leírt $d\omega$ leképezés egy $(k+1)$–edfokú differenciálforma, vagyis fennáll $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$.*

Bizonyítás.

Vegyük az M sokaság egy (U, ξ) térképét. Ez esetben a térképezés koordináta–függvényei legyenek $y^r = u^r \circ \xi$ $(r = 1, \ldots, m)$. Tekintsük az ω differenciálforma $\tilde{\omega} = \omega|U$ leszűkítését az U nyílt részsokaságra. Világos, hogy fennáll $\tilde{\omega} \in \Omega^k(U)$ és a (6.3) formula alapján értelmezhető a $d\tilde{\omega} : \mathfrak{X}(U)^{k+1} \to \mathcal{F}(U)$ leképezés. A 6.6. Állítás szerint $\tilde{\omega}$ kifejezhető az y^r koordináta–függvények differenciáljaival az

$$\tilde{\omega} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} f_{i_1, \ldots, i_k} \cdot dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}$$

alakban, ahol $f_{i_1, \ldots, i_k} = \tilde{\omega}\big(\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^{i_k}}\big)$. Alkalmazva a (6.4) összefüggést azt kapjuk, hogy fennáll

$$d\tilde{\omega} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} df_{i_1, \ldots, i_k} \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}.$$

Ez pedig azt igazolja, hogy a $d\tilde{\omega}$ leképezés egy differenciálforma az U nyílt részsokaságon.

Mivel a $(d\omega)|U = d\tilde{\omega}$ egyenlőség teljesül bármely U térképtartományon, $d\omega$ egy $(k+1)$–edfokú differenciálformát ad az M sokaságon. $\square$

6.12. Definíció. Az M sokaság k–adfokú differenciálformáin vett külső differenciál leképezésen a $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ leképezést értjük, ahol $d(\omega) = d\omega$ $(\omega \in \Omega^k(M))$.

Megjegyzés. Ha tetszőleges k fokszám esetén a differenciálformák $\Omega^k(M)$ terét egy $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek tekintjük, akkor a külső differenciál leképezés lineáris.

A következő kijelentést a 6.1 és 6.7. Állítások felhasználásával lehet igazolni.

6.9. Állítás. *Amennyiben $\omega \in \Omega^k(M)$ és $\eta \in \Omega^l(M)$, akkor a külső szorzatuk differenciáljára $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ teljesül.*

Megjegyzés. Könnyen ellenőrizhető, hogy *tetszőleges $f \in \mathcal{F}(M) = \Omega^0(M)$ függvény esetén fennáll $d(df) = 0$.* Legyenek X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tetszőleges vektormezők. A (6.3) kifejezés szerint azt kapjuk, hogy

$$d(df)\,(X, Y) = X(df(Y)) - Y(df(X)) - df([X, Y]) = X(Y\,f) - Y(X\,f) - [X, Y](f) = 0,$$

amiből $d(df) = 0$ következik.

Eddigi eredményeink alapján bizonyítani lehet az alábbi állítást.

6.10. Állítás. *Tetszőleges* $\omega \in \Omega^k(M)$ $(k \geq 0)$ *differenciálformára igaz* $d(d\omega) = 0$.

Bizonyítás.

Egy korábbi bizonyításban már alkalmaztuk, hogy az ω–nak egy U térképtartományon vett leszűkítése előáll véges sok olyan $\eta \in \Omega^k(U)$ differenciálforma összegeként, amelyek kifejezhetőek az $\eta = f\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k$ alakban a koordináta–függvények differenciáljaival. A 6.7. Állítás szerint fennáll $d\eta = df \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k$. Tekintsük az U tartományon a konstans 1 függvényt, melyet jelöljön most e. Világos, hogy ennek differenciálja eltűnik, azaz $de = 0$. A (6.4) összefüggést a $d\eta = e\, df \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k$ differenciálformára alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$d(d\eta) = de \wedge df \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k = 0.$$

Ebből már következik, hogy $d(d\omega) = 0$ teljesül. □

6.13. Definíció. Az $\omega \in \Omega^k(M)$ $(k \geq 0)$ differenciálformát zártnak mondjuk, ha a differenciáljára fennáll $d\omega = 0$.

Amennyiben az ω k–adfokú $(k \geq 1)$ differenciálformához van olyan $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ differenciálforma, hogy $d\eta = \omega$ teljesül, akkor az ω–t egzaktnak nevezzük.

Megjegyzés. Legyen $\mathcal{Z}^k(M)$ az M sokaságon vett k–adfokú zárt differenciálformák tere, $\mathcal{B}^k(M)$ pedig a k–adfokú egzakt differenciálformák tere. (Megállapodás szerint $\mathcal{B}^0(M) = \{0\}$.) Nyilván fennáll $\mathcal{B}^k(M) \subset \mathcal{Z}^k(M)$. A $\mathcal{H}^k(M) = \mathcal{Z}^k(M)/\mathcal{B}^k(M)$ hányadosteret a sokaság k–adfokú kohomológia terének nevezzük.

Mint ismeretes, $\mathcal{T}_k^0(M)$ jelöli az M sokaságon vett $(0, k)$ típusú tenzormezők terét. Ily módon $\Omega^k(M) \subset \mathcal{T}_k^0(M)$ teljesül.

Az M és N differenciálható sokaságok között legyen adva egy $\mu : M \to N$ sima leképezés. Korábban már értelmeztük a $\mu^* : \mathcal{T}_k^0(N) \to \mathcal{T}_k^0(M)$ leképezést, amit a μ szerinti visszahúzásnak neveztünk. Könnyű belátni, hogy fennáll $\mu^*(\Omega^k(N)) \subset \Omega^k(M)$.

6.11. Állítás. *Tetszőleges* $\omega \in \Omega^k(N)$, $\eta \in \Omega^l(N)$ *differenciálformák esetén igazak az alábbi összefüggések:*

$$\mu^*(\omega \wedge \eta) = \mu^*(\omega) \wedge \mu^*(\eta), \qquad \mu^*(d\omega) = d(\mu^*\omega).$$

6.3) Az egységfüggvény felosztásának (felbontásának) tételei

6.14. Definíció. Az M sokaságon vett egységosztáson a sima függvények egy olyan $\{ f_\alpha \in \mathcal{F}(M) \mid \alpha \in A \}$ rendszerét értjük, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:
(1) Bármely $\alpha \in A$ és $p \in M$ esetén igaz $0 \leq f_\alpha(p) \leq 1$.
(2) A $\{ supp\, f_\alpha \mid \alpha \in A \}$ halmazrendszer lokálisan véges.
(3) Tetszőleges $p \in M$ pontban fennáll $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(p) = 1$.

6.15. Definíció. Az M sokaság nyílt lefedésén az M nyílt részhalmazainak egy olyan $\{ U_\alpha \mid \alpha \in A \}$ rendszerét értjük, amelyre igaz $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.

6.16. Definíció. Az M sokaságon vett $\{ f_i \in \mathcal{F}(M) \mid i \in I \}$ egységosztásról azt mondjuk, hogy az alá van rendelve az M egy adott $\{ U_\alpha \mid \alpha \in A \}$ nyílt lefedésének, ha tetszőleges $i \in I$ index esetén van olyan $\alpha \in A$, hogy fennáll $supp\, f_i \subset U_\alpha$.

Bizonyítás nélkül közöljük az egységfüggvény felosztására vonatkozó első tételt.

6.1. Tétel. *Legyen adva az M sokaságnak egy $\{ U_\alpha \mid \alpha \in A \}$ nyílt lefedése. Az M–en meg lehet adni az adott lefedésnek alárendelt, olyan $\{ f_i \in \mathcal{F}(M) \mid i \in I \}$ egységosztást, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*
(1) Az I indexhalmaz megszámlálható.
(2) A $supp\, f_i$ halmaz kompakt bármely $i \in I$ esetén.

Az egységosztás tételének van egy másik változata is, ahol a függvények tartóinak kompaktsága helyett azt a feltételt helyezzük előtérbe, hogy a nyílt lefedés indexhalmaza és a függvényrendszer indexhalmaza legyen azonos.

6.2. Tétel. *Legyen adott az M sokaságnak egy $\{ U_\alpha \mid \alpha \in A \}$ nyílt lefedése. Az M sokaságon megadható egy olyan $\{ f_\alpha \in \mathcal{F}(M) \mid \alpha \in A \}$ egységosztás, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*
(1) Az $\{ \alpha \in A \mid supp\, f_\alpha \neq \emptyset \}$ halmaz megszámlálható.
(2) Fennáll a $supp\, f_\alpha \subset U_\alpha$ összefüggés bármely $\alpha \in A$ esetén.

6.4) Az irányítható sokaságok

6.17. Definíció. Az m–dimenziós M sokaság m–edfokú differenciálformáit az M térfogati formáinak nevezzük.

6.18. Definíció. Az M sokaságot irányíthatónak mondjuk, ha megadható rajta egy olyan $\nu \in \Omega^m(M)$ térfogati forma, amely sehol sem tűnik el, azaz tetszőleges $p \in M$ pontra fennáll $\nu_p \neq 0$.

Megjegyzés. Ismeretes, hogy bármely $\omega \in \Omega^m(M)$ differenciálformának tetszőleges $p \in M$ pontban megfelel egy $\omega_p \in \mathcal{A}^m(T_pM)$ m–edfokú alternáló forma a T_pM érintőtér felett. Fontosnak tűnik még emlékeztetni arra, hogy a T_pM–en vett térfogati formák vektortere 1–dimenziós (vagyis $dim\,\mathcal{A}^m(T_pM) = 1$).

Vegyük az M sokaságnak egy (U, ξ) térképét. Evidens, hogy az $x^i : U \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ koordináta–függvények differenciáljainak külső szorzataként nyert $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^m$ m–edfokú differenciálforma az U nyílt tartományon sehol sem tűnik el.

Tekintsük az M–nek egy másik (V, η) térképét és a térképezéshez rendelt $dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m \in \Omega^m(V)$ térfogati formát. Tegyük fel, hogy fennáll $U \cap V \neq \emptyset$, és vegyünk egy $p \in U \cap V$ pontot. Ismeretes, hogy a térképezések T_pM–beli alapvektorainak kapcsolatát a

$$\frac{\partial}{\partial y^i}(p) = \sum_{r=1}^{m} D_i\big(x^r \circ y^{-1}\big)(y(p)) \cdot \frac{\partial}{\partial x^r}(p)$$

összefüggés írja le.

Az $\xi \circ \eta^{-1} : y(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ leképezés Jacobi–mátrixát az $a \in y(U \cap V)$ pontban jelölje $\mathbf{J}(\xi \circ \eta^{-1})(a)$ és ennek determinánsát jelölje $J(\xi \circ \eta^{-1})(a)$. Ily módon az $\eta(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m$ nyílt tartományon a $J(\xi \circ \eta^{-1}) : y(U \cap V) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényhez jutunk. A (6.1) egyenlet alapján a

$$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m(p) = J(\xi \circ \eta^{-1})(y(p)) \cdot dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m(p)$$

összefüggést nyerjük. Ezzel kapcsolatban könnyen belátható, hogy amennyiben az U, V tartományok összefüggőek és az M irányítható, akkor a $J(\xi \circ \eta^{-1})$ függvény vagy mindenütt pozitív, vagy pedig mindenütt negatív.

A fenti összefüggéseket és az egységfüggvény felosztásának módszerét felhasználva bizonyítani lehet az alábbi tételt.

6.3. Tétel. *Az M sokaság irányítható akkor és csak akkor, ha az M differenciálható struktúrájához tartozó térképekből megadható egy olyan $\mathcal{B}$ atlasz, amelyre teljesül a következő feltétel:*
Amennyiben $(U, \varphi) \in \mathcal{B}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ és fennáll $U \cap V \neq \emptyset$, akkor a $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ C^∞–osztályú leképezés Jacobi–determinánsa mindenütt pozitív.

6.19. Definíció. Az M irányítható sokaságot irányítottnak nevezzük, ha rögzítve van egy sehol el nem tűnő $\nu \in \Omega^m(M)$ differenciálforma. Ez esetben azt mondjuk, hogy az M irányítását a ν térfogati forma reprezentálja.

Legyen az $\omega \in \Omega^m(M)$ egy másik sehol el nem tűnő differenciálforma. Akkor mondjuk, hogy a ν és az ω térfogati formák az M egyazon irányítását reprezentálják, ha a $\nu = f \cdot \omega$ egyenlettel egyértelműen meghatározott $f \in \mathcal{F}(M)$ függvény az M összes pontjában pozitív.

A következő állítás igazolása kézenfekvő.

6.12. Állítás. *Legyen az M irányítható sokaság összefüggő. Ez esetben az M sokaságon pontosan két különböző irányítást lehet megadni.*

Megjegyzés. Mint ismeretes, az $\mathbb{R}^m$ téren az $(\mathbb{R}^m, id)$ globális térkép határozza meg az úgynevezett természetes differenciálható struktúrát. Ezen térkép koordináta–függvényei az $u^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$ projekciók.

A továbbiakban az $\mathbb{R}^m$ térnek mindig azt az irányítását vesszük, amelyet a $du^1 \wedge \cdots \wedge du^m \in \Omega^m(\mathbb{R}^m)$ térfogati forma határoz meg.

Vegyünk egy M irányított sokaságot, amelynek irányítását a $\nu \in \Omega^m(M)$ differenciálforma reprezentálja. Tekintsük az M–nek egy (U, ξ) térképét. Ez esetben egyértelműen létezik egy olyan $h \in \mathcal{F}(U)$ függvény, amellyel az U tartományon fennáll $\nu|U = h \cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$.

6.20. Definíció. Az (U, x) térképről azt mondjuk, hogy az kompatibilis az M sokaság irányításával, ha a h függvény az U térképtartomány összes pontjában pozitív.

A későbbiek során szükségünk lesz az irányítástartó diffeomorfizmus fogalmára is.

6.21. Definíció. Legyenek adva az egymással diffeomorf M és N irányított sokaságok, amelyek irányítását a ν_M és ν_N térfogati formák reprezentálják. A $\mu : M \to N$ diffeomorfizmust irányítástartónak nevezzük, ha ν_M és $\mu^*\nu_N$ az M–nek egyazon irányítását képviselik.