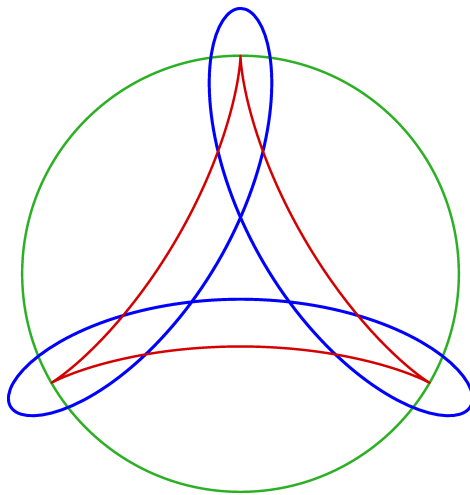


Klasszikus differenciálgeometria



Verhóczy László

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

2013

Tartalomjegyzék

Bevezető	3
1. Alapfogalmak és tételek a geometriából és az analízisből	5
1.1. Az euklideszi tér és az \mathbb{R}^3 tér azonosítása	5
1.2. Műveletek és izometriák az \mathbb{R}^n térben	8
1.3. Vektorértékű differenciálható leképezések	13
2. Reguláris sima görbék a 3-dimenziós euklideszi térben	19
2.1. A görbedarab ívhossza	19
2.2. A reguláris sima görbe görbülete	26
2.3. Valódi sima görbék	36
2.4. Példák, feladatok	45
2.4.1. Hipocikloisok és epicikloisok	45
2.4.2. Gyakorló feladatok	48
3. A síkbeli görbék differenciálgeometriája	52
3.1. A síkgörbe előjeles görbülete	52
3.2. A síkgörbe evolútája és evolvenszei	55
3.3. Zárt síkgörbék jellemzése	58
3.4. Az implicit egyenlettel leírt síkgörbe	67
3.5. Síkgörbékre vonatkozó feladatok	68
4. Általános típusú görbék az \mathbb{R}^n térben	72
4.1. Az általános görbe kísérő Frenet-bázisa	73
4.2. A görbületi függvények geometriai tartalma	77
5. Az \mathbb{R}^3-beli sima elemi felületek metrikus tulajdonságai	82
5.1. A sima elemi felület paraméterezései	82
5.2. Sima felületek az \mathbb{R}^3 térben	91
5.3. Az első főmennyiségek	94
5.4. A kompakt felületdarab felszíne	96

5.5. Sima leképezések felületek között	100
5.6. Feladatok	104
6. Az elemi felületek görbületi jellemzése	107
6.1. A felületi görbék görbülete	107
6.2. Az érintótéren vett Weingarten-leképezés	112
6.3. Speciális felületek és felületi görbék	122
6.4. A Gauss-görbület felszín szerinti integrálja	130
6.5. Az egyszerű zárt görbe tubusfelülete	131
6.6. Lefejthető vonalfelületek	138
6.7. Feladatok	146
7. Az elemi felületre vonatkozó derivációs egyenletek	149
7.1. A Christoffel-féle szimbólumok	149
7.2. A Gauss-egyenletek és a Mainardi-Codazzi-egyenletek	152
7.3. Theorema egregium	153
8. A sima felületek geodetikus görbéi	156
8.1. Az ívhossz szerinti stacionárius görbék	156
8.2. Párhuzamos vektormezők egy felületi görbe mentén	160
8.3. A geodetikus görbék jellemzése	162
8.4. Feladatok	166
9. Hiperfelületek az n-dimenziós térben	169
Tárgymutató	177
Irodalomjegyzék	179

Bevezető

A szintetikus geometria és az analitikus geometria eszközeivel csak az euklideszi tér speciális alakzatainak vizsgálatára nyílik lehetőség. Az analitikus geometriában sor kerül a koordináta-rendszer alkalmazására, ami módot ad az algebrai egyenletekkel leírható alakzatok, mint például a másodrendű görbék és felületek, tárgyalására. Az alakzatok geometriai tulajdonságaira a leíró egyenletek alapján vonhatunk le következtetéseket. Azonban az algebrai egyenletekkel leírható görbék és felületek köre igencsak korlátozott. Ha például egy a térben mozgó tömegpont pályáját vesszük, az a legtöbb esetben nem írható le egyenletek formájában. További gondot jelent, hogy csupán az analitikus geometria eszközeit használva már nehézséget okoz az alakzatok metrikus jellemzőinek (ívhossz, felszín, térfogat) a meghatározása is.

A differenciálgeometria tárgya a tér sima görbéinek és felületeinek vizsgálata a differenciál- és integrálszámítás eszközeinek az alkalmazásával. Ily módon az alakzatok jóval tágabb körénél lehet alkalmazni a differenciálgeometria módszereit. Ennél is fontosabb, hogy mód nyílik magasabb szintű vizsgálatok elvégzésére, többek között lehetővé válik a görbék és a felületek görbületi jellemzése.

A jegyzet első fejezetében áttekintjük azokat a matematikai ismereteket, amelyeket alkalmazni fogunk tárgyalásunk során. Az itt felsorolt fogalmakkal és tételekkel az olvasó már bizonyára találkozott korábbi tanulmányaiban.

Ezt követően az \mathbb{R}^3 -beli sima görbék, majd pedig a síkgörbék tárgyalására kerül sor. Sima görbén egy olyan C^∞ -osztályú vektorértékű leképezést értünk, amely egy valós intervallumon van értelmezve. A leképezés értékkészletét mondjuk a görbe pályájának. A görbe geometriai jellemzőin a leképezésből származtatott azon adatokat értjük, amelyek csak a pálya alakjától függenek, invariánsak a görbe átparaméterezésével szemben, továbbá nem változnak meg akkor sem, ha a görbének egy térbeli izometriával nyert képét vesszük. A differenciálgeometriában alapvető szerepet játszik a görbület fogalma. Pongyolán fogalmazva azt mondhatjuk, hogy a görbület az érintőirány ívhossz szerinti irányváltozási sebessége a görbe egy adott pontjában. Jegyzetünkben egy görbét valódinak nevezünk, ha a görbülete sehol sem tűnik el. Ekkor definiálni lehet a görbe torzióját, vagy más szóval a csavarodását. Tárgyalásunk során kiderül, hogy az ívhossz szerint paraméterezett görbét a görbületi függvénye és a torzió-függvénye izometria erejéig már egyértelműen meghatározzák.

A negyedik fejezetben az \mathbb{R}^n tér általános típusú görbéit vizsgáljuk. Egy ilyen görbéhez $n - 1$ számú görbületi függvény rendelhető, és ezek izometriától eltekintve ugyancsak meghatározzák a görbét.

A jegyzet második felében tanulmányozzuk az \mathbb{R}^3 tér sima elemi felületeit. Az elemi felület egy olyan speciális alakzat, amely előáll egy \mathbb{R}^2 -beli tartományt az \mathbb{R}^3 -ba képező olyan C^∞ -osztályú vektorfüggvény képeként, amely reguláris, injektív, továbbá mindkét irányban folytonos bijekciót ad a paramétertartomány és az alakzat között. A speciális vektorfüggvényt az elemi felület egyik paraméterezésének mondjuk. A sima felület geometriai jellemzőit a leíró vektorfüggvény, azaz a paraméterezés alkalmazásával határozhatjuk meg. Ily módon az elemi felület összes pontjában értelmezni lehet a lineáris érintőteret és az érintősíkot. Látni fogjuk, hogy a metrikus jellemzőket, a felületi görbék ívhosszát és a felületdarabok felszínét a paraméterezés első parciális deriváltjaiból nyert első főmennyiségek alkalmazásával lehet meghatározni.

A jegyzet hatodik fejezetében térünk rá a sima felületek görbületi jellemzésére, amelyhez már a leíró vektorfüggvények másodrendű parciális deriváltjaira is szükség van. A görbületi jellemzést a felület normálmetszet görbéinek alkalmazásával végezzük. Többek között bevezetésre kerül az érintőtéren értelmezett Weingarten-leképezés fogalma. Ez alapján lehet definiálni egy felületi pontban a szorzatgörbületet, amely egy alapvető fogalom a felületelméletben.

A következő fejezetben többek között igazoljuk a Gauss által Theorema egregiumnak mondott azon tételt, amely szerint a szorzatgörbületet már meghatározzák a felület paraméterezésének első főmennyiségei. A nyolcadik fejezetben pedig azt a problémát tárgyaljuk, hogy a felület két adott pontját összekötő felületi görbék közül miként lehet kiválasztani a legrövidebbet.

A jegyzet utolsó fejezetében egy rövid kitekintést adunk a magasabb dimenziós euklideszi terekben vett sima felületekre.

A jegyzet alapjául az ELTE Természettudományi Karán a matematika tanári szakos, az alkalmazott matematikus és a matematikus hallgatók számára tartott Differenciálgeometria előadásaim szolgáltak. A matematika BSc képzést véve alapul jegyzetemet elsődlegesen a harmadéves hallgatóknak ajánlom. A megírás során az a szempont is vezérelt, hogy a jegyzet anyagát a BME mérnökhallgatói is el tudják majd sajátítani a BSc képzés első két évének matematikai tanulmányait követően.

A jegyzetben fellelhető szemléltető ábrák a GeoGebra és az Inkscape programok alkalmazásával készültek.

Köszönettel tartozom a jegyzet lektorának, Nagy Péter Tibor egyetemi tanárnak, aki hasznos tanácsokat adott a végleges szövegezés kialakításához.

1. fejezet

Alapfogalmak és tételek a geometriából és az analízisből

A differenciálgeometria a görbék és a felületek tanulmányozásához főként az analitikus geometria és az analízis módszereit alkalmazza. Az alábbiak során áttekintjük azokat a legfontosabb matematikai ismereteket, melyeket majd felhasználunk vizsgálatainkhoz. Bár az itt felsorolt fogalmakkal és tételekkel az olvasó már bizonyára találkozott korábbi tanulmányai során, az ismeretek felidézése mellett azért is célszerű átolvasni ezt a fejezetet, mert ebben kerül bevezetésre a jegyzetünkben használt jelölések nagy része.

1.1. Az euklideszi tér és az \mathbb{R}^3 tér azonosítása

Az euklideszi geometria részletes szintetikus tárgyalása fellelhető a közismert, Hajós György által írt [Haj] tankönyvben. Ebben az alfejezetben euklideszi téren olyan teret értünk, amelyben teljesülnek az euklideszi geometria axiómái.

Jelölje X az euklideszi tér pontjainak halmazát. Az X részhalmazait mondjuk a tér alakzatainak. Az egyeneseket és a síkokat kitüntetett alakzatoknak tekintjük.

Amennyiben A és B két tetszőleges pont, azok távolságát jelölje $d(A, B)$. Az A kezdőpontú és B végpontú irányított szakaszt, illetve az általa reprezentált szabad vektort jelölje \overrightarrow{AB} . A térbeli szabad vektorok tere legyen V . Jelölje \mathbb{R} a valós számok halmazát. Mint ismeretes, V egy 3-dimenziós vektortér az \mathbb{R} valós számtest felett.

A továbbiakban azt tárgyaljuk, hogy miként lehet az euklideszi teret irányítani. Legyenek az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ és $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ vektorhármások a V vektortér bázisai. A második bázis vektorait fejezzük ki az első bázis vektorainak lineáris kombinációjaként a $\mathbf{b}_r = \sum_{s=1}^3 m_{sr} \mathbf{a}_s$ ($r = 1, 2, 3$) alakban. A kifejezésekben szereplő m_{sr} együtthatók egy 3×3 -as \mathbf{M} mátrixot határoznak meg, ahol m_{sr} az s -edik sor r -edik eleme. Az \mathbf{M} mátrixot a bázistranszformáció mátrixának, illetve az áttérés mátrixának szokás nevezni. Világos, hogy az \mathbf{M} mátrix determinánsa, melyet $\det \mathbf{M}$ jelöl, nem lehet 0.

1.1. Definíció Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ és $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ bázisok a térnek ugyanazt az irányítását képviselik, ha fennáll $\det \mathbf{M} > 0$.

A fenti definíció egy ekvivalenciarelációt ad meg a V vektortér bázisainak halmazán. Soroljuk egyazon osztályba azokat a bázisokat, amelyek a térnek ugyanazt az irányítását reprezentálják. Ily módon két bázisosztályt nyerünk. Az euklideszi téren úgy adhatunk meg irányítást (más szóval orientációt), hogy kitüntetjük a két bázisosztály egyikét.

A továbbiakban feltesszük, hogy az X euklideszi tér irányított. Amennyiben vesszük az irányítást adó bázisosztály egy $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ bázisát, akkor a későbbiekben majd azt is mondjuk, hogy a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ vektorok ebben a sorrendben egy jobbrendszert alkotnak.

Egy vektor hosszát szokás a vektor normájának is hívni. Egy \mathbf{u} vektor hosszát jelölje $\|\mathbf{u}\|$. Idézzük most fel a skaláris szorzat és a vektoriális szorzat fogalmát.

1.2. Definíció Legyenek adva az \mathbf{u}, \mathbf{v} vektorok, melyek különböznek a $\mathbf{0}$ nullvektortól. A két vektor skaláris szorzatán az $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \alpha$ számot értjük, ahol α a két vektor hajlásszöge.

A $\mathbf{0}$ nullvektornak bármely vektorral vett skaláris szorzata 0.

1.3. Definíció Amennyiben az \mathbf{u}, \mathbf{v} vektorok lineárisan összefüggőek, akkor az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektoriális szorzatukon a $\mathbf{0}$ nullvektort értjük.

Ha \mathbf{u} és \mathbf{v} lineárisan függetlenek, akkor vektoriális szorzatukon azon $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektort értjük, melyet az alábbi három feltétel határoz meg:

A szorzat normájára teljesül $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$, ahol α a két vektor által bezárt szög. Az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ szorzat merőleges az \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorokra. Az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ bázis a tér irányítását reprezentálja.

A szabad vektorok V terében vegyünk egy $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázist, amely a tér irányítását képviseli és ortonormált. Mint ismeretes, ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ vektorok páronként merőlegesek egymásra és a hosszuk 1. Amennyiben az \mathbf{u}, \mathbf{v} vektorok ezen bázisra vonatkozó koordinátái (u_1, u_2, u_3) és (v_1, v_2, v_3) , akkor a skaláris szorzatukra fennáll $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$. A két vektor vektoriális szorzatára pedig teljesül az

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix}$$

összefüggés. A vektoriális szorzat értéke tehát úgy is megkapható, hogy vesszük egy olyan 3×3 -as mátrix determinánsát, amelynek egyik sorában a bázisvektorok szerepelnek.

Megjegyzés Tekintsünk három vektort, ezek legyenek \mathbf{u}, \mathbf{v} és \mathbf{w} . Emlékezzünk rá, hogy az $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ számot a három vektor vegyes szorzatának nevezzük. A vegyes szorzat kifejezhető a vektorok koordinátáiból az

$$\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \text{ alakban. Amennyiben az } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ vektorok lineárisan}$$

függetlenek, akkor az előbbi kifejezés szerint az \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} bázis a tér irányítását képviseli (azaz egy jobbrendszer képez) pontosan akkor, ha a három vektor vegyes szorzatára fennáll $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle > 0$.

Az euklideszi tér koordinátázása, az egybevágóságok analitikus leírása

Rögzítsünk egy O pontot és egy olyan \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} ortonormált bázist V -ben, amely a tér irányítását reprezentálja. Ha vesszük a tér egy P pontját, akkor az \overrightarrow{OP} vektort mondjuk a P helyvektorának az O kezdőpontra vonatkozóan. Ezt egyértelműen lehet kifejezni az $\overrightarrow{OP} = x_P \mathbf{i} + y_P \mathbf{j} + z_P \mathbf{k}$ alakban. A lineáris kombinációban szereplő x_P , y_P , z_P együtthatókat nevezzük a P pont koordinátáinak az $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ koordináta-rendszerben. Az együtthatókból képzett (x_P, y_P, z_P) számhármast mondjuk a P ponthoz tartozó koordináta-hármasnak.

1.4. Definíció A $\xi : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ bijektív leképezést, ahol tetszőleges P pont esetén fennáll a $\xi(P) = (x_P, y_P, z_P)$ egyenlőség, az euklideszi tér egy koordinátázásának mondjuk.

A ξ koordinátázás alkalmazásával az euklideszi teret azonosítani lehet a valós számhármások \mathbb{R}^3 terével. Ily módon az X euklideszi tér alakzatainak vizsgálatát vissza lehet vezetni az \mathbb{R}^3 -beli ponthalmazok tanulmányozására. Ez az azonosítás lehetőséget ad arra, hogy az alakzatok tanulmányozása során alkalmazzuk az algebra és az analízis eszközeit is.

Az alábbi fogalom szintén jól ismert már geometriai tanulmányainkból.

1.5. Definíció Az euklideszi tér egybevágósági transzformációján olyan $\psi : X \rightarrow X$ bijektív leképezést értünk, amelyre tetszőleges $A, B \in X$ pontok esetén teljesül $d(\psi(A), \psi(B)) = d(A, B)$.

Igen könnyű azt belátni, hogy az egybevágóság párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe, továbbá megegyező irányú félegyeneseket azonos irányú félegyenesekbe képez. Ebből következik, hogy ha a tér valamely A, B, C, D pontjaira fennáll $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, akkor az $A' = \psi(A)$, $B' = \psi(B)$, $C' = \psi(C)$, $D' = \psi(D)$ képpontok által meghatározott irányított szakaszokra igaz $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$. Ennek alapján értelmezni lehet az alábbi fogalmat.

1.6. Definíció Legyen adott egy $\psi : X \rightarrow X$ egybevágóság. Tekintsük azt a $\varphi : V \rightarrow V$ leképezést a szabad vektorok terén, amelyre tetszőleges A, B pontok esetén teljesül $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\psi(A)\psi(B)}$. Ezt mondjuk a ψ egybevágósági transzformáció által a V vektortérben indukált leképezésnek.

A továbbiakban egy ψ egybevágóság és az általa indukált φ leképezés analitikus leírásával foglalkozunk. Könnyen be lehet látni, hogy φ egy lineáris leképezés. Vegyük

az euklideszi tér egy $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ koordináta-rendszerét. Az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisvektorok φ szerinti képeit fejezzük ki a

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{i}) &= a_{11}\mathbf{i} + a_{21}\mathbf{j} + a_{31}\mathbf{k}, \\ \varphi(\mathbf{j}) &= a_{12}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{32}\mathbf{k}, \\ \varphi(\mathbf{k}) &= a_{13}\mathbf{i} + a_{23}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}\end{aligned}$$

egyenletekkel. Azt szokás mondani, hogy az a_{sr} ($s, r = 1, 2, 3$) számokból képzett \mathbf{A} mátrix írja le a φ lineáris leképezést az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisra nézve.

Világos, hogy a φ indukált lineáris leképezés megőrzi a vektorok skaláris szorzatát. Ebből következik, hogy a φ egy V -beli ortonormált bázist ortonormált bázisba képez. Ez pedig azt eredményezi, hogy az \mathbf{A} mátrix ortogonális, vagyis az \mathbf{A}^T transzponált mátrixszal fennáll $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$, ahol most \mathbf{I} a 3×3 -as egységmátrixot jelöli.

Az O kezdőpont $O' = \psi(O)$ képének koordinátái legyenek (b_1, b_2, b_3) . Eszerint teljesül $\overrightarrow{OO'} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Az alábbi kijelentés egyszerű számolással igazolható.

1.7. Állítás *Tekintsük a tér egy P pontját, melynek koordináta-hármasa legyen (x, y, z) . Ekkor a $P' = \psi(P)$ képpont (x', y', z') koordinátáira fennáll az alábbi mátrixegyenlet*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

1.8. Definíció *Egy $\psi : X \rightarrow X$ egybevágóságot irányítástartónak mondunk, ha az általa indukált $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris izomorfizmus a megegyező orientációt képviselő bázisok két osztályát önmagába képezi. Amennyiben a φ leképezés a két bázisosztályt felcseréli, akkor a ψ -t irányításváltónak nevezzük.*

Megjegyzés Mint ismeretes, egy ortogonális mátrix determinánsa csakis 1 vagy -1 lehet. A $\varphi : V \rightarrow V$ indukált leképezést leíró \mathbf{A} mátrix nem más, mint az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisról a $\varphi(\mathbf{i}), \varphi(\mathbf{j}), \varphi(\mathbf{k})$ bázisra való áttérés mátrixa. Ily módon azt nyerjük, hogy a $\psi : X \rightarrow X$ egybevágóság irányítástartó pontosan akkor, ha fennáll $\det \mathbf{A} = 1$. A $\det \mathbf{A} = -1$ egyenlőség pedig abban az esetben teljesül, ha ψ irányításváltó.

1.2. Műveletek és izometriák az \mathbb{R}^n térben

A szokásoknak megfelelően jelölje \mathbb{R}^n a valós szám- n -esek halmazát ($n \geq 2$). Ezen természetes módon értelmezhető az összeadás és a skalárral való szorzás művelete. Valamely $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ elemek összegét az $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$ kifejezés írja le. Az \mathbf{u} -nak egy $\lambda \in \mathbb{R}$ számmal vett szorzatát pedig a $\lambda\mathbf{u} = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)$

összefüggés adja meg. Ezen műveletekre nézve az \mathbb{R}^n egy vektorteret (más szóval egy lineáris teret) képez az \mathbb{R} valós számtest felett.

Az \mathbb{R}^n vektortér $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ vektorai által alkotott bázist mondjuk a tér természetes bázisának. Ezt alkalmazva tetszőleges \mathbb{R}^n -beli $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ vektorra fennáll a $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i$ egyenlőség.

A továbbiakban feltesszük, hogy az \mathbb{R}^n lineáris téren be van vezetve a természetes skaláris szorzat. Ez azt jelenti, hogy valamely $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ vektorok skaláris szorzatát az $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ összefüggés adja meg. A fenti skaláris szorzattal ellátott \mathbb{R}^n tér egy euklideszi vektorteret képez. Nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ természetes bázis a tér ortonormált bázisa.

Mint ismeretes, egy \mathbf{u} vektor hosszán (más szóval normáján) az $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ számot értjük.

Az \mathbb{R}^n és lineáris altereinek irányítása

Legyen \mathcal{L} az \mathbb{R}^n vektortér m -dimenziós lineáris altere ($1 \leq m \leq n$). Amennyiben $m = n$, akkor nyilván fennáll $\mathcal{L} = \mathbb{R}^n$. Az \mathcal{L} irányítását az előző alfejezetben leírtaknak megfelelően adhatjuk meg.

Tekintsük az \mathcal{L} altér $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ és $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ bázisait. Fejezzük ki a második bázis vektorait az első bázis vektorainak lineáris kombinációjaként: $\mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^m c_{ij} \mathbf{a}_i$ ($j = 1, \dots, m$). Jelölje \mathbf{C} a c_{ij} ($i, j = 1, \dots, m$) együtthatókból képzett $m \times m$ -es mátrixot, melyet a két bázis közötti áttérés mátrixának nevezünk.

Az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ és $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ bázisokról azt mondjuk, hogy az \mathcal{L} altérnek egyazon irányítását képviselik, ha fennáll $\det \mathbf{C} > 0$.

Ily módon egy olyan relációt lehet értelmezni az altér bázisai között, amely reflexív, szimmetrikus és tranzitív. Ha ezen ekvivalenciareláció alapján az \mathcal{L} altér bázisait osztályokba soroljuk, akkor két bázisosztályt nyerünk. *Az \mathcal{L} lineáris altér irányításán azt értjük, hogy kitüntetjük az azonos irányítást képviselő \mathcal{L} -beli bázisok egyik osztályát.*

Az \mathbb{R}^n vektortérnek az $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ természetes bázis által reprezentált irányítását mondjuk az \mathbb{R}^n természetes irányításának (más szóval természetes orientációjának). A továbbiakban feltesszük, hogy az \mathbb{R}^n téren a természetes irányítás van kitüntetve.

Affin alterek az \mathbb{R}^n térben

Ismeretes, hogy a valós szám- n -esek \mathbb{R}^n terét tekinthetjük úgy is, mint egy affin teret a természetes skaláris szorzattal ellátott \mathbb{R}^n vektortér felett. Ez esetben az \mathbb{R}^n elemeit nem vektoroknak, hanem pontoknak nevezzük. Fontos itt megemlíteni, hogy ekkor a $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ nullelem kitüntetett szerepe megszűnik. A továbbiakban ezt az \mathbb{R}^n affin teret az n -dimenziós euklideszi térnek nevezzük.

A természetes skaláris szorzat meghatároz egy $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ távolságfüggvényt (vagy más szóval metrikát) az \mathbb{R}^n téren. Ennek megfelelően a tér valamely $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ pontjainak távolságát a $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = \sqrt{\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{p} - \mathbf{q} \rangle}$ kifejezés adja meg.

1.9. Definíció Vegyük azt az $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt ($i = 1, \dots, n$), amelynél tetszőleges $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ pontra fennáll $x_i(\mathbf{p}) = p_i$. Ezt az x_i leképezést az \mathbb{R}^n euklideszi tér i -edik koordináta-függvényének nevezzük.

Megjegyzés Az \mathbb{R}^3 tér koordináta-függvényeire a szokásos $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ jelölést is alkalmazni fogjuk.

A lineáris altér alapján lehet értelmezni az alábbi fogalmat.

1.10. Definíció Tekintsünk az \mathbb{R}^n vektortérben egy m -dimenziós \mathcal{L} lineáris alteret, továbbá egy \mathbf{p} pontot. Az $\mathcal{A} = \mathbf{p} + \mathcal{L} = \{ \mathbf{p} + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathcal{L} \}$ alakzatot az \mathbb{R}^n euklideszi tér egy m -dimenziós affin alterének mondjuk.

Az \mathcal{A} affin alteret úgy irányítjuk, hogy megadunk egy irányítást az \mathcal{L} lineáris altéren.

Az 1-dimenziós affin altereket egyeneseknek, a 2-dimenziós altereket síkoknak mondjuk. Az $(n - 1)$ -dimenziós affin altereket hipersíkoknak nevezzük.

Izometriák az \mathbb{R}^n térben

1.11. Definíció Az \mathbb{R}^n tér izometriáján egy olyan $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bijektív leképezést értünk, amelyre tetszőleges \mathbf{p} , \mathbf{q} pontok esetén fennáll $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = \|\Psi(\mathbf{p}) - \Psi(\mathbf{q})\|$.

Könnyű belátni, hogy a Ψ izometria egyenest egyenesbe képez és megőrzi az egyenesek párhuzamosságát. Ebből már következik, hogy a Ψ affin alteret affin altérbe képez. Definiálni tudunk egy további fogalmat is.

1.12. Definíció Legyen adva egy $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ izometria. A Ψ által az \mathbb{R}^n vektortéren indukált leképezésen azt a $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényt értjük, amelyre tetszőleges \mathbf{v} vektor esetén igaz $\Phi(\mathbf{v}) = \Psi(\mathbf{v}) - \Psi(\mathbf{0})$.

Az alábbi tételt többször is alkalmazni fogjuk a görbék és a felületek tárgyalásánál.

1.13. Tétel Legyen adott egy $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ izometria. Ekkor igazak az alábbi kijelentések.

(1) Az indukált Φ leképezés egy olyan lineáris izomorfizmus, amelynél tetszőleges \mathbb{R}^n -beli \mathbf{u} , \mathbf{v} vektorokra teljesül

$$\langle \Phi(\mathbf{u}), \Phi(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle. \quad (1.1)$$

(2) Tekintsük a $\mathbf{0}$ pont $\mathbf{q} = \Psi(\mathbf{0})$ képét. Bármely $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ pontra fennáll a

$$\Psi(\mathbf{p}) = \Phi(\mathbf{p}) + \mathbf{q} \quad (1.2)$$

összefüggés.

Az (1.1) összefüggés szerint az izometria által indukált Φ lineáris leképezés megtartja a vektorok skaláris szorzatát, vagyis Φ egy ortogonális lineáris leképezés az \mathbb{R}^n vektortéren. Igaz a következő kijelentés is, amely a fenti tétel megfordítása.

1.14. Állítás Legyen adott egy olyan $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris izomorfizmus az \mathbb{R}^n vektortéren, amely megőrzi a skaláris szorzatot, továbbá egy \mathbf{q} pont. Tekintsük azt a $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezést, ahol tetszőleges \mathbf{p} pontra fennáll $\Psi(\mathbf{p}) = \Phi(\mathbf{p}) + \mathbf{q}$. Ekkor a Ψ leképezés izometria.

Természetesen az \mathbb{R}^n tér esetében is beszélhetünk irányítástartó és irányításváltó izometriákról.

1.15. Definíció Egy $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ izometriát irányítástartónak mondunk, ha a $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris izomorfizmus az egyazon orientációt képviselő \mathbb{R}^n -beli bázisok két osztályát nem cseréli fel. Amennyiben a Φ leképezés a két bázisosztályt felcseréli, akkor a Ψ -t irányításváltónak mondjuk.

A Ψ izometria által indukált Φ lineáris leképezést az \mathbb{R}^n vektortér egyik $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ bázisára nézve egy \mathbf{A} kvadratikus mátrix írja le. Mint ismeretes, a $\det \mathbf{A}$ determináns értéke nem függ az \mathbb{R}^n -beli bázis megválasztásától, továbbá $\det \mathbf{A} = 1$ vagy $\det \mathbf{A} = -1$ teljesül. A továbbiakban $\det \Phi$ -vel is jelöljük majd ezt a bázisválasztástól független $\det \mathbf{A}$ értéket.

Világos, hogy a Ψ izometria pontosan akkor irányítástartó (illetve irányításváltó) ha fennáll $\det \Phi = 1$ (illetve $\det \Phi = -1$).

A Gram-mátrix determinánsának geometriai jelentése

Az \mathbb{R}^n -ben legyenek adva a lineárisan független $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ ($1 \leq m \leq n$) vektorok. Az általuk generált lineáris alteret jelölje $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$.

A $\mathcal{P} = \{ \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \ (i = 1, \dots, m) \}$ pontthalmazt a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ vektorok által kifeszített m -dimenziós paralelepipedonnak nevezzük.

Az $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ lineáris altérben vegyünk egy $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ ortonormált bázist. Fejezzük ki a \mathbf{v}_j ($j = 1, \dots, m$) vektorokat ezen bázisvektorokból: $\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^m A_{ij} \mathbf{b}_i$. A lineáris kombinációk együtthatók meghatároznak egy m -edrendű kvadratikus \mathbf{A} mátrixot. Könnyen igazolható, hogy a $|\det \mathbf{A}|$ érték nem függ a $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ ortonormált bázis megválasztásától.

Az $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ teret úgy is tekinthetjük, mint egy m -dimenziós euklideszi teret. Ez esetben értelmezni lehet a térbeli politópok térfogatát. Mint ismeretes, ekkor a fenti m -dimenziós \mathcal{P} paralelepipedon térfogata éppen $|\det \mathbf{A}|$.

1.16. Definíció Tekintsük azt az m -edrendű kvadratikus \mathbf{G} mátrixot, melynek elemei $g_{ij} = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle$ ($i, j = 1, \dots, m$). A \mathbf{G} -t a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ vektorrendszer Gram-mátrixának nevezzük.

Világos, hogy fennáll a $\mathbf{G} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ összefüggés, ahol az \mathbf{A}^T az \mathbf{A} mátrix transzponáltját jelöli. Ennek következtében teljesül $\det \mathbf{G} = (\det \mathbf{A})^2 > 0$, és a $\sqrt{\det \mathbf{G}}$ szám megegyezik a \mathcal{P} paralelepipedon térfogatával.

Vektoriális szorzás az \mathbb{R}^n vektortérben

Az \mathbb{R}^n lineáris téren a vektoriális szorzást egy $(n-1)$ -változós műveletként lehet definiálni.

1.17. Definíció Legyenek $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ lineárisan független vektorok \mathbb{R}^n -ben. Ezek vektoriális szorzatán azt a $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}]$ vektort értjük, amelyre teljesül az alábbi három feltétel:

- (1) A $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}]$ vektor hossza megegyezik a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ vektorok által kifeszített $(n-1)$ -dimenziós paralelepipedon térfogatával.
- (2) A $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}]$ vektor merőleges az $\mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ lineáris altérre.
- (3) A $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}]$ bázis a természetes irányítást reprezentálja.

Ha a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ vektorok lineárisan összefüggőek, akkor a $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}]$ vektoriális szorzatuk a $\mathbf{0}$ nullvektor.

Fejezzük ki a \mathbf{v}_i ($i = 1, \dots, n-1$) vektorokat az \mathbb{R}^n természetes bázisának vektoraival a $\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^n v_i^j \cdot \mathbf{e}_j$ formában. Könnyen ellenőrizhető, hogy a v_i^j lineáris kombinációs együtthatókkal fennáll a

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}] = \begin{vmatrix} v_1^1 & v_1^2 & \dots & v_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1}^1 & v_{n-1}^2 & \dots & v_{n-1}^n \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

egyenlőség, melynek jobb oldalán egy $n \times n$ -es mátrix determinánsa szerepel.

Az altérsorozat konvergenciájának értelmezése

Vegyünk egy korlátos és nem üres \mathcal{H} valós számhalmazt \mathbb{R} -ben. A szokásoknak megfelelően inf \mathcal{H} fogja jelölni a \mathcal{H} alsó határát, illetve sup \mathcal{H} a felső határt.

Mint ismeretes, a $B_\varepsilon(\mathbf{p}) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < \varepsilon\}$ ponthalmazt a $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ pont ε ($\varepsilon > 0$) sugarú gömbkörnyezetének szokás mondani.

Legyen adva egy \mathbb{R}^n -beli F alakzat és egy ε pozitív valós szám. Az $N_\varepsilon(F) = \cup_{\mathbf{p} \in F} B_\varepsilon(\mathbf{p})$ nyílt halmazt az F ponthalmaz ε sugarú gömbkörnyezetének nevezzük.

Emlékezzünk rá, hogy valamely F, H ($F \neq \emptyset, H \neq \emptyset$) ponthalmazok távolságát a $d(F, H) = \inf \{d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mid \mathbf{p} \in F, \mathbf{q} \in H\}$ összefüggés adja meg. Szükség van azonban egy másik távolság értelmezésére is.

1.18. Definíció Legyenek adva az F, H ($F \neq \emptyset, H \neq \emptyset$) korlátos és zárt alakzatok \mathbb{R}^n -ben. Ezek Hausdorff-féle távolságán a $\hat{d}(F, H) = \inf \{\varepsilon \mid F \subset N_\varepsilon(H), H \subset N_\varepsilon(F)\}$ nemnegatív számot értjük.

Világos, hogy $\hat{d}(F, H) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha fennáll $F = H$. Igazolható, hogy az \mathbb{R}^n -beli kompakt (és nem üres) alakzatok \mathcal{H} halmazán a $\hat{d} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény egy metrikát ad.

A Hausdorff-féle távolság felhasználásával értelmezni lehet egy olyan sorozat konvergenciáját is, amelynek az elemei nem üres kompakt ponthalmazok. Jegyzetünkben \mathbb{N} jelöli majd a pozitív egészek halmazát.

1.19. Definíció Legyen adott az \mathbb{R}^n -beli korlátos és zárt alakzatokból álló F_m ($m \in \mathbb{N}$) sorozat. Azt mondjuk, hogy az F_m sorozat konvergál a H korlátos és zárt alakzathoz, ha a $\hat{d}(F_m, H)$ számsorozatra fennáll $\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{d}(F_m, H) = 0$.

Legyen \mathcal{L}_m ($m \in \mathbb{N}$) az \mathbb{R}^n tér k -dimenziós ($k < n$) lineáris altereinek egy sorozata. Tekintsük az \mathbb{R}^n egységvektorai által alkotott $S^{n-1} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{v}\| = 1\}$ szférát, továbbá az altérsorozat elemei által az S^{n-1} gömbfelületből kimetszett $(k-1)$ -dimenziós $S_m^{k-1} = S^{n-1} \cap \mathcal{L}_m$ egységgömböket.

1.20. Definíció Az \mathcal{L}_m ($m \in \mathbb{N}$) lineáris altérsorozatról azt mondjuk, hogy konvergál a k -dimenziós $\hat{\mathcal{L}}$ lineáris altérhez, ha az általa meghatározott S_m^{k-1} ($m \in \mathbb{N}$) szférasorozat konvergál a $(k-1)$ -dimenziós $S^{n-1} \cap \hat{\mathcal{L}}$ szférához.

Az \mathbb{R}^n térben vegyünk egy k -dimenziós ($k < n$) affin alterekből álló \mathcal{A}_m ($m \in \mathbb{N}$) sorozatot. Az \mathcal{A}_m affin altérnek megfelelő lineáris alteret jelölje \mathcal{L}_m .

1.21. Definíció Az \mathcal{A}_m ($m \in \mathbb{N}$) altérsorozatról azt mondjuk, hogy az konvergál a k -dimenziós $\hat{\mathcal{A}}$ affin altérhez, ha teljesül az alábbi két feltétel:

- (1) Az \mathcal{L}_m ($m \in \mathbb{N}$) lineáris altérsorozat konvergál az $\hat{\mathcal{A}}$ -nak megfelelő $\hat{\mathcal{L}}$ lineáris altérhez.
- (2) Van olyan \mathbf{p}_m ($m \in \mathbb{N}$) pontsorozat, amelyre fennáll $\mathbf{p}_m \in \mathcal{A}_m$, és amely konvergál az $\hat{\mathcal{A}}$ altér egy $\hat{\mathbf{p}}$ pontjához.

1.3. Vektorértékű differenciálható leképezések

Ebben az alfejezetben áttekintjük a differenciálszámítás azon alapvető fogalmait és tételeit, amelyek nélkülözhetetlenek a differenciálgeometriai vizsgálatokhoz. A görbék és felületek tanulmányozásához majd vektorértékű függvényeket fogunk használni, emiatt főként vektorértékű leképezésekről lesz szó. Azonban a vektorértékű leképezések koordináta-függvényei (vagy más szóval komponensei) valós függvények, tehát azt itt leírtak megértéséhez elegendőek a valós függvénytanhoz tartozó ismeretek. Ezeket az olvasó elsajátíthatja a [Csa1], [Csa2] és [LaSo1], [LaSo2] tankönyvekből.

Az egyváltozós deriválható leképezések

A továbbiakban az I egy \mathbb{R} -beli (nyílt vagy zárt) intervallumot fog jelölni. Tekintsünk egy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvényt. Ha az f függvény differenciálható, akkor a szokásoknak megfelelően $f'(t)$ fogja jelölni az f függvény deriváltját a $t \in I$ helyen.

Vegyük az \mathbb{R}^n euklideszi vektorteret, amelynél $n \geq 2$. Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés. Ekkor az $x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) valós függvényeket, melyekre fennáll $x_i(t) = \langle \gamma(t), \mathbf{e}_i \rangle$ bármely $t \in I$ -re, a γ koordináta-függvényeinek nevezzük. Ezekkel nyilván teljesül a $\gamma(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \mathbf{e}_i$ összefüggés.

Mint ismeretes, a γ vektorértékű függvény akkor differenciálható a $t \in I$ helyen, ha létezik a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$ határérték. Ha a határérték létezik, akkor arra a $\gamma'(t)$ jelölést alkalmazzuk, és az \mathbb{R}^n -beli $\gamma'(t)$ vektort a γ függvény t helyen vett deriváltjának mondjuk.

Világos, hogy a γ leképezés pontosan akkor deriválható az I intervallumon, ha a koordináta-függvényei differenciálhatóak. Differenciálhatóság esetén a γ' derivált leképezésre fennáll a $\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n x'_i(t) \mathbf{e}_i$ összefüggés tetszőleges $t \in I$ pontban. Természetesen értelmezni lehet a vektorértékű γ függvény magasabb rendű deriváltjait is. Jegyzetünkben a γ leképezést akkor mondjuk simának, ha a koordináta-függvényei C^∞ -osztályúak.

Az alábbi két állítást gyakran fogjuk alkalmazni a sima görbék tárgyalása során. Ezek könnyen igazolhatóak, ha alkalmazzuk a koordináta-függvényeket és a szorzatfüggvény deriválására vonatkozó jól ismert összefüggést, az úgynevezett Leibniz-szabályt.

1.22. Állítás *Legyenek adva a $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ és $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható függvények. Tekintsük a $h\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorértékű leképezést, ahol $(h\gamma)(t) = h(t)\gamma(t)$. Ekkor a $h\gamma$ függvény is differenciálható és tetszőleges $t \in I$ esetén fennáll*

$$(h\gamma)'(t) = h'(t)\gamma(t) + h(t)\gamma'(t). \quad (1.4)$$

1.23. Állítás *Legyenek adva a $\gamma, \rho : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezések. Tekintsük az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyet az $f(t) = \langle \gamma(t), \rho(t) \rangle$ összefüggés ír le. Ekkor az f valós függvény is differenciálható és teljesül*

$$f'(t) = \langle \gamma'(t), \rho(t) \rangle + \langle \gamma(t), \rho'(t) \rangle. \quad (1.5)$$

A fenti állításból azonnal következik az alábbi kijelentés, ami azokra a vektorértékű leképezésekre vonatkozik, amelyek normája konstans.

1.24. Következmény *Legyen adott egy olyan $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés, amelyre valamely $c \geq 0$ számmal teljesül $\|\gamma(t)\| = c$ tetszőleges $t \in I$ -re. Ekkor fennáll $\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle = 0$.*

A későbbiek során majd alkalmazni fogjuk az alábbi állítást is, amely az összetett függvény deriválására vonatkozó láncszabálynak felel meg.

1.25. Állítás *Legyen adott a $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés és a $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ izometria. Tekintsük a Ψ által indukált Φ lineáris izomorfizmust. Ekkor a $\Psi \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény is differenciálható és teljesül*

$$(\Psi \circ \gamma)'(t) = \Phi(\gamma'(t)). \quad (1.6)$$

A többváltozós differenciálható leképezések

Az \mathbb{R}^m euklideszi tér egy nyílt és összefüggő részalmazát \mathbb{R}^m -beli tartománynak nevezzük. Amennyiben a tartományt kibővítjük határpontjainak a halmazával, akkor \mathbb{R}^m -beli zárt tartományt kapunk.

Tekintsük az \mathbb{R}^m -beli ($m \geq 2$) D nyílt tartományon értelmezett $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényt. Az f i -edik parciális derivált függvényére a $\partial_i f$ ($i = 1, \dots, m$) jelölést alkalmazzuk. Eszerint a $\partial_i f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre fennáll a

$$\partial_i f(u_1, \dots, u_m) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(u_1, \dots, u_i + h, \dots, u_m) - f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_m))$$

összefüggés tetszőleges $(u_1, \dots, u_m) \in D$ esetén.

Tegyük fel, hogy az f függvény parciális deriváltjai eltűnnek D -n. Vegyünk egy $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in D$ pontot és annak egy olyan B nyílt gömbkörnyezetét \mathbb{R}^m -ben, amelyre igaz $B \subset D$. Ekkor a Lagrange-tételből következik, hogy az f -nek a B -re történő leszűkítése egy konstans függvényt ad. Mivel D nyílt és összefüggő, bármely $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ pontok esetén van olyan töröttvonal, amelyet a D tartomány tartalmaz és amely az \mathbf{a}, \mathbf{b} pontokat köti össze. Ebből viszont már adódik, hogy teljesül az $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$ egyenlőség. Ezek alapján az alábbi eredményre jutunk.

1.26. Állítás *Legyen adva egy olyan $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amelyre tetszőleges $\mathbf{u} \in D$ helyen teljesül $\partial_i f(\mathbf{u}) = 0$ ($i = 1, \dots, m$). Ekkor f konstans függvény.*

Jegyzetünkben főleg olyan többváltozós függvényeket alkalmazunk, melyeknek tetszőleges rendben léteznek a parciális deriváltjai, vagyis amelyek C^∞ -osztályúak. Emiatt ha egy valós függvényt differenciálhatónak mondunk, akkor ezen mi legtöbbször azt értjük, hogy a függvény C^∞ -osztályú. Egy ilyen $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ függvény másodrendű parciális deriváltjaira a $\partial_{i,j} f = \partial_j(\partial_i f)$ ($i, j = 1, \dots, m$) jelölést alkalmazzuk. Többször felhasználjuk majd Young tételét, miszerint teljesül $\partial_{i,j} f(\mathbf{u}) = \partial_{j,i} f(\mathbf{u})$ tetszőleges $\mathbf{u} \in D$ helyen.

Legyen adott a $D \subset \mathbb{R}^m$ tartományon egy $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorértékű leképezés. Az \mathbf{r} koordináta-függvényein azokat az $x_j: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, n$) függvényeket értjük, melyekre igaz $x_j(u_1, \dots, u_m) = \langle \mathbf{r}(u_1, \dots, u_m), \mathbf{e}_j \rangle$ bármely $(u_1, \dots, u_m) \in D$ mellett. A koordináta-függvényekkel tehát teljesül az

$$\mathbf{r}(u_1, \dots, u_m) = \sum_{j=1}^n x_j(u_1, \dots, u_m) \mathbf{e}_j$$

egyenlőség.

Az \mathbf{r} leképezés definíció szerint akkor differenciálható az $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in D$ pontban, ha van egy olyan $D\mathbf{r}(\mathbf{u}): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, amellyel fennáll

$$\lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathbf{r}(\mathbf{u}) - D\mathbf{r}(\mathbf{u})(\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|} = 0,$$

ahol $D\mathbf{r}(\mathbf{u})(\mathbf{v})$ a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ vektor képét jelöli. Ha igaz a fenti összefüggés, akkor a $D\mathbf{r}(\mathbf{u})$ lineáris leképezést mondjuk az \mathbf{r} vektorértékű függvény \mathbf{u} -beli deriváltjának.

Az \mathbf{r} leképezés pontosan akkor differenciálható az \mathbf{u} helyen, ha a koordináta-függvényei differenciálhatóak. Ez esetben ha vesszük a koordináta-függvények parciális deriváltjaiból nyert $n \times m$ -es

$$\mathbf{Jr}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \partial_1 x_1(\mathbf{u}) & \partial_2 x_1(\mathbf{u}) & \dots & \partial_m x_1(\mathbf{u}) \\ \partial_1 x_2(\mathbf{u}) & \partial_2 x_2(\mathbf{u}) & \dots & \partial_m x_2(\mathbf{u}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 x_n(\mathbf{u}) & \partial_2 x_n(\mathbf{u}) & \dots & \partial_m x_n(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

mátrixot, akkor az \mathbb{R}^m és \mathbb{R}^n vektorterek természetes bázisaira nézve a $D\mathbf{r}(\mathbf{u})$ lineáris leképezést ez a $\mathbf{Jr}(\mathbf{u})$ mátrix írja le. A $\mathbf{Jr}(\mathbf{u})$ mátrixot mondjuk az \mathbf{r} vektorfüggvény \mathbf{u} pontbeli Jacobi-mátrixának.

A sima felületek tárgyalása során fontos szerephez jut majd a következő fogalom.

1.27. Definíció Legyen adott egy vektorértékű $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés. Az \mathbf{r} függvény i -edik parciális deriváltján az $\mathbf{u} \in D$ pontban a

$$\partial_i \mathbf{r}(u_1, \dots, u_m) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{r}(u_1, \dots, u_i + h, \dots, u_m) - \mathbf{r}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_m))$$

vektort értjük. Az előbbi összefüggéssel meghatározott $\partial_i \mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezést az i -edik parciális derivált függvénynek nevezzük ($i = 1, \dots, m$).

Világos, hogy fennáll a

$$\partial_i \mathbf{r}(u_1, \dots, u_m) = \sum_{j=1}^n \partial_i x_j(u_1, \dots, u_m) \cdot \mathbf{e}_j$$

összefüggés. Vegyük észre, hogy az $\mathbf{u} \in D$ pontbeli $\partial_i \mathbf{r}(\mathbf{u})$ parciális derivált koordinátái éppen a $\mathbf{Jr}(\mathbf{u})$ Jacobi-mátrix i -edik oszlopának az elemei.

Megjegyzés Amennyiben a $D \subset \mathbb{R}^m$ tartományon vett \mathbf{r} vektorfüggvénynek az összes parciális deriváltja eltűnik, akkor a fentiekből és az 1.26. Állításból már következik, hogy az \mathbf{r} függvény konstans.

Két differenciálható vektorfüggvény skaláris szorzatára vonatkozóan igaz az alábbi kijelentés, melyet a koordináta-függvények alkalmazásával könnyen be lehet látni.

1.28. Állítás Legyenek adva az $\mathbf{r}, \mathbf{q}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezések. Tekintsük azt az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyet az $f(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{r}(\mathbf{u}), \mathbf{q}(\mathbf{u}) \rangle$ egyenlet ír le tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in D$ esetén. Ekkor az f függvény differenciálható és a parciális deriváltakra teljesül a

$$\partial_i f(\mathbf{u}) = \langle \partial_i \mathbf{r}(\mathbf{u}), \mathbf{q}(\mathbf{u}) \rangle + \langle \mathbf{r}(\mathbf{u}), \partial_i \mathbf{q}(\mathbf{u}) \rangle \quad (1.7)$$

összefüggés ($i = 1, \dots, m$).

Tekintsünk egy Ψ izometriát az \mathbb{R}^n euklideszi térben, melyet az (1.2) egyenlet ír le. Könnyű belátni, hogy a Ψ leképezés differenciálható és tetszőleges $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ pontban igaz $D\Psi(\mathbf{p}) = \Phi$, ahol Φ éppen a Ψ által indukált lineáris izomorfizmus az \mathbb{R}^n vektortéren. Ily módon az összetett függvény deriválására vonatkozó láncszabály alkalmazásával a következő eredményre jutunk.

1.29. Állítás *Legyen adott egy $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés és egy $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ izometria, melyet az (1.2) összefüggés ír le. Ekkor a $\Psi \circ \mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény is differenciálható és tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in D$ pontban teljesül $D(\Psi \circ \mathbf{r})(\mathbf{u}) = \Phi \circ D\mathbf{r}(\mathbf{u})$, illetve a parciális deriváltakra igaz*

$$\partial_i(\Psi \circ \mathbf{r})(u_1, \dots, u_m) = \Phi(\partial_i \mathbf{r}(u_1, \dots, u_m)). \quad (1.8)$$

Reguláris leképezések

Az alábbiak során megadjuk a vektorértékű reguláris leképezés fogalmát.

1.30. Definíció *Legyen adott egy C^∞ -osztályú $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés a D nyílt halmazon. Az \mathbf{r} függvényt regulárisnak mondjuk, ha Jacobi-mátrixának rangjára bármely $\mathbf{u} \in D$ pontban fennáll $rk \mathbf{J}\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \min\{m, n\}$.*

A következő fontos eredményt az inverz leképezés tételének szokás nevezni.

1.31. Tétel *Az \mathbb{R}^m -beli D tartományon legyen adott egy C^∞ -osztályú reguláris $\rho : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény. Ekkor tetszőleges $\mathbf{p} \in D$ pontnak van olyan U nyílt és összefüggő környezete, hogy az arra leszűkített $\rho|_U$ leképezés invertálható és az inverz leképezése is egy C^∞ -osztályú függvény a $\rho(U)$ tartományon.*

Az implicit előállítású függvény tételének mi csak az alábbi speciális esetét fogjuk felhasználni.

1.32. Tétel *Az \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) tér egy W tartományán legyen adott egy $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ reguláris C^∞ -osztályú függvény. Legyen $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in W$ egy olyan pont, amelyre igaz $f(\mathbf{p}) = 0$ és $\partial_n f(\mathbf{p}) \neq 0$. Ekkor a (p_1, \dots, p_{n-1}) pontnak van olyan D nyílt összefüggő környezete \mathbb{R}^{n-1} -ben, továbbá van olyan a p_n értéket tartalmazó J nyílt intervallum, melyekkel igazak a következők.*

(1) *Bármely $(u_1, \dots, u_{n-1}) \in D$ esetén egyértelműen létezik egy olyan $v \in J$ szám, amellyel fennáll $f(u_1, \dots, u_{n-1}, v) = 0$.*

(2) *Ha vesszük a $h(u_1, \dots, u_{n-1}) = v$ kifejezéssel értelmezett $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, akkor az is C^∞ -osztályú és tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in D$ esetén teljesül*

$$\partial_i h(\mathbf{u}) = -\frac{\partial_i f(\mathbf{u}, h(\mathbf{u}))}{\partial_n f(\mathbf{u}, h(\mathbf{u}))} \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Az integrálfüggvény deriváltja

Ezen fejezet végén megadunk egy olyan tételt, amelyet majd a variációs problémák tárgyalása során fogunk alkalmazni.

1.33. Tétel *Legyen adott \mathbb{R}^m -ben egy B Jordan-mérhető zárt tartomány. Valamely $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum mellett vegyünk egy olyan folytonos $F : B \times I \subset \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelynek létezik az $(m+1)$ -edik változó szerinti parciális deriváltja és a $\partial_{m+1}F$ függvény is folytonos. Tekintsük az*

$$f(t) = \int \dots \int_B F(u_1, \dots, u_m, t) du_1 \dots du_m$$

integrál-kifejezéssel értelmezett $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor az f függvény differenciálható és tetszőleges $t \in I$ -re teljesül

$$f'(t) = \int \dots \int_B \partial_{m+1}F(u_1, \dots, u_m, t) du_1 \dots du_m. \quad (1.9)$$

2. fejezet

Reguláris sima görbék a 3-dimenziós euklideszi térben

Mechanikai szemszögből megközelítve a görbe fogalma egy olyan leképezést takar, amely egy tömegpont térbeli mozgását írja le az idő függvényében. A leképezés úgy jön létre, hogy tetszőleges t időpillanathoz a mozgó tömegpont pillanatnyi helyvektorát rendeljük.

Ebben a jegyzetben mi csak a mozgás során leírt pálya geometriai jellemzőit fogjuk tanulmányozni. Világos azonban, hogy ugyanazt a pályát egy tömegpont különböző sebességgel futhatja be, továbbá a pálya alakja nem változik akkor sem, ha a térben végrehajtunk egy egybevágósági transzformációt. A célunk tehát a görbe azon jellemzőinek a meghatározása, amelyek az átparaméterezéssel és az izometriával szemben invariánsak.

2.1. A görbedarab ívhossza

A sima görbe fogalma

Jegyzetünkben az I mindvégig az \mathbb{R} számegegyenes egy nyílt vagy zárt intervallumát fogja jelölni.

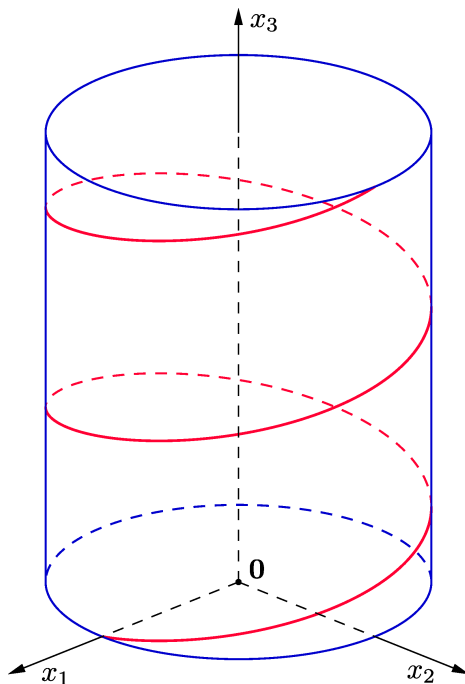
2.1. Definíció Az \mathbb{R}^3 térbeli folytonosan paraméterezett görbén egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ folytonos leképezést értünk. A $\gamma(I) = \{\gamma(t) \mid t \in I\}$ ponthalmazt a γ görbe pályájának nevezzük.

2.2. Definíció Az \mathbb{R}^3 euklideszi térben vett simán paraméterezett görbén egy C^∞ -osztályú $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést értünk. A γ simán paraméterezett görbét regulárisnak mondjuk, ha fennáll $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ tetszőleges $t \in I$ esetén.

A továbbiakban a simán paraméterezett görbe helyett egyszerűen csak a sima görbe elnevezést használjuk. Fontos azonban megjegyezni, hogy jegyzetünkben a görbe egy leképezést jelent, nem pedig annak a pályáját.

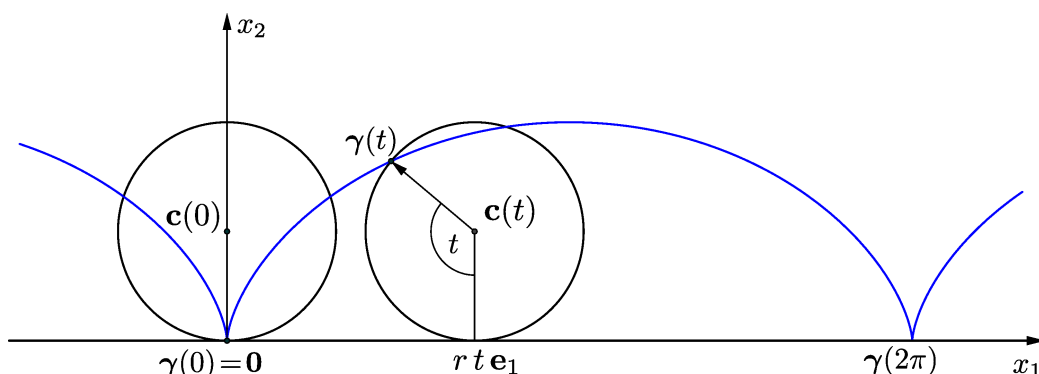
2.1. Példa Legyen adott a térben egy \mathcal{S} sík, az \mathcal{S} síkban egy \mathbf{c} pont, továbbá egy $r > 0$ szám. Legyenek \mathbf{b}_1 és \mathbf{b}_2 olyan egymásra merőleges egységvektorok, amelyek párhuzamosak az \mathcal{S} síkkal. Tekintsük azt a $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható leképezést, amelyet a $\gamma(t) = \mathbf{c} + r \cos t \mathbf{b}_1 + r \sin t \mathbf{b}_2$ ($t \in [0, 2\pi]$) összefüggés ír le. Ekkor a γ reguláris sima görbe pályája egy kör, amely benne van az \mathcal{S} síkban, centruma a \mathbf{c} pont és sugara r .

2.2. Példa Legyenek a és b olyan valós számok, ahol $a > 0$ és $b \neq 0$. Vegyük azt a $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést, amelynél igaz $\gamma(t) = a \cos t \mathbf{e}_1 + a \sin t \mathbf{e}_2 + b t \mathbf{e}_3$ ($t \in \mathbb{R}$). Amennyiben ezt egy tömegpont mozgását leíró függvénynek tekintjük, akkor a γ -nak az $x_3 = 0$ egyenletű síkra eső vetülete egy egyenletes körmozgást, az x_3 tengelyre eső vetülete pedig egyenletes egyenesvonalú mozgást ír le. Világos, hogy a $\gamma(\mathbb{R})$ pálya rajta van az $(x_1)^2 + (x_2)^2 = a^2$ egyenletű hengerfelületen. A γ sima görbét (illetve annak pályáját) hengeres csavarvonalnak nevezzük.



2.1. ábra. Hengeres csavarvonal merőleges vetülete.

2.3. Példa Tekintsünk az \mathbb{R}^3 tér $x_3 = 0$ egyenletű síkjában egy olyan r sugarú kört, amely érinti az x_1 koordinátatengelyt. Gördítsük le csúszásmentesen a kört az x_1 tengelyen. Írjuk le a kör azon kerületi pontjának a pályáját (illetve mozgását), amely a $\mathbf{0}$ kezdőpontban érintkezik az x_1 tengellyel. A mozgás t paraméterének válasszuk a gördülő körív előjeles középponti szögét, melyet radiánban mérünk. Könnyű belátni,



2.2. ábra. A közönséges ciklois.

hogy t pillanatban a kör centrumának pozícióját a $\mathbf{c}(t) = rt\mathbf{e}_1 + r\mathbf{e}_2$ kifejezés írja le. Jelölje most $\gamma(t)$ a kijelölt kerületi pont helyvektorát. A kör $\mathbf{c}(t)$ centrumából a $\gamma(t)$ pontba mutató vektort a $-r\mathbf{e}_2$ vektor t szögű elforgatásával nyerjük. (Lásd a 2.2. ábrát.) Emiatt fennáll $\gamma(t) - \mathbf{c}(t) = -r(\cos t\mathbf{e}_2 + \sin t\mathbf{e}_1)$. Ebből pedig azt kapjuk, hogy a t paraméternél a pont helyvektora

$$\gamma(t) = r(t - \sin t)\mathbf{e}_1 + r(1 - \cos t)\mathbf{e}_2.$$

Az így nyert $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe pályáját közönséges cikloisnak nevezzük. Célszerű megjegyeznünk, hogy ez a γ sima görbe nem reguláris, mivel fennáll $\gamma'(2i\pi) = \mathbf{0}$ bármely $i \in \mathbb{Z}$ egész számra.

2.3. Definíció Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris sima görbe. A $\gamma'(t)$ vektort a görbe sebességvektorának, a $\gamma''(t)$ vektort pedig a görbe gyorsulásvektorának mondjuk a $t \in I$ helyen.

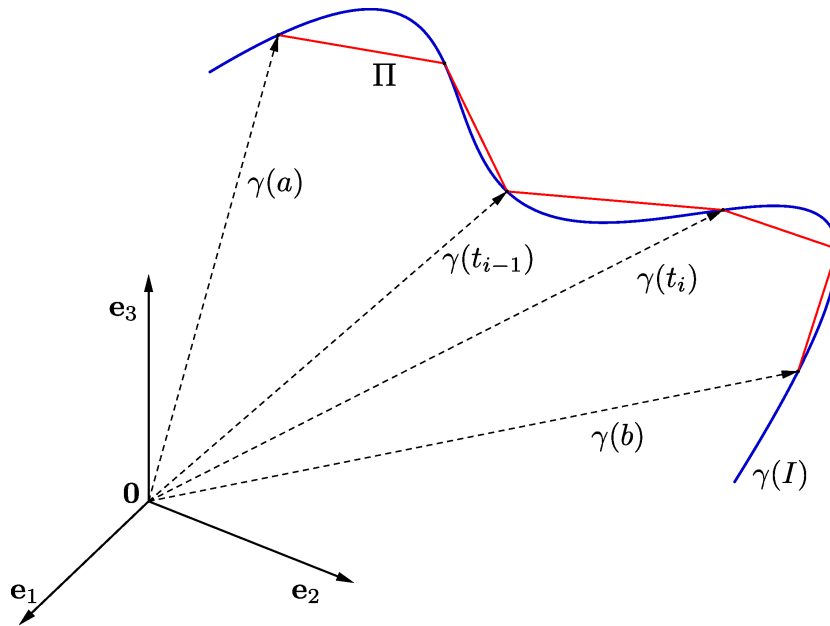
Amennyiben a γ görbe reguláris, akkor azt az egyenest, amely áthalad a $\gamma(t)$ ponton és amelynek $\gamma'(t)$ az egyik irányvektora, a γ görbe t -beli érintőjének nevezzük. Azt a síkot, amely átmegy a $\gamma(t)$ ponton és merőleges a $\gamma'(t)$ vektorra, a görbe t pontbeli normálsíkjának mondjuk.

2.4. Definíció Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^∞ -osztályú leképezés. A $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ kifejezéssel meghatározott $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvényt a γ görbe sebességfüggvényének nevezzük.

A görbedarab ívhosszának értelmezése

Legyen adva egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ folytonos görbe. Vegyünk egy $[a, b]$ részintervallumot I -ben és tekintsük γ -nak az $[a, b]$ -re történő leszűkítését. Egy az intervallumba eső $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ véges számsorozatot az $[a, b]$ egy felosztásának mondunk. A

$\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m)$ pontok szakaszokkal történő összekötésével nyert Π töröttvonalat nevezzük a $\gamma|[a, b]$ görbedarabba írt azon töröttvonalnak, melyet a P felosztás határoz meg. (Lásd a 2.3. ábrát.) Nyilvánvaló, hogy ezen Π beírt töröttvonal hosszára fennáll $l(\Pi) = \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$.



2.3. ábra. Görbedarabba írt töröttvonal.

2.5. Definíció A $\gamma|[a, b]$ görbét rektifikálhatónak mondjuk, ha a $\gamma|[a, b]$ görbébe írt azon Π töröttvonalak hosszainak halmaza, melyeket az $[a, b]$ intervallum P felosztásai határoznak meg, felülről korlátos. Amennyiben a $\gamma|[a, b]$ görbeszegmens rektifikálható, akkor az

$$l(\gamma|[a, b]) = \sup \{ l(\Pi) \mid \Pi \text{ a } \gamma|[a, b] \text{ görbébe írt töröttvonal} \}$$

számot a $\gamma|[a, b]$ görbedarab ívhosszájának nevezzük.

Megjegyzés Vannak olyan folytonos görbék, amelyek nem rektifikálhatóak. Példaként vegyünk azt a $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét, ahol $\gamma(t) = t \mathbf{e}_1 + t \cos(\pi/t) \mathbf{e}_2$ teljesül amennyiben $t \in \mathbb{R}$ és $t \neq 0$, továbbá fennáll $\gamma(0) = \mathbf{0}$. Vegyük észre, hogy ez a γ leképezés nem differenciálható a $t = 0$ helyen.

Jelölje P_m ($m \geq 3$) a $[-1, 0]$ intervallum azon felosztását, amelynél fennáll $t_k = -\frac{1}{k+1}$ amennyiben $k = 0, 1, \dots, m-1$, továbbá $t_m = 0$. Ily módon azt nyerjük, hogy a P_m által meghatározott Π_m beírt töröttvonal csúcspontjai $\gamma(t_k) = -\frac{1}{k+1} \mathbf{e}_1 +$

$(-1)^k \frac{1}{k+1} \mathbf{e}_2$ és $\gamma(t_m) = \mathbf{0}$. Ennek következtében a Π_m töröttvonal oldalainak hosszaira igaz $\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| > \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$ ($k = 1, \dots, m-1$) és $\|\gamma(t_m) - \gamma(t_{m-1})\| > \frac{1}{m}$. Eszerint a Π_m töröttvonal hosszára teljesül az $l(\Pi_m) > 1 + 2 \sum_{k=2}^m \frac{1}{k}$ egyenlőtlenség.

Mint ismeretes, a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ számsor divergens, és ebből adódóan a $\gamma|_{[-1, 0]}$ görbeszegmensbe beírt töröttvonalak hosszainak nincs felső korlátja.

Abban az esetben, ha a görbe folytonosan differenciálható, mindig értelmezhető a görbedarab ívhossza. Az ezzel kapcsolatos tétel igazolásánál alkalmazni fogunk egy segédtételt.

Valamely $[a, b]$ zárt intervallumon legyen értelmezve egy $\zeta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ folytonos vektorértékű leképezés. Vegyük ennek a $z_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, 3$) koordinátafüggvényeit, melyeket a $z_j(u) = \langle \zeta(u), \mathbf{e}_j \rangle$ kifejezések írnak le. Amint szokásos, a ζ függvény $[a, b]$ feletti határozott integrálján a $\sum_{j=1}^3 \left(\int_a^b z_j(u) du \right) \mathbf{e}_j$ vektort értjük.

2.6. Lemma *A határozott integrálokra fennáll*

$$\left\| \int_a^b \zeta(u) du \right\| \leq \int_a^b \|\zeta(u)\| du. \quad (2.1)$$

Bizonyítás. Vezessük be a $w_j = \int_a^b z_j(u) du$ jelölést, és tekintsük a $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^3 w_j \mathbf{e}_j = \int_a^b \zeta(u) du$ vektort. Amennyiben $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, akkor (2.1) nyilván teljesül.

A $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ esetben vegyük a $\mathbf{c} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w}$ egységvektort. Világos, hogy a $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ egységvektorra igaz $\langle \zeta(u), \mathbf{c} \rangle \leq \|\zeta(u)\|$ tetszőleges $u \in [a, b]$ esetén. Ennek következtében fennáll a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\| &= \langle \mathbf{c}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{j=1}^3 c_j \cdot \int_a^b z_j(u) du = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^3 c_j z_j(u) \right) du \\ &= \int_a^b \langle \zeta(u), \mathbf{c} \rangle du \leq \int_a^b \|\zeta(u)\| du \end{aligned}$$

összefüggés. □

2.7. Tétel *Legyen adva egy olyan $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés, amely folytonosan differenciálható. Bármely $[a, b] \subset I$ zárt intervallum esetén a $\gamma|_{[a, b]}$ görbedarab rektifikálható és fennáll*

$$l(\gamma|_{[a, b]}) = \int_a^b \|\gamma'(u)\| du. \quad (2.2)$$

Bizonyítás. Elsőként azt igazoljuk, hogy a görbedarab rektifikálható. Vegyük az $[a, b]$ intervallumnak egy $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ felosztását, továbbá a $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m)$ pontok szakaszokkal való összekötésével nyert Π töröttvonalat.

Vegyük észre, hogy teljesül $\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(u) du$. A 2.6. Lemmában szereplő (2.1) egyenlőtlenség alkalmazásával azt kapjuk, hogy igaz

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(u) du \right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(u)\| du.$$

A fenti összefüggésből már adódik, hogy fennáll

$$l(\Pi) = \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(u)\| du = \int_a^b \|\gamma'(u)\| du,$$

vagyis az $\int_a^b \|\gamma'(u)\| du$ határozott integrál egy felső korlátja a $\gamma[[a, b]$ görbedarabba beírt töröttvonalak hosszainak.

Be kell még látnunk, hogy a $\int_a^b \|\gamma'(u)\| du$ Riemann-integrál egyúttal a felső határa a beírt töröttvonalak hosszainak. Vegyünk egy $\varepsilon > 0$ pozitív számot. Azt fogjuk igazolni, hogy van olyan P felosztása az $[a, b]$ -nek, hogy a P által meghatározott Π beírt töröttvonal $l(\Pi)$ hosszára teljesül

$$\int_a^b \|\gamma'(u)\| du < l(\Pi) + \varepsilon.$$

Tekinstük most a $c = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ pozitív számot. A γ' leképezés folytonos, tehát az $[a, b]$ zárt intervallumon γ' egyenletesen folytonos. Emiatt létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy amennyiben $u_1, u_2 \in [a, b]$ és $|u_1 - u_2| < \delta$, akkor fennáll $\|\gamma'(u_1) - \gamma'(u_2)\| < c$.

Vegyük az $[a, b]$ -nek egy olyan P felosztását, ahol a részintervallumok $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ($i = 1, \dots, m$) hosszaira igaz $\Delta t_i < \delta$. Ezen feltétel teljesülése esetén tetszőleges $u \in [t_{i-1}, t_i]$ mellett fennáll $\|\gamma'(u)\| < \|\gamma'(t_i)\| + c$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség és a 2.6. Lemma következtében teljesül

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(u)\| du &< (\|\gamma'(t_i)\| + c) \Delta t_i = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(u) + \gamma'(t_i) - \gamma'(u)) du \right\| + c \cdot \Delta t_i \\ &\leq \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(u) du \right\| + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t_i) - \gamma'(u)) du \right\| + c \cdot \Delta t_i \\ &\leq \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t_i) - \gamma'(u)\| du + c \cdot \Delta t_i \\ &\leq \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + 2c \cdot \Delta t_i. \end{aligned}$$

Ha az így kapott $\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(u)\| du < \|\gamma'(t_i) - \gamma'(t_{i-1})\| + 2c \cdot \Delta t_i$ ($i = 1, \dots, m$) egyenlőtlenségeket összegezzük, akkor azt nyerjük, hogy fennáll

$$\int_a^b \|\gamma'(u)\| du < l(\Pi) + 2c(b-a) = l(\Pi) + \varepsilon,$$

ami már igazolja a tételt. □

A görbe átparaméterezése

A továbbiakban már kizárólag reguláris sima görbékkel foglalkozunk.

2.8. Definíció Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris sima görbe. Vegyünk egy $J \subset \mathbb{R}$ intervallumot és azon egy olyan φ differenciálható függvényt, amelyre fennáll $\varphi(J) = I$ és $\varphi'(\tau) \neq 0$ ($\tau \in J$). A $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés reguláris sima görbét ad meg, amiről azt mondjuk, hogy a γ görbe φ általi átparaméterezésével jött létre.

A φ -t a paramétertranszformáció függvényének szokás nevezni.

Amennyiben $\varphi' > 0$ teljesül, akkor a $\gamma \circ \varphi$ átparaméterezést irányítástartónak mondjuk. Ellenkező esetben (vagyis ha $\varphi' < 0$) az átparaméterezést irányításváltónak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy a γ és $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ görbék pályája megegyezik. Emellett fennáll

$$\tilde{\gamma}'(\tau) = \varphi'(\tau) \cdot \gamma'(\varphi(\tau)), \quad (2.3a)$$

$$\tilde{\gamma}''(\tau) = \varphi''(\tau) \cdot \gamma'(\varphi(\tau)) + \varphi'(\tau)^2 \cdot \gamma''(\varphi(\tau)). \quad (2.3b)$$

A (2.3a) összefüggésből adódik, hogy a $\tilde{\gamma}$ -nak a $\tau \in J$ helyen vett érintőegyenese megegyezik a γ görbe $\varphi(\tau)$ pontbeli érintőegyenésével.

Megjegyzés A γ reguláris görbe geometriai jellemzőin értjük azokat a γ leképezésből származtatott fogalmakat, amelyek paramétertranszformációval és \mathbb{R}^3 -beli izometriával szemben egyaránt invariánsak.

Az ívhossz szerinti paraméterezés

2.9. Definíció Egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris sima görbéről azt mondjuk, hogy ívhossz szerint van paraméterezve, ha $\|\gamma'(t)\| = 1$ teljesül bármely $t \in I$ -re.

Megjegyzés A fenti elnevezést az indokolja, hogy ívhossz szerinti paraméterezésnél a $\gamma|[a, b]$ ($a, b \in I$, $a < b$) görbedarab ívhosszára a (2.2) összefüggés alapján fennáll $l(\gamma|[a, b]) = b - a$.

A szakirodalomban az ívhossz szerinti paraméterezést úgy szokás jelezni, hogy a görbénél s -sel jelölik a paramétert (vagyis a változót). Állapodjunk meg abban, hogy ha ezen jegyzetben a γ görbénél a paramétert s jelöli, akkor az azt jelenti, hogy $\|\gamma'\| = 1$ teljesül.

Az 1.24. Következmény alkalmazásával azt nyerjük, hogy ívhossz szerinti paraméterezés esetén a γ első két deriváltjára teljesül a $\langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 0$ ($s \in I$) összefüggés.

Áttérés ívhossz szerinti paraméterezésre

Legyen adva egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris sima görbe. Rögzítsünk egy $a \in I$ értéket. Vegyük a $\rho(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du$ kifejezéssel meghatározott $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt. A 2.7. Tétel szerint a $\rho(t)$ függvényérték megegyezik a γ görbe megfelelő szegmensének az előjeles ívhosszával.

A monoton növekvő ρ függvény értékészletét képező intervallum legyen J , azaz $J = \rho(I)$. Tekintsük ρ -nak a $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ inverz függvényét, majd pedig a γ görbének a φ szerinti $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ átparaméterezését.

Emlékezzünk rá, hogy φ is egy C^∞ -osztályú függvény, amelyre igaz $\varphi'(\tau) = \frac{1}{\rho'(\varphi(\tau))} = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi(\tau))\|}$ tetszőleges $\tau \in J$ esetén. Ebből viszont már adódik, hogy fennáll

$$\|\tilde{\gamma}'(\tau)\| = \|\varphi'(\tau) \cdot \gamma'(\varphi(\tau))\| = |\varphi'(\tau)| \cdot \|\gamma'(\varphi(\tau))\| = 1.$$

Eszerint a $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ görbe ívhossz szerinti paraméterezésben van megadva.

2.2. A reguláris sima görbe görbülete

Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima görbe. Tekintsünk egy az I intervallumon értelmezett $\mathbf{Y} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést, amely C^∞ -osztályú. Ha bármely $t \in I$ esetén az $\mathbf{Y}(t)$ vektort úgy tekintjük, mint egy $\gamma(t)$ kezdőpontú irányított szakaszt az \mathbb{R}^3 euklideszi térben, akkor az \mathbf{Y} -t egy sima vektormezőnek mondjuk a γ görbe mentén. A továbbiakban a γ függvény deriváltjait úgy tekintjük, mint vektormezőket a γ mentén.

Emlékezzünk rá, hogy a $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre igaz $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ tetszőleges $t \in I$ helyen, a γ sebességfüggvényének mondjuk.

2.10. Definíció *Legyen a γ sima görbe reguláris. Tekintsük a γ mentén azt a $\mathbf{T} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormezőt, amelyre fennáll $\mathbf{T} = \frac{1}{v} \gamma'$. Ezt a \mathbf{T} leképezést a γ érintő egységvektormezőjének nevezzük.*

Megjegyzés Az előző definícióban szereplő \mathbf{T} leképezést a γ görbe tangenciális egységvektormezőjének is szokás mondani.

2.11. Definíció *A $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris sima görbének a $t \in I$ pontban vett görbületén a $\kappa(t) = \frac{1}{v(t)} \|\mathbf{T}'(t)\|$ nemnegatív számot értjük.*

A fenti kifejezéssel meghatározott $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos leképezést a γ görbületi függvényének mondjuk.

A görbülettel kapcsolatosan igaz az alábbi egyszerű állítás.

2.12. Állítás *A $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris sima görbe pályája egy egyenesen van akkor és csak akkor, ha a görbületi függvénye eltűnik.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a γ görbe $\gamma(I)$ pályája rajta van az \mathbb{R}^3 tér egyik \mathcal{E} egyenesén. Vegyünk egy $t_0 \in I$ értéket és egy olyan \mathbf{b} egységvektort, amely párhuzamos \mathcal{E} -vel. Tetszőleges $t \in I$ esetén a $\gamma(t) - \gamma(t_0)$ és \mathbf{b} párhuzamosak, emiatt fennáll $\gamma(t) = \gamma(t_0) + \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), \mathbf{b} \rangle \mathbf{b}$. Ily módon teljesül $\gamma'(t) = \langle \gamma'(t), \mathbf{b} \rangle \mathbf{b}$. Ebből már következik, hogy a \mathbf{T} leképezés konstans, azaz fennáll $\mathbf{T}(t) = \mathbf{b}$ vagy $\mathbf{T}(t) = -\mathbf{b}$ tetszőleges $t \in I$ -re. Eszerint igaz $\mathbf{T}'(t) = \mathbf{0}$, ami azt eredményezi, hogy $\kappa(t) = 0$.

Fordítva, tegyük most fel azt, hogy fennáll $\kappa = 0$. Nyilvánvaló, hogy ekkor $\mathbf{T}'(t) = \mathbf{0}$ bármely $t \in I$ mellett. Ennek következtében a \mathbf{T} leképezés állandó. Jelölje \mathbf{b} azt az egységvektort, amelyre igaz $\mathbf{T}(t) = \mathbf{b}$. Eszerint teljesül $\gamma'(t) = v(t) \mathbf{b}$. Innen azt nyerjük, hogy ha rögzítünk egy $t_0 \in I$ értéket, akkor fennáll $\gamma(t) = \gamma(t_0) + (\int_{t_0}^t v(u) du) \mathbf{b}$. Ez a kifejezés pedig azt mutatja, hogy a $\gamma(I)$ pálya rajta van a $\gamma(t_0)$ ponton átmenő \mathbf{b} -vel párhuzamos egyenesen. \square

A görbületet ki lehet számítani a γ függvény első két deriváltjából is.

2.13. Állítás *A $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbe $t \in I$ helyen vett görbületére fennáll*

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}. \quad (2.4)$$

Bizonyítás. A $\|\mathbf{T}(t)\| = 1$ egyenlőség és az 1.24. Következmény miatt a $\mathbf{T}(t)$ és $\mathbf{T}'(t)$ vektorok merőlegesek egymásra. Ennek következtében fennáll $\|\mathbf{T}(t) \times \mathbf{T}'(t)\| = \|\mathbf{T}'(t)\|$ bármely $t \in I$ -re. A $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{v(t)} \gamma'(t)$ kifejezést deriválva (1.4) alapján azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{T}'(t) = -\frac{v'(t)}{v(t)^2} \gamma'(t) + \frac{1}{v(t)} \gamma''(t).$$

Eszerint igaz

$$\mathbf{T}(t) \times \mathbf{T}'(t) = \frac{1}{v(t)^2} (\gamma'(t) \times \gamma''(t)).$$

A fenti összefüggésből már adódik, hogy teljesül $\frac{1}{v(t)} \|\mathbf{T}'(t)\| = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{v(t)^3}$, ami igazolja az állításunkat. \square

A görbület invariáns jellege

Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris sima görbe. A 2.8. Definícióban leírtaknak megfelelően vegyük a γ reguláris görbe egy $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ átparaméterezését. Ezzel kapcsolatosan könnyen igazolható a következő állítás.

2.14. Állítás *A γ átparaméterezésével nyert $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ reguláris görbe görbületi függvényére fennáll $\tilde{\kappa} = \kappa \circ \varphi$.*

Bizonyítás. Vezessük be az $\varepsilon = \frac{\varphi'(u)}{|\varphi'(u)|}$ ($u \in J$) jelölést. Eszerint $\varepsilon = 1$, ha az átparaméterezés irányítástartó, továbbá $\varepsilon = -1$ irányításváltás esetén. A (2.3a) egyenlőségből adódik, hogy igaz $\tilde{v}(u) = |\varphi'(u)| \cdot v(\varphi(u))$ és $\tilde{\mathbf{T}}(u) = \varepsilon \cdot \mathbf{T}(\varphi(u))$ tetszőleges $u \in J$ -re. Eszerint teljesül $\tilde{\mathbf{T}}'(u) = \varepsilon \cdot \mathbf{T}'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)$ és $\|\tilde{\mathbf{T}}'(u)\| = |\varphi'(u)| \cdot \|\mathbf{T}'(\varphi(u))\|$. Innen viszont behelyettesítéssel kapjuk, hogy fennáll

$$\tilde{\kappa}(u) = \frac{1}{\tilde{v}(u)} \|\tilde{\mathbf{T}}'(u)\| = \frac{1}{v(\varphi(u))} \|\mathbf{T}'(\varphi(u))\| = \kappa \circ \varphi(u). \quad \square$$

Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbe, továbbá egy \mathbb{R}^3 -beli Ψ izometria, amelyet az (1.2) összefüggés ír le. Tekintsük γ -nak a Ψ szerinti képét, vagyis a $\hat{\gamma} = \Psi \circ \gamma$ reguláris görbét. A (1.6) egyenlet szerint fennáll $\hat{\gamma}'(t) = \Phi(\gamma'(t))$ tetszőleges $t \in I$ esetén. Mivel a Φ lineáris leképezés megőrzi a vektorok hosszát, a $\hat{\gamma} = \Psi \circ \gamma$ képgörbe \hat{v} sebességfüggvényére és $\hat{\mathbf{T}}$ érintő egységvektormezőjére teljesülnek a $\hat{v} = v$, $\hat{\mathbf{T}} = \Phi \circ \mathbf{T}$ és $\hat{\mathbf{T}}' = \Phi \circ \mathbf{T}'$ összefüggések. Ezekből már következik, hogy igaz az alábbi kijelentés.

2.15. Állítás *A γ és $\hat{\gamma} = \Psi \circ \gamma$ reguláris görbék κ és $\hat{\kappa}$ görbületi függvényei megegyeznek, azaz $\hat{\kappa} = \kappa$.*

Az előző állítások ismeretében már be lehet vezetni az alábbi fogalmat is.

2.16. Definíció *Legyen adva egy $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbe. A $\kappa(\gamma) = \int_a^b \kappa(t) v(t) dt$ számot a γ teljes görbületének nevezzük.*

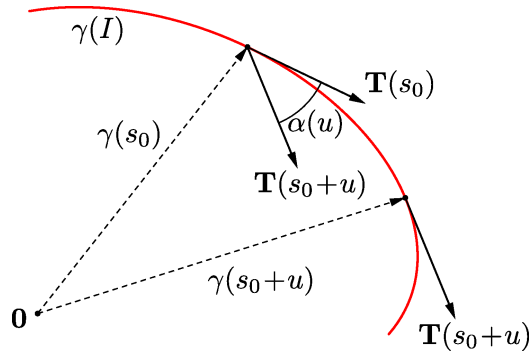
Megjegyzés A fentiek alapján könnyű megmutatni, hogy a teljes görbület az átparaméterezéssel szemben invariáns.

A γ görbéhez tartozó $\mathbf{T} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ érintő egységvektormezőt tekintsük most egy sima görbének. Világos, hogy a \mathbf{T} görbe pályája rajta van az $S^2 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{u}\| = 1\}$ gömbfelületen. Ekkor a $\|\mathbf{T}'(t)\| = \kappa(t) v(t)$ összefüggés szerint a $\kappa(\gamma)$ teljes görbület megegyezik ezen \mathbf{T} görbe ívhosszával.

A görbület geometriai jelentése

Tekintsünk egy ívhossz szerint paraméterezett $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét. Eszerint most fennáll $v = \|\gamma'\| = 1$, továbbá $\mathbf{T} = \gamma'$ teljesül az érintő egységvektormezőre. A görbületre nyilván igaz $\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\gamma''(s)\|$.

Rögzítsünk egy $s_0 \in I$ paraméterértéket. Vegyük a $J = \{s - s_0 \mid s \in I\}$ intervallumot, továbbá azt az $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, ahol az $\alpha(u)$ ($u \in J$) függvényérték megegyezik az érintők irányát megadó $\mathbf{T}(s_0)$, $\mathbf{T}(s_0 + u)$ egységvektorok hajlásszögével. (Lásd a 2.4. ábrát.) Az α függvény tehát a görbe érintőjének az irányváltozását méri a $\mathbf{T}(s_0)$ érintő egységvektorhoz viszonyítva. Nyilván teljesül $0 \leq \alpha(u) \leq \pi$ és $\cos \alpha(u) = \langle \mathbf{T}(s_0), \mathbf{T}(s_0 + u) \rangle$.



2.4. ábra. Az irányváltozást mérő $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezése.

2.17. Állítás Az α függvényvel fennáll a $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\alpha(u)}{|u|} = \kappa(s_0)$ összefüggés.

Bizonyítás. Világos, hogy az α függvény folytonos és $\lim_{u \rightarrow 0} \alpha(u) = \alpha(0) = 0$. Vezessük be a $\vartheta : [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvényt, amelynél fennáll $\vartheta(x) = \frac{x}{\sin x}$ ha $x \neq 0$, továbbá $\vartheta(0) = 1$. A ϑ függvény folytonos, mivel igaz $\lim_{x \rightarrow 0} \vartheta(x) = 1$. Ezt alkalmazva teljesül

$$\frac{\alpha(u)}{|u|} = \frac{\sin \alpha(u)}{|u|} \cdot \vartheta(\alpha(u))$$

feltéve, hogy $u \neq 0$ és $\alpha(u) \neq \pi$. Ebből következik, hogy amennyiben az $\frac{\alpha(u)}{|u|}$ és $\frac{\sin \alpha(u)}{|u|}$ hányadosoknak létezik határértéke az $u = 0$ helyen, akkor azok megegyeznek.

Azt könnyű belátni, hogy fennáll a

$$\|\mathbf{T}(s_0 + u) - \mathbf{T}(s_0)\| = 2 \sin \frac{\alpha(u)}{2}$$

egyenlet. Ha ennek mindkét oldalát megszorozzuk az $(1/|u|) \cdot \cos(\alpha(u)/2)$ számmal, akkor a

$$\left\| \frac{1}{u} (\mathbf{T}(s_0 + u) - \mathbf{T}(s_0)) \right\| \cdot \cos \frac{\alpha(u)}{2} = \frac{\sin \alpha(u)}{|u|}$$

összefüggést kapjuk. Nyilvánvaló, hogy igaz $\lim_{u \rightarrow 0} \cos(\alpha(u)/2) = 1$. Ily módon teljesül

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(u)}{|u|} = \|\mathbf{T}'(s_0)\| = \kappa(s_0),$$

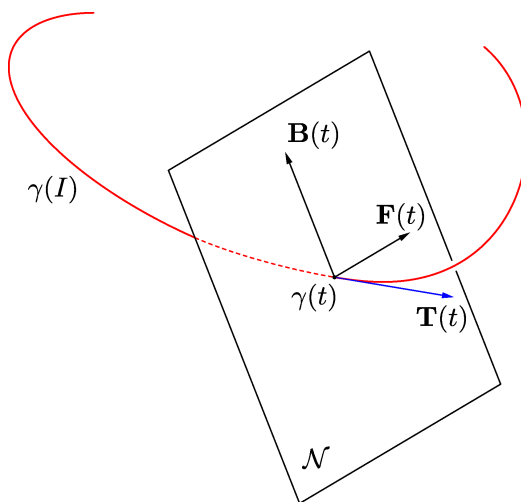
ami már igazolja az állítást. \square

A főnormális és a binormális egységvektorok

A továbbiakban a vizsgált $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris sima görbéről feltesszük, hogy annak a tekintett $t \in I$ helyen vett görbületére fennáll $\kappa(t) > 0$. Eszerint igaz $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{T}'(t)$ merőleges a $\mathbf{T}(t)$ érintő egységvektorra.

2.18. Definíció Az $\mathbf{F}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \mathbf{T}'(t)$ vektort a γ görbe t pontbeli főnormális egységvektorának mondjuk. A $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{F}(t)$ vektort nevezzük a γ görbe binormális egységvektorának a t helyen.

2.19. Definíció Az \mathbb{R}^3 vektortérnek a $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ vektorok által alkotott ortonormált bázisát a γ görbe t helyen vett Frenet-bázisának mondjuk.



2.5. ábra. A γ görbe t pontbeli Frenet-bázisa és \mathcal{N} normálsíkja.

A görbület és a főnormális egységvektor definíciójából következik, hogy fennáll

$$\mathbf{T}'(t) = \|\mathbf{T}'(t)\| \cdot \mathbf{F}(t) = v(t) \kappa(t) \mathbf{F}(t). \quad (2.5)$$

Amennyiben deriváljuk a $\gamma'(t) = v(t) \mathbf{T}(t)$ kifejezést, akkor a fenti összefüggés alapján azt kapjuk, hogy igaz

$$\gamma''(t) = v'(t) \mathbf{T}(t) + v(t)^2 \kappa(t) \mathbf{F}(t). \quad (2.6)$$

Az $\mathbf{F}(t)$ főnormális nyilván eleme annak a 2-dimenziós lineáris altérnek, melyet a $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$ vektorok generálnak \mathbb{R}^3 -ban. Emellett a fenti egyenlet megadja a $\gamma''(t)$ vektor felbontását a $\mathbf{T}(t)$ -vel párhuzamos és arra merőleges összetevőkre. Vegyük még azt is észre, hogy teljesül $\langle \gamma''(t), \mathbf{F}(t) \rangle = v(t)^2 \kappa(t)$.

Az első két derivált vektoriális szorzatára igaz $\boldsymbol{\gamma}'(t) \times \boldsymbol{\gamma}''(t) = v(t)^3 \kappa(t) \mathbf{B}(t)$. Eszerint a $\boldsymbol{\gamma}'(t) \times \boldsymbol{\gamma}''(t)$, $\mathbf{B}(t)$ vektorok iránya megegyezik. Ily módon tehát fennáll

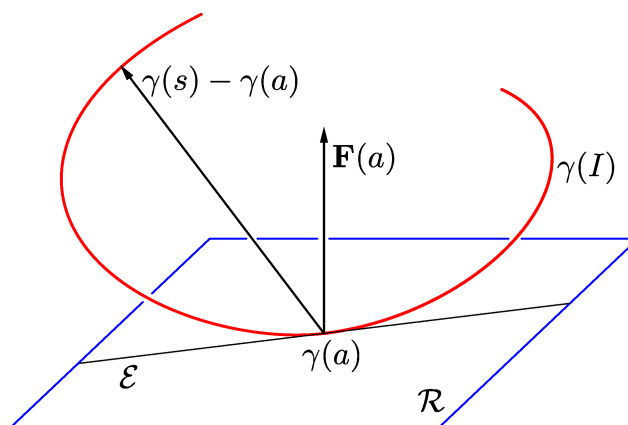
$$\mathbf{B}(t) = \frac{\boldsymbol{\gamma}'(t) \times \boldsymbol{\gamma}''(t)}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t) \times \boldsymbol{\gamma}''(t)\|}.$$

A későbbi vizsgálatok során az alábbi fogalmat is alkalmazni fogjuk.

2.20. Definíció Azt a síkot, amely áthalad a $\boldsymbol{\gamma}(t)$ ponton és amely merőleges az $\mathbf{F}(t)$ főnormálisra, a $\boldsymbol{\gamma}$ görbe t pontbeli rektifikáló síkjának mondjuk.

A simulósík és a simulókör

Legyen adott egy ívhossz szerint paraméterezett $\boldsymbol{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe. Eszerint most fennáll $\|\boldsymbol{\gamma}'\| = 1$ és $\|\boldsymbol{\gamma}''\| = \kappa$. Rögzítsünk egy $a \in I$ paraméterértéket és tegyük fel, hogy $\kappa(a) \neq 0$ teljesül. A $\boldsymbol{\gamma}$ görbe a -beli érintőegyenesét jelölje \mathcal{E} .



2.6. ábra. A h függvény értelmezése.

Tekintsük azt a $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyet a $h(s) = \langle \boldsymbol{\gamma}(s) - \boldsymbol{\gamma}(a), \mathbf{F}(a) \rangle$ összefüggés ír le. (Lásd a 2.6. ábrát.) Vegyük észre, hogy a h függvény a görbe pontjainak az előjeles távolságát méri az a helyen vett \mathcal{R} rektifikáló síktól. Világos, hogy a h valós függvényre fennáll $h(a) = 0$, $h'(a) = 0$ és $h''(a) = \kappa(a) > 0$. A Taylor-tételből következik, hogy a h függvénynek a -ban lokális minimuma van, vagyis megadható egy az a -t tartalmazó olyan $J \subset I$ intervallum, hogy amennyiben $s \in J$ és $s \neq a$, akkor $h(s) > 0$. Eszerint a $\boldsymbol{\gamma}(J)$ görbeívet a rektifikáló sík által határolt két féltér közül az tartalmazza, amelyikbe az $\mathbf{F}(a)$ főnormális mutat.

A szokásoknak megfelelően jelölje \mathbb{N} a pozitív egészek halmazát. Vegyünk egy olyan s_m ($m \in \mathbb{N}$) számsorozatot, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:

- (1) Tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ -re fennáll $s_m \in J$ és $s_m \neq a$.
- (2) Az s_m ($m \in \mathbb{N}$) számsorozat konvergál a -hoz, azaz $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = a$.

Mivel az \mathcal{E} érintő benne van a rektifikáló síkban, $h(s_m) > 0$ miatt a $\gamma(s_m)$ pont nem eshet az \mathcal{E} -re. Jelölje S_m azt a síkot, amely tartalmazza a γ görbe \mathcal{E} érintőegyenesét és a $\gamma(s_m)$ pontot. Vegyük továbbá az S_m síkban azt a K_m kört, amely áthalad a $\gamma(a)$, $\gamma(s_m)$ pontokon és amelynek érintője az \mathcal{E} egyenes.

2.21. Állítás Az S_m ($m \in \mathbb{N}$) síksorozat konvergál ahhoz a $\gamma(a)$ ponton átmenő síkhoz, amelyet a $\gamma'(a)$ és $\gamma''(a)$ vektorok feszítenek ki.

Bizonyítás. Tekintsük a $J_0 = \{ s - a \mid s \in J \}$ intervallumot. Tetszőleges $u \in J_0$, $u \neq 0$ érték esetén legyen $S(u)$ az a sík, amely tartalmazza az \mathcal{E} érintőt és a $\gamma(a + u)$ pontot. Legyen továbbá \mathcal{S} az a sík, amely áthalad a $\gamma(a)$ ponton és párhuzamos a $\gamma'(a)$, $\gamma''(a)$ vektorokkal. Nyilvánvaló, hogy az \mathcal{S} sík merőleges a $\mathbf{B}(a)$ binormális egységvektorra.

Az \mathbb{R}^3 lineáris térben vegyük a $\mathbf{b}_1 = \mathbf{T}(a)$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{F}(a)$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{B}(a)$ vektorokból képzett ortonormált bázist. Vezessük be a $\boldsymbol{\delta} : J_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvényt, ahol $\boldsymbol{\delta}(u) = \gamma(a + u) - \gamma(a)$. A $\boldsymbol{\delta}(u)$ különbségvektor nyilván párhuzamos az $S(u)$ síkkal. Tekintsük ennek a $\mathbf{T}(a)$ vektorra merőleges $\boldsymbol{\delta}(u) - \langle \boldsymbol{\delta}(u), \mathbf{b}_1 \rangle \mathbf{b}_1$ komponensét, illetve a merőleges komponenssel egyirányú

$$\mathbf{V}(u) = \frac{\boldsymbol{\delta}(u) - \langle \boldsymbol{\delta}(u), \mathbf{b}_1 \rangle \mathbf{b}_1}{\|\boldsymbol{\delta}(u) - \langle \boldsymbol{\delta}(u), \mathbf{b}_1 \rangle \mathbf{b}_1\|} \quad (2.7)$$

egységvektort.

A $\gamma(a)$ ponton átmenő $S(u)$ síkot a $\mathbf{T}(a)$, $\mathbf{V}(u)$ ortonormált vektorok feszítik ki. A normálsíkba eső $\mathbf{V}(u)$ vektor bármely $u \in J_0$, $u \neq 0$ érték esetén kifejezhető a

$$\mathbf{V}(u) = f(u) \mathbf{F}(a) + g(u) \mathbf{B}(a) \quad (2.8)$$

alakban, ahol $f(u) = \langle \mathbf{V}(u), \mathbf{b}_2 \rangle$ és $g(u) = \langle \mathbf{V}(u), \mathbf{b}_3 \rangle$. Azt kellene belátni, hogy fennáll $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 1$. Ez viszont egyenértékű azzal, hogy $\lim_{u \rightarrow 0} \mathbf{V}(u) = \mathbf{F}(a)$.

A $\boldsymbol{\delta}(u) = \sum_{i=1}^3 \langle \boldsymbol{\delta}(u), \mathbf{b}_i \rangle \mathbf{b}_i$ egyenlőség alkalmazásával az

$$f(u) = \frac{\langle \boldsymbol{\delta}(u), \mathbf{b}_2 \rangle}{\left(\langle \boldsymbol{\delta}(u), \mathbf{b}_2 \rangle^2 + \langle \boldsymbol{\delta}(u), \mathbf{b}_3 \rangle^2 \right)^{1/2}}.$$

összefüggéshez jutunk. A fenti hányados számlálóját és nevezőjét szorozzuk meg az $\frac{1}{u^2}$ értékkel. Ennek következtében teljesül

$$\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = \frac{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u^2} \langle \boldsymbol{\delta}(u), \mathbf{b}_2 \rangle}{\left(\left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u^2} \langle \boldsymbol{\delta}(u), \mathbf{b}_2 \rangle \right)^2 + \left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u^2} \langle \boldsymbol{\delta}(u), \mathbf{b}_3 \rangle \right)^2 \right)^{1/2}}. \quad (2.9)$$

A határértékeket a L'Hospital-szabály kétszeri alkalmazásával határozhatjuk meg. Eszerint fennáll

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\langle \boldsymbol{\delta}(u), \mathbf{b}_2 \rangle}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\langle \boldsymbol{\gamma}'(a+u), \mathbf{b}_2 \rangle}{2u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\langle \boldsymbol{\gamma}''(a+u), \mathbf{b}_2 \rangle}{2} = \frac{\langle \boldsymbol{\gamma}''(a), \mathbf{b}_2 \rangle}{2} = \frac{\kappa(a)}{2},$$

illetve

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\langle \boldsymbol{\delta}(u), \mathbf{b}_3 \rangle}{u^2} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\langle \boldsymbol{\gamma}''(a+u), \mathbf{b}_3 \rangle}{2} = \frac{\langle \boldsymbol{\gamma}''(a), \mathbf{b}_3 \rangle}{2} = \frac{\langle \kappa(a) \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \rangle}{2} = 0.$$

A fenti határértékeket véve a (2.9) összefüggésből azt kapjuk, hogy igaz $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 1$, amiből már következik $\lim_{u \rightarrow 0} g(u) = 0$ és $\lim_{u \rightarrow 0} \mathbf{V}(u) = \mathbf{F}(a)$.

Vegyük észre, hogy amennyiben az $\mathbf{F}(a)$ és $\mathbf{V}(u)$ vektorok $\beta(u)$ szöge nem nagyobb $\pi/2$ -nél, akkor $\beta(u)$ megegyezik az \mathcal{E} egyenest egyaránt tartalmazó \mathcal{S} , $S(u)$ síkok hajlásszögével. A fentiek alapján azonban $\cos \beta(u) = f(u)$ miatt fennáll $\lim_{u \rightarrow 0} \cos \beta(u) = 1$, amiből azt nyerjük, hogy $\lim_{u \rightarrow 0} \beta(u) = 0$. Ez az összefüggés már igazolja az állításunkat. \square

2.22. Definíció Azt a $\boldsymbol{\gamma}(a)$ ponton átmenő síkot, amely párhuzamos a $\boldsymbol{\gamma}'(a)$ és $\boldsymbol{\gamma}''(a)$ vektorokkal, a $\boldsymbol{\gamma}$ görbe a pontbeli simulósíkjának nevezzük.

Megjegyzés A $\boldsymbol{\gamma}$ görbe a pontbeli simulósíkja tehát az a sík, amely illeszkedik a $\boldsymbol{\gamma}(a)$ pontra és merőleges a $\mathbf{B}(a)$ binormális egységvektorra.

Megjegyzés Amennyiben a $\boldsymbol{\gamma}$ görbe görbülete sehol sem tűnik el és a pályája benne van a tér egy \mathcal{S} síkjában, akkor az összes pontban a tartalmazó \mathcal{S} sík képezi a görbe simulósíkját.

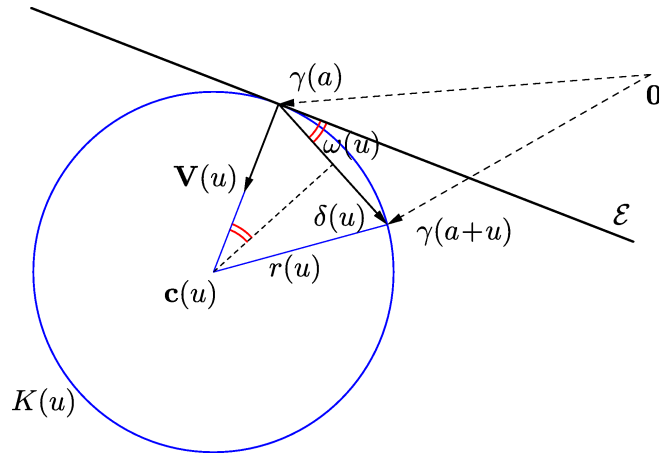
Emlékezzünk rá, hogy K_m ($m \in \mathbb{N}$) azt a kört jelöli, amely átmegy a $\boldsymbol{\gamma}(a)$, $\boldsymbol{\gamma}(s_m)$ pontokon és érinti az \mathcal{E} egyenest. A simulókör fogalma a következő állításon alapul.

2.23. Állítás A K_m körsorozat konvergál ahhoz a körhöz, amelynek síkja az a pontbeli simulósík, sugara $\frac{1}{\kappa(a)}$ és középpontja a $\mathbf{c} = \boldsymbol{\gamma}(a) + \frac{1}{\kappa(a)} \mathbf{F}(a)$ pont.

Bizonyítás. Alkalmazni fogjuk a 2.21. Állítás bizonyítása során bevezetett jelöléseket. Legyen u ($u \neq 0$) a $J_0 = \{s - a \mid s \in J\}$ intervallumnak egy eleme. Jelölje $K(u)$ azt a kört, amely átmegy a $\boldsymbol{\gamma}(a)$, $\boldsymbol{\gamma}(a+u)$ pontokon és amelynek érintője az \mathcal{E} egyenes. (Lásd a 2.7. ábrát.) Világos, hogy ez a $K(u)$ kör benne van az $S(u)$ síkban. Azt már igazoltuk, hogy amennyiben u -val tartunk 0-hoz, akkor az $S(u)$ sík tart a $\boldsymbol{\gamma}$ görbe a helyen vett simulósíkjához, amelyet a $\boldsymbol{\gamma}'(a)$ és $\boldsymbol{\gamma}''(a)$ vektorok feszítenek ki. A $K(u)$ kör sugarát jelölje $r(u)$. Az alábbiak során igazolni fogjuk, hogy fennáll $\lim_{u \rightarrow 0} r(u) = \frac{1}{\kappa(a)}$.

Vegyük a $\boldsymbol{\delta}(u) = \boldsymbol{\gamma}(a+u) - \boldsymbol{\gamma}(a)$ kifejezéssel értelmezett $\boldsymbol{\delta}: J_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést. A $\boldsymbol{\delta}(u)$ és $\mathbf{T}(a)$ vektorok hajlásszöge legyen $\omega(u)$. A kerületi szögek tételét felhasználva

azt kapjuk, hogy $\|\delta(u)\| = 2r(u) \sin \omega(u)$, és ebből az $r(u) = \frac{\|\delta(u)\|}{2 \sin \omega(u)}$ összefüggés adódik.



2.7. ábra. Az $u \in J_0$ ($u \neq 0$) helyhez rendelt $K(u)$ kör.

Ez esetben is alkalmazva a $\mathbf{b}_1 = \mathbf{T}(a)$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{F}(a)$, $\mathbf{b}_3 = \mathbf{B}(a)$ ortonormált bázist és a $\delta(u) = \sum_{i=1}^3 \langle \delta(u), \mathbf{b}_i \rangle \mathbf{b}_i$ egyenlőséget azt kapjuk, hogy igaz

$$\sin^2 \omega(u) = 1 - \cos^2 \omega(u) = 1 - \frac{\langle \delta(u), \mathbf{b}_1 \rangle^2}{\langle \delta(u), \delta(u) \rangle} = \frac{\langle \delta(u), \mathbf{b}_2 \rangle^2 + \langle \delta(u), \mathbf{b}_3 \rangle^2}{\langle \delta(u), \delta(u) \rangle}.$$

Ily módon teljesül

$$r(u) = \frac{1}{2} \frac{\langle \delta(u), \delta(u) \rangle}{\sqrt{\langle \delta(u), \mathbf{b}_2 \rangle^2 + \langle \delta(u), \mathbf{b}_3 \rangle^2}}.$$

Az r sugár-függvény 0 helyen vett határértékének meghatározásához alkalmazzuk a

$$\lim_{u \rightarrow 0} r(u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u^2} \langle \delta(u), \delta(u) \rangle}{\left(\left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u^2} \langle \delta(u), \mathbf{b}_2 \rangle \right)^2 + \left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u^2} \langle \delta(u), \mathbf{b}_3 \rangle \right)^2 \right)^{1/2}}. \quad (2.10)$$

összefüggést. A L'Hospital-szabály alapján belátható, hogy fennáll

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\langle \delta(u), \delta(u) \rangle}{u^2} = 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\langle \delta(u), \mathbf{b}_2 \rangle}{u^2} = \frac{1}{2} \kappa(a), \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\langle \delta(u), \mathbf{b}_3 \rangle}{u^2} = 0.$$

Ezek alapján a (2.10) egyenlőségből következik, hogy igaz $\lim_{u \rightarrow 0} r(u) = \frac{1}{\kappa(a)}$.

Jelölje $\mathbf{c}(u)$ a $K(u)$ kör centrumát. Ha vesszük az előző bizonyításban alkalmazott $\mathbf{V}(u)$ egységvektort, melyet a (2.7) egyenlettel adtunk meg, akkor azzal teljesül

$\mathbf{c}(u) = \boldsymbol{\gamma}(a) + r(u) \mathbf{V}(u)$. Korábban már beláttuk, hogy fennáll $\lim_{u \rightarrow 0} \mathbf{V}(u) = \mathbf{F}(a)$. A fenti összefüggések pedig azt eredményezik, hogy

$$\lim_{u \rightarrow 0} \mathbf{c}(u) = \boldsymbol{\gamma}(a) + \frac{1}{\kappa(a)} \mathbf{F}(a).$$

Ezzel az állítás igazolást nyert. □

2.24. Definíció A $\boldsymbol{\gamma}$ görbe $t \in I$ helyen vett simulóköre az a kört értjük, amelynek síkja a t -beli simulósík, sugara $\frac{1}{\kappa(t)}$ és középpontja a $\mathbf{c} = \boldsymbol{\gamma}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{F}(t)$ pont.

A $t \in I$ pontbeli simulóköre centrumát a $\boldsymbol{\gamma}$ görbe t helyen vett görbületi középpontjának is szokás nevezni.

Az egyszerű görbeív és a zárt görbe értelmezése

Amennyiben vesszük egy $\boldsymbol{\gamma}$ görbe pályáját, akkor azon tekinthetjük az \mathbb{R}^3 tértől örökölt altér-topológiát.

2.25. Definíció Legyen I az \mathbb{R} nyílt vagy zárt intervalluma. A $\boldsymbol{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris sima görbét egyszerűnek mondjuk, ha a $\boldsymbol{\gamma}$ leképezés homeomorfizmus az I intervallum és a $\boldsymbol{\gamma}$ pályája között.

Megjegyzés Legyen adott egy $\boldsymbol{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbe. Ha a $\boldsymbol{\gamma}$ leképezés injektív és az I intervallum zárt, akkor a $\boldsymbol{\gamma}$ görbe egyszerű. Ellenben egy nyílt I intervallumon meg lehet adni olyan $\boldsymbol{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbét, ahol $\boldsymbol{\gamma}$ injektív, de a $\boldsymbol{\gamma}(I)$ pálya nem homeomorf az I -vel.

2.26. Definíció Az \mathbb{R}^3 térbeli \mathcal{G} alakzatot egyszerű görbeívnek mondjuk, ha van olyan $\boldsymbol{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ egyszerű reguláris görbe, amelynek a pályája megegyezik a \mathcal{G} ponthalmazzal.

Ez esetben $\boldsymbol{\gamma}$ -t a \mathcal{G} egyszerű görbeív egyik paraméteres előállításának (vagy paraméterezésének) nevezzük.

Megjegyzés Az ívhossz szerinti paraméterezést alkalmazva belátható, hogy egy \mathcal{G} egyszerű görbeív különböző paraméteres előállításait átparaméterezéssel lehet megkapni egymásból.

Legyen adott az \mathbb{R}^3 euklideszi térben egy \mathcal{G} egyszerű görbeív. Világos, hogy \mathcal{G} tetszőleges pontjában értelmezhető az érintőegyenes és a görbület. Amennyiben a $\mathbf{p} \in \mathcal{G}$ pontban nem tűnik el a görbület, akkor definiálni lehet az egyszerű görbeív \mathbf{p} pontbeli simulósíkját és simulóköreit is. Természetesen értelmezni lehet az egyszerű görbeív egy összefüggő kompakt darabjának az ívhosszát és a teljes görbületét is.

A fent említett geometriai jellemzők analitikus meghatározása oly módon végezhető el, hogy alkalmazzuk az egyszerű görbeív egyik paraméteres előállítását, vagyis az egyik olyan $\boldsymbol{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ egyszerű reguláris görbét, amelynek pályája megegyezik \mathcal{G} -vel.

2.27. Definíció A $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris sima görbét zártnak mondjuk, ha van egy olyan C^∞ -osztályú $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvény, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- (1) Fennáll a $\hat{\gamma}|_{[a, b]} = \gamma$ összefüggés.
- (2) Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén teljesül $\hat{\gamma}(t) = \hat{\gamma}(t + (b - a))$.

A γ görbe zártsága tehát a $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ végpontok egybeesésén túl azt is jelenti, hogy a γ leképezés kiterjeszthető egy olyan az \mathbb{R} számegegyenesen értelmezett C^∞ -osztályú $\hat{\gamma}$ leképezésre, amely periodikus és amelynek a $b - a$ szám az egyik periódusa.

A zárt görbék körében is bevezethető az egyszerűség fogalma. Az alábbi definíció szerint az egyszerű zárt görbék pályája homeomorf a körvonallal.

2.28. Definíció A $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ zárt görbét egyszerűnek nevezzük, ha a $\gamma|_{[a, b]}$ leszűkített leképezés injektív.

2.3. Valódi sima görbék

A valódi görbe kísérő Frenet-bázisa és torziója

2.29. Definíció A $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris sima görbét valódinak mondjuk, ha tetszőleges $t \in I$ pontban a $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$ vektorok lineárisan függetlenek.

Megjegyzés A (2.4) összefüggés szerint a γ görbe pontosan akkor valódi, ha a κ görbületi függvénye sehol sem tűnik el, azaz teljesül $\kappa(t) > 0$ bármely $t \in I$ -re.

Pongyolán fogalmazva, a 2.13. Állítás következtében a görbe akkor valódi, ha egyik pontjában sem egyenesedik ki.

Megjegyzés A nem eltűnő görbületű reguláris görbéket szokás az \mathbb{R}^3 euklideszi tér általános típusú görbéinek is nevezni.

A továbbiakban feltesszük, hogy a vizsgált $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe valódi. Ekkor az előző alfejezetben leírtaknak megfelelően tetszőleges t helyen vehetjük a $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ egységvektorokat. Ezek az \mathbb{R}^3 vektortérnek egy olyan ortonormált bázisát képezik, amely a tér természetes irányítását reprezentálja. Amennyiben alkalmazzuk a $\mathbf{B}_1(t) = \mathbf{T}(t)$, $\mathbf{B}_2(t) = \mathbf{F}(t)$, $\mathbf{B}_3(t) = \mathbf{B}(t)$ jelölést, akkor az \mathbb{R}^3 bármely \mathbf{w} vektorára fennáll

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^3 \langle \mathbf{w}, \mathbf{B}_i(t) \rangle \mathbf{B}_i(t). \quad (2.11)$$

Tekintsük a C^∞ -osztályú \mathbf{T} , \mathbf{F} , $\mathbf{B} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezéseket a γ mentén vett vektormezőknek.

2.30. Definíció A γ valódi görbe mentén vett \mathbf{T} , \mathbf{F} , \mathbf{B} vektormezők hármását a γ kísérő Frenet-bázisának nevezzük.

2.31. Definíció A $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi sima görbe $t \in I$ helyen vett torzióján a $\tau(t) = -\frac{1}{v(t)} \langle \mathbf{B}'(t), \mathbf{F}(t) \rangle$ számot értjük. Az így nyert $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvényt a γ torziófüggvényének nevezzük.

A Frenet-formulák

2.32. Állítás Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbe. Tetszőleges $t \in I$ esetén fennáll $\mathbf{B}'(t) = -v(t)\tau(t)\mathbf{F}(t)$.

Bizonyítás. Az 1.24. Következmény miatt igaz a $\langle \mathbf{B}'(t), \mathbf{B}(t) \rangle = 0$ egyenlőség. Tekintsük az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, ahol $f(t) = \langle \mathbf{B}(t), \mathbf{T}(t) \rangle = 0$. Ezt deriválva adódik, hogy teljesül

$$\langle \mathbf{B}'(t), \mathbf{T}(t) \rangle + \langle \mathbf{B}(t), \mathbf{T}'(t) \rangle = 0.$$

A $\mathbf{T}'(t) = v(t)\kappa(t)\mathbf{F}(t)$ összefüggést felhasználva a fenti egyenletből következik, hogy $\langle \mathbf{B}'(t), \mathbf{T}(t) \rangle = 0$. Amennyiben alkalmazzuk a (2.11) kifejezést a $\mathbf{B}'(t)$ vektorra, akkor a fenti összefüggések és a 2.31. Definíció alapján azt nyerjük, hogy igaz

$$\mathbf{B}'(t) = \langle \mathbf{B}'(t), \mathbf{F}(t) \rangle \mathbf{F}(t) = -v(t)\tau(t)\mathbf{F}(t). \quad \square$$

A következő tétel szerint a γ görbe kísérő Frenet bázisának deriváltjai kifejezhetőek a görbület és a torzió segítségével.

2.33. Tétel A $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbéhez rendelt kísérő Frenet-bázis vektormezőinek deriváltjaira teljesülnek a

$$\mathbf{T}' = v\kappa\mathbf{F}, \quad \mathbf{F}' = -v\kappa\mathbf{T} + v\tau\mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = -v\tau\mathbf{F} \quad (2.12)$$

egyenlőségek.

Bizonyítás. A tételben szereplő első összefüggés a (2.5) egyenletnek felel meg, a harmadik pedig a 2.32. Állításból következik. Emiatt csak a második egyenlőséget kell belátnunk. Mivel tetszőleges $t \in I$ esetén a $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ ortonormált bázis egy jobbrendszert képez, így fennáll $\mathbf{F}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t)$. Alkalmazva a szorzatfüggvény deriváltjára vonatkozó összefüggést azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'(t) &= \mathbf{B}'(t) \times \mathbf{T}(t) + \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}'(t) \\ &= -v(t)\tau(t)\mathbf{F}(t) \times \mathbf{T}(t) + v(t)\kappa(t)\mathbf{B}(t) \times \mathbf{F}(t) \\ &= v(t)\tau(t)\mathbf{B}(t) - v(t)\kappa(t)\mathbf{T}(t). \end{aligned} \quad \square$$

A 2.33. Tételben szereplő (2.12) összefüggéseket Frenet-formuláknak nevezzük.

Amennyiben egy görbe pályája benne van az \mathbb{R}^3 tér egy síkjában, akkor azt síkgörbének mondjuk. A síkgörbét jellemzi a következő állítás.

2.34. Állítás A $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbe pályája benne van egy síkban akkor és csak akkor, ha a torzió-függvénye eltűnik.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a γ görbe $\gamma(I)$ pályája benne van az \mathbb{R}^3 tér egy \mathcal{S} síkjában. Ekkor a γ simulósíkja bármely $t \in I$ pontban a tartalmazó \mathcal{S} sík. Mivel a binormális merőleges a simulósíkra, a \mathbf{B} leképezés konstans. Ily módon a deriváltjára fennáll $\mathbf{B}' = \mathbf{0}$, amiből már adódik, hogy $\tau = 0$.

Tekintsük most azt az esetet, amikor fennáll $\tau = 0$. A harmadik Frenet-formula szerint $\mathbf{B}'(t) = \mathbf{0}$ teljesül. Ennek következtében a \mathbf{B} binormális vektormező állandó. Legyen \mathbf{b} az az egységvektor, amelyre igaz $\mathbf{B}(t) = \mathbf{b}$. Rögzítsünk egy $t_0 \in I$ értéket, majd vegyük azt az \mathcal{S} síkot, amely átmegy a $\gamma(t_0)$ ponton és merőleges \mathbf{b} -re. Legyen $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre fennáll $h(t) = \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), \mathbf{b} \rangle$. Vegyük észre, hogy $|h(t)|$ megegyezik a $\gamma(t)$ pontnak az \mathcal{S} síktól mért távolságával. A $h(t_0) = 0$ és $h'(t) = \langle \gamma'(t), \mathbf{b} \rangle = \langle v(t) \mathbf{T}(t), \mathbf{B}(t) \rangle = 0$ összefüggésekből következik, hogy $h = 0$. Ez pedig azt jelenti, hogy az \mathcal{S} sík tartalmazza a $\gamma(I)$ pályát. \square

Egy γ valódi görbe torzióját nemcsak a definiáló képlet alapján, hanem a γ első három deriváltjából is ki lehet számítani.

2.35. Állítás A $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbe torziójának $t \in I$ pontbeli értékére fennáll

$$\tau(t) = \frac{\langle \gamma'(t) \times \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}. \quad (2.13)$$

Bizonyítás. Fejezzük ki a deriváltakat a kísérő Frenet-bázis vektoraival. A Frenet-formulák alkalmazásával a

$$\begin{aligned} \gamma' &= v \mathbf{T}, & \gamma'' &= v' \mathbf{T} + v^2 \kappa \mathbf{F}, \\ \gamma''' &= (v'' - v^3 \kappa^2) \mathbf{T} + (v' v \kappa + (v^2 \kappa)') \mathbf{F} + v^3 \kappa \tau \mathbf{B} \end{aligned}$$

összefüggéseket nyerjük. Könnyű belátni, hogy az első két derivált vektoriális szorzatára fennáll $\gamma' \times \gamma'' = v^3 \kappa \mathbf{B}$. Innen azt kapjuk, hogy

$$\langle \gamma' \times \gamma'', \gamma''' \rangle = v^6 \kappa^2 \tau.$$

A (2.4) egyenlőség szerint igaz $v^3 \kappa = \|\gamma' \times \gamma''\|$. Ily módon a fenti összefüggésből már következik, hogy teljesül $\tau = \frac{\langle \gamma' \times \gamma'', \gamma''' \rangle}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}$. \square

A torzió invariáns jellege

Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi sima görbe. Vegyük a γ görbe egy $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ átparaméterezését. A (2.3a) és (2.3b) összefüggésekből azonnal adódik, hogy a $\tilde{\gamma}$ görbe is valódi.

Ez esetben is alkalmazzuk az $\varepsilon = \frac{\varphi'(u)}{|\varphi'(u)|}$ ($u \in J$) jelölést. Világos, hogy a $\tilde{\gamma}$ görbe érintő egységvektormezőjére igaz $\tilde{\mathbf{T}} = \varepsilon \cdot (\mathbf{T} \circ \varphi)$. Ennek következtében azt kapjuk, hogy a $\tilde{\mathbf{T}}'(u) = \varepsilon \varphi'(u) \mathbf{T}'(\varphi(u))$ és $\mathbf{T}'(\varphi(u))$ vektorok iránya mindig megegyezik, tehát a főnormális egységvektormezőkre fennáll $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \circ \varphi$. Innen azt nyerjük, hogy a binormális egységvektormezővel teljesül $\tilde{\mathbf{B}} = \varepsilon \cdot (\mathbf{B} \circ \varphi)$. Ebből már adódik, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(u) &= -\frac{1}{\tilde{v}(u)} \langle \tilde{\mathbf{B}}'(u), \tilde{\mathbf{F}}(u) \rangle. \\ &= -\frac{1}{|\varphi'(u)| \cdot v(\varphi(u))} \langle \varepsilon \varphi'(u) \mathbf{B}'(\varphi(u)), \mathbf{F}(\varphi(u)) \rangle = \tau(\varphi(u)) \end{aligned}$$

Eszerint igaz az alábbi kijelentés.

2.36. Következmény *A γ átparaméterezésével nyert $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ reguláris görbe torziófüggvényére fennáll $\tilde{\tau} = \tau \circ \varphi$.*

Vegyünk most egy $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ izometriát, melyet az (1.2) egyenlet ír le. Tekintsük γ -nak a Ψ szerinti képét, vagyis a $\hat{\gamma} = \Psi \circ \gamma$ valódi görbét.

Az 1.25. Állítás szerint fennáll $\hat{\gamma}' = \Phi \circ \gamma'$, ahol Φ a Ψ -nek megfelelő lineáris izomorfizmus az \mathbb{R}^3 vektortéren, amely megőrzi a skaláris szorzatot. Legyen $\varepsilon = 1$, ha a Ψ izometria irányítástartó, illetve legyen $\varepsilon = -1$ irányításváltás esetén. Könnyű belátni, hogy a kísérő Frenet-bázisokra teljesül $\hat{\mathbf{T}} = \Phi \circ \mathbf{T}$, $\hat{\mathbf{F}} = \Phi \circ \mathbf{F}$ és $\hat{\mathbf{B}} = \varepsilon \cdot (\Phi \circ \mathbf{B})$. Ennek következtében azt nyerjük, hogy a $\hat{\gamma}$, γ görbék torziófüggvényire igaz $\hat{\tau}(t) = \varepsilon \cdot \tau(t)$, $t \in I$. Eszerint irányításváltó izometria esetén a torzió előjelet vált.

A torzió geometriai jelentése

Tekintsünk egy ívhossz szerint paraméterezett $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbét. Ez esetben a torzió $s \in I$ helyen vett értékére igaz $\tau(s) = -\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{F}(s) \rangle$ és $|\tau(s)| = \|\mathbf{B}'(s)\|$.

Rögzítsünk egy $s_0 \in I$ paraméterértéket. Vegyük a $J = \{s - s_0 \mid s \in I\}$ intervallumot, továbbá azt a $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelynél a $\beta(u)$ ($u \in J$) függvényérték megegyezik a $\mathbf{B}(s_0)$, $\mathbf{B}(s_0 + u)$ binormális egységvektorok hajlásszögével. Fontos megjegyezni, hogy amennyiben igaz $\beta(u) \leq \pi/2$, akkor $\beta(u)$ éppen a γ görbe s_0 és $s_0 + u$ helyeken vett simulósíkainak a hajlásszöge. Eszerint β a simulósík irányváltozását méri az s_0 -beli simulósíkhhoz képest.

A 2.17. Állítás bizonyítását véve mintának könnyen igazolható az alábbi kijelentés.

2.37. Állítás *A β függvényrel teljesül a $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\beta(u)}{|u|} = |\tau(s_0)|$ összefüggés.*

Megjegyzés Az előbbi állítás szerint a $|\tau(s_0)|$ érték nem más, mint a simulósík ívhossz szerinti irányváltozási sebessége az s_0 helyen. Emiatt a torziót szokás a görbe csavarodásának is nevezni.

Megjegyzés A (2.13) összefüggés arra mutat rá, hogy a $\tau(t)$ torzió előjele abban az esetben pozitív (illetve negatív), ha a $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$, $\gamma'''(t)$ vektorhármass egy jobbrendszer (illetve egy balrendszer) képez az \mathbb{R}^3 térben.

Megjegyzés A 2.16. Definíció analógiájára értelmezhető a görbeszegmens teljes torziója (vagy más szóval a teljes csavarodása). Vegyünk egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi sima görbét és egy $[a, b] \subset I$ zárt intervallumot. A $\gamma|[a, b]$ görbedarab teljes torzióján a $\tau(\gamma|[a, b]) = \int_a^b \tau(t) v(t) dt$ számot értjük.

A 2.36. Következmény alapján könnyen igazolható, hogy a görbeszegmens teljes torziója a görbe átparaméterezésével szemben invariáns.

A görbeelmélet alaptétele

A továbbiakban a γ valódi görbe kísérő Frenet-bázisát alkotó vektormezőkre a $\mathbf{B}_1 = \mathbf{T}$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{F}$ és $\mathbf{B}_3 = \mathbf{B}$ jelölést fogjuk alkalmazni.

Az alábbi állítás azt mondja ki, hogy a görbületi függvény és a torzió-függvény izometria (azaz egybevágóság) erejéig már meghatározzák a görbét.

2.38. Állítás *Legyenek adva az ívhossz szerint paraméterezett $\gamma, \tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbék. Amennyiben a $\gamma, \tilde{\gamma}$ görbéknek ugyanaz a görbületi függvénye és a torzió-függvénye, akkor egyértelműen létezik egy olyan $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ irányítástartó izometria, amellyel fennáll $\Psi \circ \gamma = \tilde{\gamma}$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az adott $\gamma, \tilde{\gamma}$ görbék $\kappa, \tilde{\kappa}$ görbületi függvényére és $\tau, \tilde{\tau}$ torzió-függvényére igaz $\kappa = \tilde{\kappa}$, $\tau = \tilde{\tau}$.

Rögzítsünk egy $s_0 \in I$ értéket. Ezen az s_0 helyen vegyük a $\gamma, \tilde{\gamma}$ görbék Frenet-bázisait. Világos, hogy egyértelműen létezik egy olyan $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris izomorfizmus, amely a γ görbe Frenet-bázisát a $\tilde{\gamma}$ görbe Frenet-bázisába viszi, vagyis amelyre teljesül $\Phi(\mathbf{B}_i(s_0)) = \tilde{\mathbf{B}}_i(s_0)$ ($i = 1, 2, 3$). Mivel mindkét bázis ortonormált, a Φ leképezés ortogonális, azaz megőrzi a vektorok skaláris szorzatát. Tekintsük most a $\mathbf{q} = \tilde{\gamma}(s_0) - \Phi(\gamma(s_0))$ vektort, továbbá azt a $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ irányítástartó izometriát, amelyet a $\Psi(\mathbf{p}) = \Phi(\mathbf{p}) + \mathbf{q}$ egyenlet ír le tetszőleges $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ pont esetén.

Vegyük γ -nak a Ψ izometria szerinti $\hat{\gamma} = \Psi \circ \gamma$ képgörbét. Azt akarjuk belátni, hogy igaz $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma}$.

A Ψ izometria konstrukciója alapján az s_0 helyen fennáll $\hat{\gamma}(s_0) = \tilde{\gamma}(s_0)$ és $\hat{\mathbf{B}}_i(s_0) = \tilde{\mathbf{B}}_i(s_0)$ ($i = 1, 2, 3$), vagyis a görbék Frenet-bázisai is egybeesnek. A $\hat{\gamma}, \tilde{\gamma}$ görbék ívhossz szerint vannak paraméterezve, továbbá azonos a görbületi függvényük és a torzió-függvényük. Ily módon a Frenet-formulák alapján a κ, τ függvényekkel igazak a

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}_1' &= \kappa \hat{\mathbf{B}}_2, & \hat{\mathbf{B}}_2' &= -\kappa \hat{\mathbf{B}}_1 + \tau \hat{\mathbf{B}}_3, & \hat{\mathbf{B}}_3' &= -\tau \hat{\mathbf{B}}_2 & \text{és} \\ \tilde{\mathbf{B}}_1' &= \kappa \tilde{\mathbf{B}}_2, & \tilde{\mathbf{B}}_2' &= -\kappa \tilde{\mathbf{B}}_1 + \tau \tilde{\mathbf{B}}_3, & \tilde{\mathbf{B}}_3' &= -\tau \tilde{\mathbf{B}}_2 \end{aligned}$$

összefüggések. Legyen $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre tetszőleges $s \in I$ helyen fennáll

$$h(s) = \sum_{i=1}^3 \langle \hat{\mathbf{B}}_i(s), \tilde{\mathbf{B}}_i(s) \rangle. \quad (2.14)$$

Vegyük észre, hogy igaz $h(s_0) = 3$.

Alkalmazva az 1.23. Állítást és az előbbi összefüggéseket azt nyerjük, hogy a h' függvényre teljesül

$$\begin{aligned} h' &= \langle \kappa \hat{\mathbf{B}}_2, \tilde{\mathbf{B}}_1 \rangle + \langle \hat{\mathbf{B}}_1, \kappa \tilde{\mathbf{B}}_2 \rangle + \langle \tau \hat{\mathbf{B}}_3 - \kappa \hat{\mathbf{B}}_1, \tilde{\mathbf{B}}_2 \rangle + \langle \hat{\mathbf{B}}_2, \tau \tilde{\mathbf{B}}_3 - \kappa \tilde{\mathbf{B}}_1 \rangle \\ &\quad - \langle \tau \hat{\mathbf{B}}_2, \tilde{\mathbf{B}}_3 \rangle - \langle \hat{\mathbf{B}}_3, \tau \tilde{\mathbf{B}}_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

A h' függvény eltűnéséből adódik, hogy tetszőleges $s \in I$ esetén teljesül $h(s) = 3$. Ebből pedig következik, hogy fennáll $\hat{\mathbf{B}}_i = \tilde{\mathbf{B}}_i$ ($i = 1, 2, 3$).

A fentiek szerint bármely $s \in I$ helyen teljesül $\hat{\mathbf{T}}(s) = \tilde{\mathbf{T}}(s)$, vagyis $\hat{\gamma}'(s) = \tilde{\gamma}'(s)$. Emellett, mint korábbról ismeretes, igaz a $\hat{\gamma}(s_0) = \tilde{\gamma}(s_0)$ egyenlőség is. Ezek alapján már könnyű belátni, hogy fennáll $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma}$, amit bizonyítani akartunk.

Az pedig az eddigi ismeretek alapján már nyilvánvaló, hogy Ψ az egyetlen olyan irányítástartó izometria, amely a γ görbét a $\tilde{\gamma}$ görbébe képezi. \square

A következő kijelentést a görbeelmélet alaptételének szokás nevezni.

2.39. Tétel Egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon legyenek adva a C^∞ -osztályú $k_1, k_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvények. Amennyiben $k_1 > 0$ teljesül, akkor irányítástartó izometria erejéig pontosan egy olyan ívhossz szerint paraméterezett $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbe létezik, amelynek k_1 a görbületi függvénye és k_2 a torzió-függvénye.

Bizonyítás. A 2.38. Állítás következtében már csak a γ görbe létezését kell igazolnunk. Ehhez az $y_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, 9$) függvényekre írjuk fel az

$$\begin{aligned} y'_i(t) &= k_1(t) y_{i+3}(t), \\ y'_{i+3}(t) &= -k_1(t) y_i(t) + k_2(t) y_{i+6}(t), \\ y'_{i+6}(t) &= -k_2(t) y_{i+3}(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

($i = 1, 2, 3$) lineáris differenciálegyenlet-rendszert. Rögzítsünk egy $t_0 \in I$ értéket. Az y_j ($j = 1, \dots, 9$) függvényekre a t_0 helyen adjuk most meg az

$$y_i(t_0) = \delta_{i1}, \quad y_{i+3}(t_0) = \delta_{i2}, \quad y_{i+6}(t_0) = \delta_{i3}$$

($i = 1, 2, 3$) kezdeti feltételeket a jól ismert Kronecker-szimbólumokkal.

A differenciálegyenletek elméletéből ismeretes, hogy ezen kezdeti feltételek mellett, egyértelműen létezik megoldás. Vegyük észre, hogy az egyenletrendszert megoldó y_j függvények ($j = 1, \dots, 9$) C^∞ -osztályúak. Tekintsük most az $x_i(t) = \int_{t_0}^t y_i(u) du$ formulával

meghatározott $x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$) függvényeket, továbbá azt a $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima görbét, amelyet a $\gamma(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \mathbf{e}_i$ kifejezés ír le.

A γ görbe mentén vegyük azon $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormezőket, melyekre teljesül $\mathbf{Z}_1(t) = \sum_{i=1}^3 y_i(t) \mathbf{e}_i$, $\mathbf{Z}_2(t) = \sum_{i=1}^3 y_{i+3}(t) \mathbf{e}_i$ és $\mathbf{Z}_3(t) = \sum_{i=1}^3 y_{i+6}(t) \mathbf{e}_i$. A fentiek alapján fennáll $\gamma' = \mathbf{Z}_1$. Világos, hogy a (2.15) egyenletek következtében a vektormezőkre teljesülnek a

$$\mathbf{Z}'_1 = k_1 \mathbf{Z}_2, \quad \mathbf{Z}'_2 = -k_1 \mathbf{Z}_1 + k_2 \mathbf{Z}_3, \quad \mathbf{Z}'_3 = -k_2 \mathbf{Z}_2 \quad (2.16)$$

összefüggések, és a kezdetiérték-feltételek miatt igaz $\mathbf{Z}_i(t_0) = \mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$). Vegyük most a $h_r : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($r = 1, \dots, 6$) függvényeket, melyeknél tetszőleges $t \in I$ esetén fennáll $h_i(t) = \langle \mathbf{Z}_i(t), \mathbf{Z}_i(t) \rangle$ ($i = 1, 2, 3$) és $h_4(t) = \langle \mathbf{Z}_1(t), \mathbf{Z}_2(t) \rangle$, $h_5(t) = \langle \mathbf{Z}_1(t), \mathbf{Z}_3(t) \rangle$, $h_6(t) = \langle \mathbf{Z}_2(t), \mathbf{Z}_3(t) \rangle$. Az (1.5) és (2.16) egyenletek alapján ezek deriváltjaira teljesülnek a

$$\begin{aligned} h'_1 &= 2k_1 h_4, & h'_2 &= -k_1 h_4 + k_2 h_6, \\ h'_3 &= -2k_2 h_6, & h'_4 &= -k_1 h_1 + k_1 h_2 + k_2 h_5, \\ h'_5 &= -k_2 h_4 + k_1 h_6, & h'_6 &= -k_2 h_2 + k_2 h_3 - k_1 h_5 \end{aligned}$$

összefüggések. Amennyiben a fenti egyenleteket a $h_r : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre vonatkozó lineáris differenciálegyenletrendszernek tekintjük a $h_i(t_0) = 1$, $h_{i+3}(t_0) = 0$ ($i = 1, 2, 3$) kezdeti feltételekkel, akkor az egyetelműen létező megoldást a $h_i = 1$, $h_{i+3} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) konstans függvények adják. Ennek következtében a $\mathbf{Z}_1(t)$, $\mathbf{Z}_2(t)$, $\mathbf{Z}_3(t)$ vektorok egy olyan ortonormált bázist adnak tetszőleges $t \in I$ mellett, amely az \mathbb{R}^3 tér irányítását képviseli.

A $\gamma' = \mathbf{Z}_1$ egyenlőségből adódik, hogy fennáll $\|\gamma'\| = 1$, vagyis a γ görbe ívhossz szerint paraméterezett. A $\gamma'' = \mathbf{Z}'_1 = k_1 \mathbf{Z}_2$ egyenlőség miatt \mathbf{Z}_2 azonos a γ főnormális vektormezőjével, továbbá a γ görbületi függvényére igaz $\kappa = \|\gamma''\| = k_1$. Végül a $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_1 \times \mathbf{Z}_2$ összefüggés következtében \mathbf{Z}_3 azonos a γ binormális egységvektormezőjével. Ily módon a γ torzió-függvényére fennáll $\tau = -\langle \mathbf{Z}'_3, \mathbf{Z}_2 \rangle = k_2$.

Ezzel beláttuk, hogy van olyan $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe, amelynek az adott k_1 pozitív függvény a görbülete és k_2 a torziója. \square

Parallel normális vektormezők a görbe mentén

Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbe. A γ mentén vett $\mathbf{Y} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima vektormezőt normálisnak mondjuk, ha fennáll $\langle \mathbf{Y}(t), \mathbf{T}(t) \rangle = 0$ bármely $t \in I$ esetén.

2.40. Definíció A γ menti \mathbf{Y} normális vektormezőt párhuzamosnak nevezzük, ha teljesül $\mathbf{Y}'(t) - \langle \mathbf{Y}'(t), \mathbf{T}(t) \rangle \mathbf{T}(t) = \mathbf{0}$ tetszőleges $t \in I$ -re.

A fenti definíció alapján az \mathbf{Y} normális vektormező akkor párhuzamos, ha bármely $t \in I$ mellett az $\mathbf{Y}'(t)$ derivált vektor párhuzamos a γ görbe t helyen vett érintőjével.

Könnyű belátni, hogy ha \mathbf{Y} és \mathbf{Z} párhuzamos normális vektormezők a γ mentén, akkor az $\mathbf{Y} + \mathbf{Z}$ összeg is az, továbbá az $f(t) = \langle \mathbf{Y}(t), \mathbf{Z}(t) \rangle$ kifejezéssel értelmezett $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény konstans. Amennyiben veszünk egy λ számot és egy \mathbf{Y} párhuzamos mezőt, akkor a $\lambda \mathbf{Y}$ normális vektormező szintén párhuzamos.

Tekintsünk egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbét. A (2.12) Frenet-formulákból azonnal adódik, hogy az \mathbf{F} főnormális és \mathbf{B} binormális egységvektormezők akkor párhuzamosak γ mentén, ha a τ torzió eltűnik, vagyis ha γ egy síkgörbe. Az alábbi állítás azt is megadja, hogy a párhuzamos normális vektormező milyen sebességgel forog a normálsíkban a kísérő Frenet-bázis mezőjéhez viszonyítva.

2.41. Állítás Legyen adott egy C^∞ -osztályú $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Tekintsük az

$$\mathbf{Y}(t) = \cos \alpha(t) \mathbf{F}(t) + \sin \alpha(t) \mathbf{B}(t)$$

egyenlettel leírt \mathbf{Y} egységvektormezőt a γ görbe mentén. Az \mathbf{Y} normális vektormező párhuzamos akkor és csak akkor, ha tetszőleges $t \in I$ -re teljesül

$$\alpha'(t) + v(t) \tau(t) = 0.$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy \mathbf{Y} normális mező pontosan akkor párhuzamos, ha fennáll $\langle \mathbf{Y}'(t), \mathbf{F}(t) \rangle = 0$ és $\langle \mathbf{Y}'(t), \mathbf{B}(t) \rangle = 0$ bármely $t \in I$ -re. A Frenet-formulák alkalmazásával a következő összefüggést nyerjük

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}'(t) &= -\cos \alpha(t) v(t) \kappa(t) \mathbf{T}(t) \\ &\quad + (\alpha'(t) + v(t) \tau(t)) (\cos \alpha(t) \mathbf{B}(t) - \sin \alpha(t) \mathbf{F}(t)). \end{aligned}$$

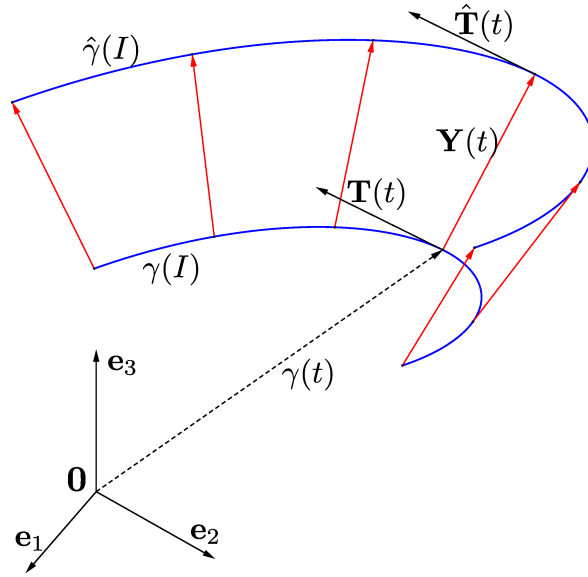
Ez pedig igazolja a fenti állítást. □

Eddigi ismereteink alapján már könnyen igazolható az alábbi kijelentés.

2.42. Állítás Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbe. Vegyünk egy $t_0 \in I$ helyet és egy \mathbf{w} vektort, amelyre igaz $\langle \mathbf{w}, \gamma'(t_0) \rangle = 0$. Ekkor egyértelműen létezik a γ mentén egy olyan \mathbf{Y} párhuzamos normális vektormező, amelyre fennáll $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{w}$.

A térgörbe parallel görbéi

2.43. Definíció Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbe és egy $\mathbf{Y} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ párhuzamos normális vektormező γ mentén. A $\hat{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima görbét, ahol $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t) + \mathbf{Y}(t)$, a γ egyik parallel görbéjének mondjuk.



2.8. ábra. A γ valódi görbe \mathbf{Y} vektormezővel meghatározott $\hat{\gamma}$ parallel görbéje.

Tekintsünk egy \mathbf{Y} párhuzamos normális vektormezőt a γ görbe mentén. Mivel $\mathbf{Y}'(t)$ párhuzamos a $\mathbf{T}(t)$ érintő egységvektorral, az

$$\mathbf{Y}(t) = \langle \mathbf{Y}(t), \mathbf{F}(t) \rangle \mathbf{F}(t) + \langle \mathbf{Y}(t), \mathbf{B}(t) \rangle \mathbf{B}(t)$$

kifejezést deriválva a Frenet-formulákból azt kapjuk, hogy igaz

$$\mathbf{Y}'(t) = -v(t) \kappa(t) \langle \mathbf{Y}(t), \mathbf{F}(t) \rangle \mathbf{T}(t).$$

Vegyük most a $\hat{\gamma} = \gamma + \mathbf{Y}$ görbét. A fentiek alapján teljesül a

$$\hat{\gamma}'(t) = v(t) (1 - \kappa(t) \langle \mathbf{Y}(t), \mathbf{F}(t) \rangle) \mathbf{T}(t)$$

egyenlőség. Eszerint, ha igaz $\kappa(t) \langle \mathbf{Y}(t), \mathbf{F}(t) \rangle \neq 1$ bármely $t \in I$ esetén, akkor $\hat{\gamma}$ görbe reguláris, továbbá az érintő egységvektormezőjére fennáll $\hat{\mathbf{T}} = \pm \mathbf{T}$. Innen viszont már következik, hogy a kísérő Frenet-bázisok további vektormezőire teljesül $\hat{\mathbf{F}} = \pm \mathbf{F}$ és $\hat{\mathbf{B}} = \pm \mathbf{B}$.

A parallel görbe elnevezést tehát az indokolja, hogy tetszőleges $t \in I$ helyet véve a γ és $\hat{\gamma}$ görbék érintői párhuzamosak egymással.

Végül megjegyezzük, hogy közvetlen számolással a

$$\hat{\kappa}(t) = \frac{\kappa(t)}{|1 - \kappa(t) \langle \mathbf{Y}(t), \mathbf{F}(t) \rangle|}, \quad \hat{\tau}(t) = \frac{\tau(t)}{1 - \kappa(t) \langle \mathbf{Y}(t), \mathbf{F}(t) \rangle}$$

kifejezéseket kapjuk a $\hat{\gamma}$ parallel görbe görbületére és torziójára.

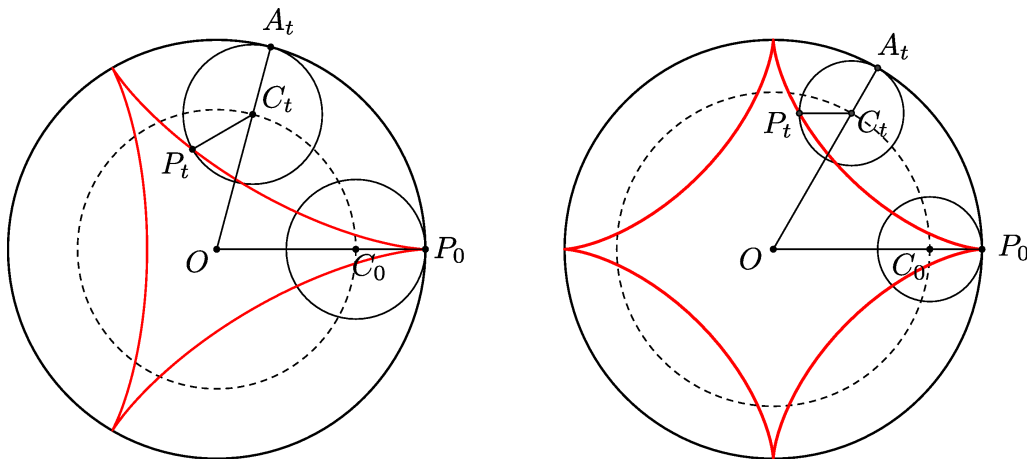
2.4. Példák, feladatok

2.4.1. Hipocikloisok és epicikloisok

Elsőként olyan görbéket írunk le, amelyeket egy körnek egy másik körön való legördítésével nyerünk, és emiatt mechanikai szempontból is fontosak.

A továbbiakban a pontokat majd latin nagybetűkkel is jelöljük. Az \mathbb{R}^3 térben tekintsük az $x_3 = 0$ egyenletű síkot. Ebben a síkban legyen adva az O centrumú és R sugarú álló kör. Vegyünk egy olyan C középpontú, r ($r < R$) sugarú kört, amely belülről érinti az R sugarú kört, és annak kerületén egy P pontot. Ezt a P -t tekintsük egy olyan pontnak, amely a kisebb sugarú körvonalhoz van rögzítve. Gördítsük le csúszásmentesen a kisebb sugarú kört a nagyobb sugarú körön, annak belsejében. A P pont által a legördítés során leírt pályát *csúcsos hipocikloisnak* nevezzük. Egy olyan γ görbét keresünk, amelynek pályája azonos ezzel a hipocikloissal.

A kiindulási helyzetet úgy állítsuk be, hogy az O origóból a két kör P_0 érintkezési pontjába mutató $\overrightarrow{OP_0}$ vektor legyen egyirányú az \mathbf{e}_1 alapvektorral. Válasszuk t paraméternek az álló körön legördült ív középponti szögét, melyet radiánban mérünk. Amennyiben a két körön Rt hosszúságú ív gördült le, akkor a P pont helyét jelölje P_t , a két kör pillanatnyi érintkezési pontját jelölje A_t és a kisebb sugarú kör centrumának pozíciója legyen C_t . (Lásd a 2.9. ábrát.) Az alábbiak során a $\gamma(t) = \overrightarrow{OP_t}$ vektort fogjuk kifejezni az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ alapvektorok lineáris kombinációjaként.



2.9. ábra. Csúcsos hipocikloisok az $R/r = 3$ és $R/r = 4$ arányokkal.

Mint azt már említettük, a görbét az álló körön legördült ív $t = P_0OA_t \sphericalangle$ középponti szögével paraméterezzük. Jelölje u a mozgó körön legördült ív $A_tC_tP_t \sphericalangle$ középponti

szögét. Mivel a két körív hossza megegyezik, fennáll $Rt = ru$, és ebből az $u = \frac{R}{r}t$ összefüggés következik.

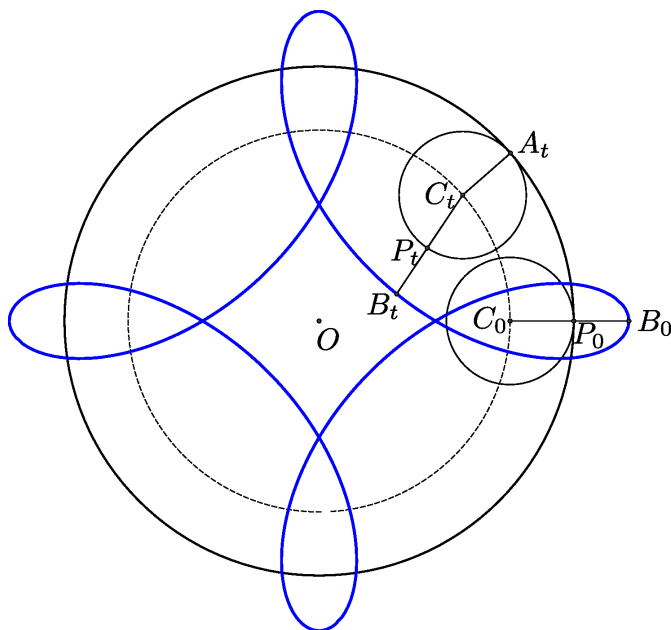
Könnyű belátni, hogy az $\overrightarrow{OC_t}$ vektor egyirányú az \mathbf{e}_1 alapvektor t szögű elforgatottjával és $c = R - r$ az $\overrightarrow{OC_t}$ vektor hossza. Ily módon fennáll $\overrightarrow{OC_t} = c(\cos t \mathbf{e}_1 + \sin t \mathbf{e}_2)$.

A $\overrightarrow{C_tP_t}$ vektor irányát úgy kapjuk meg, hogy előbb az \mathbf{e}_1 vektort elforgatjuk pozitív irányban t szöggel, majd pedig a negatív irányban az u szöggel. A két forgatás szorzata megegyezik a $t - u$ előjeles szöggel történő elforgatással. Ebből már adódik, hogy $\overrightarrow{C_tP_t} = r \cos(t - u) \mathbf{e}_1 + r \sin(t - u) \mathbf{e}_2$ teljesül. A $\gamma(t) = \overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{OC_t} + \overrightarrow{C_tP_t}$ kifejezésből az alábbi összefüggést nyerjük

$$\gamma(t) = \left(c \cos t + r \cos\left(\left(1 - \frac{R}{r}\right)t\right)\right) \mathbf{e}_1 + \left(c \sin t + r \sin\left(\left(1 - \frac{R}{r}\right)t\right)\right) \mathbf{e}_2.$$

Világos, hogy ez a γ sima görbe abban az esetben lesz zárt, amikor az R/r hányados racionális szám.

Végül megjegyezzük, hogy a csúcsos hipocikloist asztroidnak (vagy más szóval csillag-görbének) nevezik, ha a körök sugaraira fennáll $R/r = 4$.



2.10. ábra. Hurkolt hipociklois az $R/r = 4$ aránnyal.

Az előbbi eljárás alapján további pályákat is értelmezni lehet az $x_3 = 0$ egyenletű síkban. A legördülő kör C centrumából kiinduló és a P kerületi ponton átmenő félegyenesen vegyünk most egy B ($B \neq P$) pontot, melynek a C -től mért távolsága legyen $b = CB$.

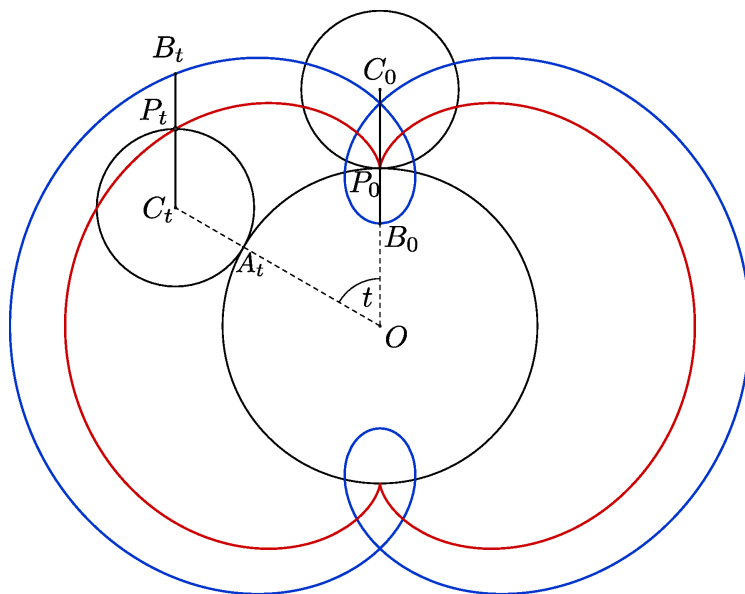
Tekintsük most a legördítés során a B pont által leírt pályát. (Lásd a 2.10. ábrát.) Az előbbi eljárást követve azt kapjuk, hogy a

$$\sigma(t) = \left((c \cos t + b \cos\left(1 - \frac{R}{r}t\right)) \mathbf{e}_1 + \left(c \sin t + b \sin\left(1 - \frac{R}{r}t\right) \right) \mathbf{e}_2 \right).$$

kifejezéssel leírt $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe képhalmaza megegyezik a B pont által leírt pályával. Amennyiben $b > r$, akkor a σ egy önmagát metsző görbe, és emiatt a pályát hurkolt hipocikloisnak nevezzük. A $b < r$ esetben a B pont pályáját nyújtott hipocikloisnak mondjuk.

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor az O centrumú és R sugarú álló körön kívülről gördítjük le a vele érintkező C középpontú és r sugarú kört. Az így nyert pályákat *epicikloisoknak* nevezzük.

A leírt pályák paraméterezéséhez ez esetben is válasszuk az álló körön legördült ív t középponti szögét. A $t = 0$ értéknek megfelelő kiindulási helyzetet most állítsuk be úgy, hogy az O -ból a két kör P_0 érintkezési pontjába mutató $\overrightarrow{OP_0}$ vektor legyen egyirányú az \mathbf{e}_2 alapvektorral. Ha Rt hosszúságú ív gördült le, akkor a legördülő kör centrumának pozíciója legyen C_t , a két kör pillanatnyi érintkezési pontját jelölje A_t , és a P pont helye legyen P_t . Ekkor teljesül $\overrightarrow{OC_t} = c(\cos t \mathbf{e}_2 - \sin t \mathbf{e}_1)$ a $c = R+r$ értékkel. A C kezdőpontú



2.11. ábra. Csúcsos és hurkolt epiciklois az $R/r = 2$ aránnyal.

és a P -n átmenő félegyenesen vegyünk egy B pontot, amelynek a C -től mért távolsága $b = CB$. A B pont által a gördítés során leírt epicikloist nyújtottnak, csúcsosnak, illetve hurkoltnak mondjuk aszerint, hogy $b < r$, $b = r$ vagy $b > r$ teljesül.

Jelölje a t pillanatban a B pont helyét B_t . A $\overrightarrow{C_t B_t}$ vektor irányát ez esetben úgy kapjuk meg, hogy a $\overrightarrow{C_0 B_0} = -b \mathbf{e}_2$ vektort elforgatjuk pozitív irányban t szöggel, majd pedig még ugyanabban az irányban az u szöggel. A két forgatás szorzata tehát ez esetben a $t + u$ szögű elforgatás. Ennek következtében fennáll $\overrightarrow{C_t B_t} = b(-\cos(t+u) \mathbf{e}_2 + \sin(t+u) \mathbf{e}_1)$. Az $\overrightarrow{OB_t} = \overrightarrow{OC_t} + \overrightarrow{C_t B_t}$ kifejezésnek megfelelően vegyük azt a $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima görbét, ahol

$$\gamma(t) = \left(-c \sin t + b \sin\left(1 + \frac{R}{r}t\right)\right) \mathbf{e}_1 + \left(c \cos t - b \cos\left(1 + \frac{R}{r}t\right)\right) \mathbf{e}_2.$$

Világos, hogy γ pályája megegyezik a B pont által leírt epicikloissal.

2.4.2. Gyakorló feladatok

A fejezetben szereplő fogalmak, összefüggések és tételek alkalmazásának gyakorlásaként oldjuk meg az alábbi feladatokat.

2.1. Feladat Tekintsük a $\gamma(t) = \exp(t) \cos t \mathbf{e}_1 + \exp(t) \sin t \mathbf{e}_2 + \exp(t) \mathbf{e}_3$ ($t \in \mathbb{R}$) összefüggéssel leírt $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima görbét, amelyet kúpos csavarvonalnak mondunk. Adjuk meg a tartalmazó kúpfelület egyenletét. Igazoljuk, hogy a görbe konstans szögben metszi el a kúpfelület alkotóit.

2.2. Feladat Az $x_3 = 0$ egyenletű síkban legyen adott egy R sugarú kör. Ennek belsejében csúszásmentesen gördítsünk le egy másik kört, amelynek sugara $r = R/2$. Vegyük a legördülő körlemez egy belső pontját. Mutassuk meg, hogy a pont által leírt nyújtott hipociklois egy ellipszis.

2.3. Feladat Mint ismeretes, asztroidnak nevezzük azt a csúcsos hipocikloist, amelynél a meghatározó körök sugaraira fennáll $R = 4r$. Mutassuk meg, hogy a $\gamma(t) = 4r \cos^3 t \mathbf{e}_1 + 4r \sin^3 t \mathbf{e}_2$ ($t \in [0, 2\pi]$) egyenlettel leírt γ görbe pályája egy asztroid. Határozzuk meg az asztroid ívhosszát.

2.4. Feladat Tekintsük azt a csúcsos hipocikloist, ahol a körök sugarainak aránya $R/r = 3$. (Lásd a 2.9. ábrát.) Bizonyítsuk be, hogy ez a hipociklois az érintőegyeneseiből azonos hosszúságú szakaszokat metsz ki.

2.5. Feladat Az r sugarú álló körön kívülről gördítsünk le egy vele azonos sugarú kört. A külső kör egy kerületi pontja által leírt pályát (amely egy csúcsos epiciklois) nevezik szívgörbének. Határozzuk meg ezen szívgörbe ívhosszát.

2.6. Feladat Tekintsük a $\gamma(t) = \operatorname{ch} t \mathbf{e}_1 + \operatorname{sh} t \mathbf{e}_2 + t \mathbf{e}_3$ egyenlettel leírt $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbét. Adjuk meg a γ azon ívhossznak megfelelő $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ átparaméterezését, amelyre fennáll $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0)$.

2.7. Feladat Tekintsük a $\gamma(t) = (t - \sin t) \mathbf{e}_1 + (1 - \cos t) \mathbf{e}_2$ egyenlettel leírt $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét, azaz a közönséges cikloist. Számítsuk ki a $\gamma|_{[0, 2\pi]}$ görbedarab ívhosszát, továbbá adjuk meg a $\gamma|_{(0, 2\pi)}$ görbeszegmens azon ívhossznak megfelelő $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ átparaméterezését, amelyre fennáll $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(\pi/2)$.

2.8. Feladat A bennünket körülvevő térben az $[x, y]$ koordinátasíkot tekintsük egy olyan függőleges síknak, ahol az y koordináta a magasságot adja meg. Vegyük azt a $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sima görbét, amelyet a $\gamma(u) = a(u - \sin u) \mathbf{e}_1 + a(1 + \cos u) \mathbf{e}_2$ összefüggés ír le ($u \in [0, 2\pi]$). A γ pályája legyen kényszerpálya egy tömegpont számára. Tegyük fel, hogy a tömegpontra csak a nehézségi erő és a pálya által kifejtett kényszererő hat, tehát a tömegpont súrlódásmentesen mozoghat a cikloispálya mentén.

Helyezzük a tömegpontot a cikloisra 0 kezdősebességgel valamely h ($0 < h \leq 2a$) magasságban. Bizonyítsuk be, hogy a tömegpont által végzett rezgőmozgás periódusideje nem függ a h kezdőmagasság értékétől.

2.9. Feladat Az \mathbb{R}^3 térben vegyük az $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ egyenlettel leírt gömbfelületet és az $x^2 - ax + y^2 = 0$ egyenlettel meghatározott hengerfelületet. (A feladatban szereplő két felület metszetét Viviani-féle görbeként szokták említeni.) Adjunk meg egy olyan γ reguláris zárt görbét, amelynek pályája azonos a két másodrendű felület metszetével. Számítsuk ki a görbület értékét a $\mathbf{p} = (a, 0, 0)$ önmetszési pontban.

2.10. Feladat Vegyük a $\gamma(t) = a \cos t \mathbf{e}_1 + a \sin t \mathbf{e}_2 + bt \mathbf{e}_3$ ($t \in \mathbb{R}$) egyenlettel meghatározott $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét, melyet hengeres csavarvonalnak nevezünk. Határozzuk meg a γ kísérő Frenet-bázisát, görbületi függvényét és torzió-függvényét.

2.11. Feladat Tekintsük a $\gamma(t) = \frac{1}{t} \mathbf{e}_1 + t^2 \mathbf{e}_2 + (2 + t^2) \mathbf{e}_3$ egyenlettel meghatározott $\gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima görbét. Határozzuk meg a $t = 1$ pontban a γ kísérő Frenet-bázisának vektorait és a simulókör középpontját.

2.12. Feladat Vegyük a $\gamma(t) = (1 + t^2) \mathbf{e}_1 + \frac{2}{1 + t^2} \mathbf{e}_2 + (t - t^3) \mathbf{e}_3$ összefüggés által leírt $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét. A $t = 1$ helyen határozzuk meg a görbe Frenet-bázisának vektorait, görbületét és torzióját. Adjunk meg egy olyan görbét, amelynek pályája megegyezik γ -nak a $t = 1$ pontban vett simulókörével.

2.13. Feladat Tekintsük a $\gamma(t) = (t^2 + \exp(t)) \mathbf{e}_1 + (3 \cos t - \sin t) \mathbf{e}_2 + 4 \sin t \mathbf{e}_3$ összefüggés által leírt $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét. Az $t = 0$ helyen határozzuk meg a görbe Frenet-bázisának vektorait, görbületét és torzióját.

2.14. Feladat Számítsuk ki a 2.1. és 2.6. Feladatokban megadott görbék görbületi függvényét és torzió-függvényét.

2.15. Feladat Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbe, amelynek torziója sehol sem tűnik el. A γ -t abban az esetben nevezzük általános csavarvonalnak, ha van olyan \mathbb{R}^3 -beli irány, amellyel a γ érintő egységvektorai konstans szöveget zárnak be. Igazoljuk, hogy a γ egy általános csavarvonalat ad akkor és csak akkor, ha a κ görbület-függvény és a τ torzió-függvény hányadosa állandó.

2.16. Feladat Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbe, amelynél az $a \in I$ pontban fennáll $\kappa(a) \neq 0$. A γ -t merőlegesen vetítsük le az a pontbeli simulósíkra, és az így nyert sima görbe legyen $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Igazoljuk, hogy a γ és μ görbék a helyen vett görbületei egyenlőek.

2.17. Feladat Legyen adott egy olyan $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbe, amelynek az összes főnormális egyenes tartalmazza az \mathbb{R}^3 tér egy rögzített \mathbf{q} pontját. Bizonyítsuk be, hogy a γ görbe pályája rajta van egy körön.

2.18. Feladat A $\gamma, \hat{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbékről azt mondjuk, hogy Bertrand-féle görbepárt alkotnak, ha főnormális egyenesaik tetszőleges $t \in I$ helyen egybeesnek. Legyen adva az ívhossz szerint paraméterezett $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe, amelynek τ torziója sehol sem 0. Bizonyítsuk be, hogy a γ egy Bertrand-féle görbepárnak egyik tagja akkor és csak akkor, ha vannak olyan A, B ($A \neq 0, B \neq 0$) valós számok, melyekkel fennáll $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ tetszőleges $s \in I$ -re.

2.19. Feladat Adva van egy olyan $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbe, amelynek bármely simulósíkja tartalmazza az \mathbb{R}^3 tér egy rögzített \mathbf{q} pontját. Igazoljuk, hogy γ síkbeli görbe.

2.20. Feladat Legyen adott egy ívhossz szerint paraméterezett $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbe, amelynek a κ görbület-függvénye konstans és a torziója sehol sem tűnik el. Vegyük a σ görbét, amelyet a $\sigma(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{F}(s)$ ($s \in I$) összefüggés határoz meg. Számítsuk ki a γ -hoz tartozó κ konstans és a $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ torzió-függvény ismeretében σ görbületét és torzióját.

2.21. Feladat Legyen adott egy olyan $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbe, amely rajta van egy r sugarú gömbfelületen. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a γ tetszőleges $t \in I$ helyen vett görbületére fennáll $\kappa(t) \geq \frac{1}{r}$.

2.22. Feladat Legyen adott egy ívhossz szerint paraméterezett $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbe, amelynél fennáll $\kappa'(s) \neq 0$ és $\tau(s) \neq 0$ bármely $s \in I$ -re. Vezessük be az $R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$ jelölést, és tekintsük az $f(s) = R(s)^2 + \left(\frac{R'(s)}{\tau(s)}\right)^2$ egyenlettel leírt $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt. Bizonyítsuk be, hogy γ pályája egy gömbfelületen van akkor és csak akkor, ha az f függvény konstans.

2.23. Feladat Legyen adva egy ívhossz szerint paraméterezett $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbe, amelynek az $a \in I$ helyen vett torziójára $\tau(a) \neq 0$ teljesül. Legyen s_n ($n \in \mathbb{N}$) olyan számsorozat, amelyre fennáll $s_n \in I$, $s_n \neq a$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a$. Jelölje G_n azt a gömbfelületet, amely tartalmazza az a -beli K simulókört és a $\gamma(s_n)$ pontot. Bizonyítsuk be, hogy az így nyert G_n ($n \in \mathbb{N}$) gömbsorozat konvergens.

2.24. Feladat Adva van egy $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ zárt sima görbe, amely rajta van egy gömbfelületen. Igazoljuk, hogy ezen görbe teljes torziója eltűnik, azaz fennáll $\int_0^b v(t) \tau(t) dt = 0$.

2.25. Feladat Legyen a $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ egy olyan ívhossz szerint paraméterezett valódi görbe, amelynek egy rögzített $s_0 \in I$ pontbeli $\kappa(s_0)$ görbülete és $\tau(s_0)$ torziója adott. Bizonyítsuk be, hogy a γ -hoz tartozó $\mathbf{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ főnormális egységvektormező ismeretében már meg lehet határozni γ görbületét és torzióját.

2.26. Feladat Az \mathbb{R}^3 euklideszi tér izometria csoportját jelölje $Iso(\mathbb{R}^3)$. Az $Iso(\mathbb{R}^3)$ 1-paraméteres transzformációcsoportján egy $\chi : \mathbb{R} \rightarrow Iso(\mathbb{R}^3)$ homomorfizmust értünk. Egy \mathbf{p} pontnak az 1-paraméteres χ transzformációcsoportoz tartozó pályagörbéjének mondjuk a $\gamma(t) = \chi(t)(\mathbf{p})$ ($t \in \mathbb{R}$) összefüggéssel meghatározott $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható leképezést. Ezzel az eljárással milyen pályagörbék adódnak?

2.27. Feladat Az \mathbb{R}^3 euklideszi tér λ ($\lambda > 0$) arányú hasonlósági transzformációján egy olyan $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ bijektív leképezést értünk, amelynél bármely $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ pontokra fennáll a $\|\Psi(\mathbf{p}) - \Psi(\mathbf{q})\| = \lambda \cdot \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$ egyenlőség.

Vegyünk egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbét és annak a Ψ hasonlósági transzformációval nyert $\hat{\gamma} = \Psi \circ \gamma$ képét. Igazoljuk, hogy a görbék görbületi függvényére és torzió-függvényére tetszőleges $t \in I$ helyen teljesül $\kappa(t) = \lambda \cdot \hat{\kappa}(t)$ és $\tau(t) = \pm \lambda \cdot \hat{\tau}(t)$.

3. fejezet

A síkbeli görbék differenciálgeometriája

3.1. A síkgörbe előjeles görbülete

Ebben a fejezetben az \mathbb{R}^2 euklideszi sík reguláris görbéit tárgyaljuk. Mivel az \mathbb{R}^2 síkot tekinthetjük úgy is, mint az \mathbb{R}^3 tér $x_3 = 0$ egyenlettel leírt síkját, az előző fejezetben bevezetett fogalmak az \mathbb{R}^2 -beli görbékre is értelmezhetőek.

Tekintsünk egy \mathbb{R}^2 -beli sima görbét, vagyis egy C^∞ -osztályú $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezést. Legyenek $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ a γ koordináta-függvényei, melyekkel a γ leképezés a $\gamma(t) = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2$, $t \in I$, alakban írható fel. Ily módon a γ görbe $t \in I$ pontban vett sebességvektorára teljesül $\gamma'(t) = x'(t)\mathbf{e}_1 + y'(t)\mathbf{e}_2$. A $v = \|\gamma'\|$ sebességfüggvényre nyilván igaz $v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$.

Legyen a γ görbe reguláris, ami azt jelenti, hogy fennáll $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$. Az előző fejezetben leírtaknak megfelelően azt a $\mathbf{T} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezést, amelyet a $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{v(t)}(x'(t)\mathbf{e}_1 + y'(t)\mathbf{e}_2)$ összefüggés ír le, a γ érintő egységvektormezőjének mondjuk. A γ görbe t helyen vett görbülete a $\kappa(t) = \frac{1}{v(t)}\|\mathbf{T}'(t)\|$ szám.

3.1. Definíció A $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ reguláris sima görbe t pontbeli normális egységvektorán az $\mathbf{N}(t) = \frac{1}{v(t)}(-y'(t)\mathbf{e}_1 + x'(t)\mathbf{e}_2)$ vektort értjük.

A $\gamma(t)$ ponton átmenő és az $\mathbf{N}(t)$ -vel párhuzamos egyenest a síkgörbe t helyen vett normális egyenesének nevezzük.

Vegyük észre, hogy bármely $t \in I$ esetén a $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ vektorok egy olyan ortonormált bázist képeznek az \mathbb{R}^2 vektortérben, amely a természetes irányítást reprezentálja a síkban. A \mathbf{T} , \mathbf{N} vektormezőkből álló párt a γ síkgörbe kíséző Frenet-bázisának mondjuk.

Ezen vektormezőkre a későbbiek során a $\mathbf{B}_1 = \mathbf{T}$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{N}$ jelölést is alkalmazni fogjuk.

3.2. Definíció A γ síkgörbe $t \in I$ helyen vett előjeles görbületén

a $k(t) = \frac{1}{v(t)} \langle \mathbf{T}'(t), \mathbf{N}(t) \rangle$ számot értjük. A $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a γ síkgörbe előjeles görbületi függvényének nevezzük.

Megjegyzés A \mathbf{T} leképezés pályája rajta van az $S^1 = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{u}\| = 1 \}$ egységkörön. Ennek következtében $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$ fennállása esetén a \mathbf{T} leképezés egy mozgást, konkrétan egy forgást ad meg az S^1 körön. A $k(t)$ görbület előjele attól függ, hogy ez a forgás melyik irányban történik (a t egy kis környezetében).

3.3. Állítás A γ síkgörbe Frenet-bázisának vektormezőire fennáll

$$\mathbf{T}' = v k \mathbf{N}, \quad \mathbf{N}' = -v k \mathbf{T}. \quad (3.1)$$

Bizonyítás. Az 1.23. Állítás következtében az \mathbb{R}^2 -beli $\mathbf{T}'(t)$ vektor merőleges $\mathbf{T}(t)$ -re, ezért $\mathbf{T}'(t)$ párhuzamos az $\mathbf{N}(t)$ egységvektorral. Ily módon a 3.2. Definícióból adódik, hogy

$$\mathbf{T}'(t) = \langle \mathbf{T}'(t), \mathbf{N}(t) \rangle \mathbf{N}(t) = v(t) k(t) \mathbf{N}(t)$$

teljesül tetszőleges $t \in I$ -re. A $\langle \mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t) \rangle = 0$ összefüggés deriválásával azt nyerjük, hogy igaz $\langle \mathbf{N}'(t), \mathbf{T}(t) \rangle + \langle \mathbf{T}'(t), \mathbf{N}(t) \rangle = 0$. Ebből már következik

$$\mathbf{N}'(t) = \langle \mathbf{N}'(t), \mathbf{T}(t) \rangle \mathbf{T}(t) = -v(t) k(t) \mathbf{T}(t). \quad \square$$

Az előző állításban szereplő (3.1) összefüggéseket a síkgörbékre vonatkozó Frenet-formuláknak mondjuk.

A γ görbe második deriváltjára az első Frenet-formula alkalmazásával a $\gamma'' = v' \mathbf{T} + v^2 k \mathbf{N}$ kifejezést nyerjük. Eszerint fennáll $\langle \gamma'', \mathbf{N} \rangle = v^2 k$, amiből a

$$k(t) = \frac{\langle \gamma''(t), \mathbf{N}(t) \rangle}{v(t)^2} \quad (3.2)$$

összefüggés adódik az előjeles görbületre. A γ koordináta-függvényeit alkalmazva pedig teljesül

$$k(t) = \frac{x'(t) y''(t) - y'(t) x''(t)}{v(t)^3}.$$

Vegyük észre, hogy (3.1) alapján mindig igaz $|k(t)| = \kappa(t)$. Tegyük fel, hogy a $t \in I$ helyen az előjeles görbület nem tűnik el, azaz $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$. Ekkor vehetjük a 2.18. Definícióban értelmezett $\mathbf{F}(t)$ egységvektort, amely szintén merőleges $\mathbf{T}(t)$ -re. Ily módon azt kapjuk, hogy $\frac{1}{v(t)} \mathbf{T}'(t) = \kappa(t) \mathbf{F}(t) = k(t) \mathbf{N}(t)$, vagyis fennáll $\mathbf{F}(t) = \frac{k(t)}{|k(t)|} \mathbf{N}(t)$.

Emlékezzünk rá, hogy a $t \in I$ pontban vett simuló kör középpontját a $\gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{F}(t)$ kifejezés adja meg. A fentiek alapján igaz az alábbi kijelentés.

3.4. Következmény A $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ síkgörbe $t \in I$ helyen vett simulóköreinek centruma a $\mathbf{c} = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)} \mathbf{N}(t)$ pont.

Az alábbi állítást a felületek síkmetszeteinek tanulmányozása során fogjuk majd alkalmazni.

3.5. Állítás Legyen adott egy olyan $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ reguláris síkgörbe, amelynek az $a \in I$ helyen vett $k(a)$ előjeles görbülete nem tűnik el. Tekintsük a görbe $\gamma(a)$ pontbeli \mathcal{E} érintőegyenest és az általa határolt két félsíkot. Ekkor létezik olyan $J \subset I$ intervallum, hogy $a \in J$ és bármely az a -tól különböző $t \in J$ paraméterérték esetén a $\gamma(t)$ pont abban a nyílt félsíkban van, amelyikbe a $k(a) \cdot \mathbf{N}(a)$ vektor mutat.

Bizonyítás. Vezessük be az $\varepsilon = k(a)/\kappa(a)$ jelölést. Tekintsük azt a $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyet a $h(t) = \langle \gamma(t) - \gamma(a), \varepsilon \mathbf{N}(a) \rangle$ összefüggés ír le tetszőleges $t \in I$ -re. Vegyük észre, hogy a h függvény a görbe pontjainak az \mathcal{E} érintőegyenestől való előjeles távolságát méri.

Nyilvánvaló, hogy fennáll $h(a) = 0$ és $h'(a) = 0$. Az első Frenet-formulából nyert $\gamma'' = v' \mathbf{T} + v^2 k \mathbf{N}$ egyenlet következtében a h másodrendű deriváltjára igaz

$$h''(a) = \langle \gamma''(a), \varepsilon \mathbf{N}(a) \rangle = v(a)^2 \cdot k(a) \cdot \varepsilon = \|\gamma'(a)\|^2 \cdot \kappa(a) > 0.$$

Ily módon a Taylor-tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy van olyan $J \subset I$ részintervallum, amelynél $a \in J$ és $h(t) > 0$ teljesül bármely $t \in J \setminus \{a\}$ esetén. Ez pedig már igazolja az állításunkat. \square

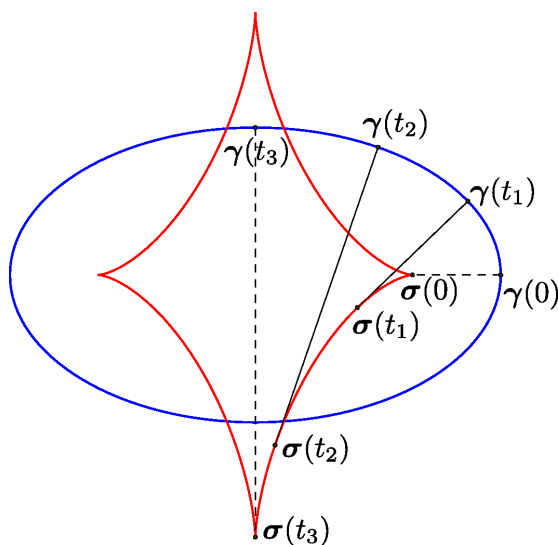
Az előjeles görbület invarianciája

A 2.8. Definícióban leírtaknak megfelelően vegyük a $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ reguláris síkgörbének egy $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ átparaméterezését. Ez esetben is alkalmazzuk az $\varepsilon = \frac{\varphi'(u)}{|\varphi'(u)|}$ jelölést. Ekkor nyilván fennáll $\tilde{\mathbf{T}}(u) = \varepsilon \cdot \mathbf{T}(\varphi(u))$ és $\tilde{\mathbf{N}}(u) = \varepsilon \cdot \mathbf{N}(\varphi(u))$ bármely $u \in J$ mellett. A $\tilde{v}(u) = |\varphi'(u)| \cdot v(\varphi(u))$ összefüggést is alkalmazva azt kapjuk, hogy az előjeles görbületekre $\tilde{k}(u) = \varepsilon \cdot k(\varphi(u))$ teljesül. Eszerint irányításváltó átparaméterezés esetén a síkgörbe előjeles görbülete előjelet vált.

Tekintsünk egy $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ izometriát (vagy más szóval egybevágóságot), továbbá a $\hat{\gamma} = \Psi \circ \gamma$ képgörbét. Jelölje Φ a Ψ által meghatározott lineáris izomorfizmust az \mathbb{R}^2 vektortéren. Legyen $\varepsilon = 1$, ha a Ψ izometria irányítástartó, illetve legyen $\varepsilon = -1$ irányításváltás esetén. Ekkor a $\hat{\gamma}$ képgörbe sebességére és kísérő Frenet-bázisára teljesül $\hat{v}(t) = v(t)$, $\hat{\mathbf{T}}(t) = \Phi(\mathbf{T}(t))$, $\hat{\mathbf{N}}(t) = \varepsilon \cdot \Phi(\mathbf{N}(t))$ tetszőleges $t \in I$ értékre. Ebből a 3.1. Definíció és az (1.1) összefüggés alapján következik, hogy az előjeles görbületi függvényekre igaz $\hat{k}(t) = \varepsilon \cdot k(t)$.

3.2. A síkgörbe evolútája és evolvenszei

3.6. Definíció Legyen $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ egy olyan reguláris görbe, amelynek görbülete sehol sem tűnik el. A $\sigma(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)} \mathbf{N}(t)$ ($t \in I$) összefüggéssel meghatározott $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ síma görbét a γ evolútájának nevezzük.



3.1. ábra. Az ellipszis evolútája.

Az evolúta pályája tehát megegyezik a γ -hoz tartozó simulókörök centrumainak halmazával. Az evolúta ívhossza könnyen kiszámítható az alábbi állítás felhasználásával.

3.7. Állítás Legyen adott egy olyan $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ síkgörbe, amelynek görbülete sehol sem tűnik el, továbbá fennáll $k'(t) \neq 0$, $t \in (a, b)$. Ekkor a σ evolúta ívhosszára teljesül

$$l(\sigma) = \left| \frac{1}{k(a)} - \frac{1}{k(b)} \right|. \quad (3.3)$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy ez esetben a k előjeles görbületi függvény szigorúan monoton. Amennyiben alkalmazzuk a második Frenet-formulát, akkor azt kapjuk, hogy a σ sebességvektorára fennáll

$$\sigma'(t) = \gamma'(t) - \frac{k'(t)}{k(t)^2} \mathbf{N}(t) + \frac{1}{k(t)} \mathbf{N}'(t) = -\frac{k'(t)}{k(t)^2} \mathbf{N}(t). \quad (3.4)$$

Eszerint az evolúta sebességére igaz $\|\sigma'(t)\| = \frac{|k'(t)|}{k(t)^2}$.

Tekintsük azt az esetet, amikor fennáll $k'(t) > 0$ tetszőleges $t \in (a, b)$ mellett. A k függvény most szigorúan monoton növekvő, tehát $k(a) < k(b)$ teljesül. Mivel a k függvény nem vált előjelet, ebből már adódik $\frac{1}{k(a)} > \frac{1}{k(b)}$. A 2.7. Tétel alapján igaz

$$l(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b \frac{k'(t)}{k(t)^2} dt = \left[-\frac{1}{k(t)} \right]_a^b = \frac{1}{k(a)} - \frac{1}{k(b)} = \left| \frac{1}{k(a)} - \frac{1}{k(b)} \right|.$$

Amennyiben fennáll $k'(t) < 0$ tetszőleges $t \in (a, b)$ esetén, akkor a fenti megfontolások alapján ugyancsak a (3.3) összefüggéshez jutunk. \square

Megjegyzés A (3.4) egyenlőség azt is igazolja, hogy a γ görbe normális egyenesei érintői a σ evolútának.

Megjegyzés Amennyiben a γ síkgörbe k ($k \neq 0$) előjeles görbületi függvénye konstans, akkor (3.4) szerint fennáll $\sigma'(t) = \mathbf{0}$, vagyis a σ leképezés is konstans. Ebből már adódik, hogy a γ pályája rajta van azon a körön, amelynek centruma a $\mathbf{c} = \gamma(t) + (1/k) \mathbf{N}(t)$ pont és sugara $r = |1/k|$.

3.8. Definíció Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ reguláris görbe, amelynek görbülete sehol sem tűnik el, és egy $l \in \mathbb{R}$ szám. Rögzítsünk egy $a \in I$ paraméterértéket és vegyük azt a $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyet a $\rho(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du$ kifejezés határoz meg. A $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + (l - \rho(t)) \mathbf{T}(t)$ összefüggéssel leírt $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ görbét a γ egyik evolvensének mondjuk.

A definíció alapján az evolvens, illetve annak pályája az alábbi eljárással kapható meg. Vesszük a γ görbe érintőjét a $\gamma(a)$ pontban és azon kijelöljük az érintési ponttól l távolságra eső pontot, melyet az egyeneshez rögzítünk. Az egyenest csúszásmentesen legördítjük a γ görbe pályája mentén. Ekkor az egyeneshez rögzített pont éppen az evolvens pályáját írja le a gördítés során.

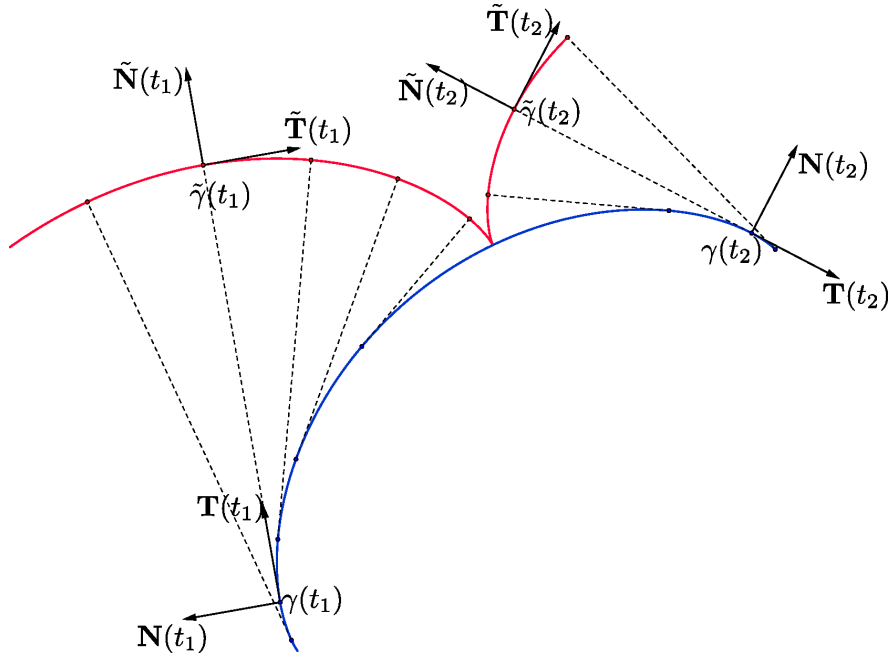
A fent értelmezett $\tilde{\gamma}$ evolvensre igaz az alábbi kijelentés.

3.9. Állítás Amennyiben a $t \in I$ értékre fennáll $\rho(t) \neq l$, akkor a $\tilde{\gamma}$ evolvens t helyen vett simulókörének középpontja éppen a $\gamma(t)$ pont.

Bizonyítás. A $\tilde{\gamma}$ evolvens egy $t \in I$ pontban vett deriváltjára (3.1) alkalmazásával a

$$\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(t) - \|\gamma'(t)\| \mathbf{T}(t) + (l - \rho(t)) \mathbf{T}'(t) = (l - \rho(t)) k(t) v(t) \mathbf{N}(t)$$

összefüggés adódik. Eszerint $\gamma'(t) = \mathbf{0}$ csak a $\rho(t) = l$ esetben áll fenn. A fenti kifejezés alapján a $\tilde{\gamma}$ evolvens $\tilde{v} = \|\tilde{\gamma}'\|$ sebességfüggvényére igaz $\tilde{v}(t) = |(l - \rho(t)) k(t)| \cdot v(t)$.



3.2. ábra. A γ görbe és a $\tilde{\gamma}$ evolvens kísérő Frenet-bázisa.

Tegyük fel, hogy a tekintett $t \in I$ helyen fennáll az $(l - \rho(t))k(t) < 0$ egyenlőtlenség. Ekkor a $\tilde{\gamma}$ evolvens érintő és normális egységvektoraira $\tilde{\mathbf{T}}(t) = -\mathbf{N}(t)$ és $\tilde{\mathbf{N}}(t) = \mathbf{T}(t)$ adódik. (Lásd a 3.2. ábrát.) Innen azt kapjuk, hogy teljesül

$$\tilde{\mathbf{T}}'(t) = -\mathbf{N}'(t) = k(t)v(t)\mathbf{T}(t) = k(t)v(t)\tilde{\mathbf{N}}(t).$$

A Frenet-formulák szerint a $\tilde{\gamma}$ evolvens $\tilde{k}(t)$ előjeles görbületére igaz $\tilde{k}(t)\tilde{v}(t) = k(t)v(t)$. Alkalmazva a $\tilde{v}(t)$ sebesség fenti kifejezését ebből azt nyerjük, hogy igaz $\tilde{k}(t) = \frac{1}{\rho(t) - l}$. Ennek következtében ha vesszük a $\tilde{\gamma}$ evolvens t -beli simulóköreinek $\tilde{\sigma}(t)$ centrumát, akkor arra fennáll

$$\tilde{\sigma}(t) = \tilde{\gamma}(t) + \frac{1}{\tilde{k}(t)}\tilde{\mathbf{N}}(t) = \tilde{\gamma}(t) + (\rho(t) - l)\mathbf{T}(t) = \gamma(t),$$

ami már igazolja az állításunkat.

Amennyiben az $(l - \rho(t))k(t) > 0$ egyenlőtlenség áll fenn, akkor a fenti eljárást alkalmazva szintén $\tilde{\sigma}(t) = \gamma(t)$ adódik. \square

Megjegyzés Kissé pongyolán fogalmazva, az előző állítás azt mondja ki, hogy a γ bármely $\tilde{\gamma}$ evolvensének az evolútája azonos a γ görbével.

Az előző bizonyításban nyert $\tilde{\mathbf{T}}(t) = \pm \mathbf{N}(t)$ egyenlőség arra hívja fel a figyelmet, hogy a $\tilde{\gamma}$ evolvens derékszögben metszi el a γ görbe érintőegyeneseit.

A síkgörbe parallel görbéi

3.10. Definíció Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ reguláris görbe és egy $d \in \mathbb{R}$ szám. A $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t) + d \mathbf{N}(t)$ ($t \in I$) összefüggéssel nyert $\hat{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ görbét a γ egyik parallel görbéjének mondjuk.

Amennyiben vesszük a $\hat{\gamma}$ görbe sebességvektorát, akkor a Frenet-formulák alapján a

$$\hat{\gamma}'(t) = v(t)(1 - dk(t)) \mathbf{T}(t) \quad (3.5)$$

összefüggéshez jutunk. Eszerint $\hat{\gamma}'(t) = \mathbf{0}$ akkor áll fenn, ha $1 - dk(t) = 0$.

Legyen $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ egy olyan reguláris görbe, melynek görbülete sehol sem tűnik el. A fentiek során definiált $\hat{\gamma}$ parallel görbére igaz az alábbi állítás.

3.11. Állítás Amennyiben a $t \in I$ értéknél fennáll $d \cdot k(t) \neq 1$, akkor a $\hat{\gamma}$ parallel görbe előjeles görbületére teljesül $\hat{k}(t) = \frac{k(t)}{|1 - dk(t)|}$.

Ha a γ görbe görbülete nem tűnik el t -ben, akkor a γ és $\hat{\gamma}$ görbék t pontbeli simulókörének centruma egybeesik.

Bizonyítás. A sebességvektor (3.5) kifejezése szerint fennáll $\hat{v}(t) = v(t) \cdot |1 - dk(t)|$. Az $1 - dk(t)$ érték előjelétől függően a Frenet-bázisokra igaz $\hat{\mathbf{T}}(t) = \pm \mathbf{T}(t)$ és $\hat{\mathbf{N}}(t) = \pm \mathbf{N}(t)$. Ezen egyenlőségek felhasználásával a $\hat{\gamma}$ előjeles görbületére

$$\hat{k}(t) = \frac{1}{\hat{v}(t)} \langle \hat{\mathbf{T}}'(t), \hat{\mathbf{N}}(t) \rangle = \frac{1}{v(t) \cdot |1 - dk(t)|} \langle \mathbf{T}'(t), \mathbf{N}(t) \rangle = \frac{k(t)}{|1 - dk(t)|}.$$

adódik. Innen már következik, hogy teljesül

$$\hat{\gamma}(t) + \frac{1}{\hat{k}(t)} \hat{\mathbf{N}}(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)} \mathbf{N}(t),$$

amennyiben $k(t) \neq 0$. □

Megjegyzés Vegyük észre, hogy egy síkgörbe evolvensi parallel görbéi egymásnak.

3.3. Zárt síkgörbék jellemzése

A zárt síkgörbe körülfordulási száma

A zárt görbéket már az előző fejezet 2.27. Definíciójában értelmeztük. Egy síkbeli zárt görbe esetében az érintő egységvektormező pályája egy körvonalra esik. Ennek következtében a zárt síkgörbéhez egy újabb geometriai jellemzőt lehet hozzárendelni.

Az \mathbb{R}^2 síkban vegyük az $S^1 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{u}\| = 1\}$ egységkört és azon a síktól örökölt altér-topológiát. Legyen $\phi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ az a leképezés, amelyre fennáll $\phi(t) = \cos t \mathbf{e}_1 + \sin t \mathbf{e}_2$ ($t \in \mathbb{R}$). Ezt a ϕ folytonos függvényt az S^1 egységkör univerzális fedőleképezésének nevezik a topológiában.

Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ reguláris görbe. Vegyük a γ -hoz tartozó $\mathbf{T} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ érintő egységvektormezőt. Ezt tekinthetjük úgy is, mint egy $\mathbf{T} : I \rightarrow S^1$ folytonos leképezést. A topológiából ismert az alábbi eredmény.

Rögzítsünk egy $t_0 \in I$ értéket és egy olyan u_0 számot, amellyel fennáll $\phi(u_0) = \mathbf{T}(t_0)$. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, amellyel teljesül $\phi \circ \alpha = \mathbf{T}$ és $\alpha(t_0) = u_0$.

Az α leképezést a \mathbf{T} fedőleképezésének, illetve a \mathbf{T} liftjének szokás nevezni.

A továbbiakban mi azt is ki fogjuk használni, hogy az α függvény C^∞ -osztályú. Ezt a tényt most be is bizonyítjuk oly módon, hogy egy konstrukciót adunk meg az α függvényre.

Vegyük a $\mathbf{T} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezésnek a $g(t) = \langle \mathbf{T}(t), \mathbf{e}_1 \rangle$ és $h(t) = \langle \mathbf{T}(t), \mathbf{e}_2 \rangle$ összefüggésekkel értelmezett $g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ koordináta-függvényeit, amelyek C^∞ -osztályúak. Nyilván igaz $g(t)^2 + h(t)^2 = 1$ és $g(t)g'(t) + h(t)h'(t) = 0$ tetszőleges $t \in I$ esetén.

Rögzítsünk egy $t_0 \in I$ értéket és egy olyan α_0 számot, amelyre fennáll $\cos \alpha_0 = g(t_0)$ és $\sin \alpha_0 = h(t_0)$, vagyis $\phi(\alpha_0) = \mathbf{T}(t_0)$. Tekintsük azt az $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyet az

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \int_{t_0}^t (g(u)h'(u) - h(u)g'(u)) du \quad (3.6)$$

összefüggés ír le. Világos, hogy az így értelmezett α függvény is C^∞ -osztályú.

3.12. Állítás *A fenti α függvénnyel tetszőleges $t \in I$ esetén teljesül*

$$\mathbf{T}(t) = \cos \alpha(t) \mathbf{e}_1 + \sin \alpha(t) \mathbf{e}_2. \quad (3.7)$$

Bizonyítás. Vegyük az $f(t) = g(t) \cos \alpha(t) + h(t) \sin \alpha(t)$ egyenlettel meghatározott $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt. Ennek deriváltjára (3.6) következtében fennáll

$$\begin{aligned} f'(t) &= g'(t) \cos \alpha(t) - g(t) \sin \alpha(t) \cdot (g(t)h'(t) - h(t)g'(t)) \\ &\quad + h'(t) \sin \alpha(t) + h(t) \cos \alpha(t) \cdot (g(t)h'(t) - h(t)g'(t)) \\ &= \cos \alpha(t) \cdot (g'(t)(1 - h(t)^2) + h'(t)h(t)g(t)) \\ &\quad + \sin \alpha(t) \cdot (h'(t)(1 - g(t)^2) + g'(t)g(t)h(t)). \end{aligned}$$

Kihasználva a $g(t)^2 + h(t)^2 = 1$ és $g(t)g'(t) + h(t)h'(t) = 0$ összefüggéseket belátható, hogy a fenti kifejezésben $\cos \alpha(t)$ és $\sin \alpha(t)$ együtthatói eltűnnek. Emiatt $f'(t) = 0$ teljesül tetszőleges $t \in I$ -re. Ily módon $f(t_0) = \cos^2 \alpha_0 + \sin^2 \alpha_0 = 1$ következtében fennáll $f = 1$. Ennek alkalmazásával a

$$(g(t) - \cos \alpha(t))^2 + (h(t) - \sin \alpha(t))^2 = 2 - 2f(t) = 0$$

összefüggéshez jutunk. Eszerint teljesül $\cos \alpha(t) = g(t)$ és $\sin \alpha(t) = h(t)$, ami már igazolja az állítást. \square

Vegyük észre, hogy (3.7) következtében az \mathbf{N} normális egységvektormező felírható az

$$\mathbf{N}(t) = -\sin \alpha(t) \mathbf{e}_1 + \cos \alpha(t) \mathbf{e}_2$$

egyenlettel.

A teljes görbület fogalmát már bevezettük az előző fejezetben. Ennek analógiájára a síkgörbék esetében egy további fogalmat is értelmezni lehet.

3.13. Definíció Legyen adva egy $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ reguláris görbe. A $k(\gamma) = \int_a^b k(t) v(t) dt$ számot a γ síkgörbe teljes előjeles görbületének nevezzük.

3.14. Állítás Amennyiben a γ reguláris síkgörbe zárt, akkor a $k(\gamma)$ teljes előjeles görbület a 2π értéknek egy egész számszorosa.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a (3.6) összefüggéssel definiált α függvényt. (3.7) következtében a \mathbf{T} leképezés deriváltjára a

$$\mathbf{T}'(t) = \alpha'(t) (-\sin \alpha(t) \mathbf{e}_1 + \cos \alpha(t) \mathbf{e}_2) = \alpha'(t) \mathbf{N}(t)$$

összefüggést kapjuk. Az első Frenet-formula alapján ebből már adódik, hogy fennáll

$$\alpha'(t) = v(t) k(t). \quad (3.8)$$

Eszerint a $k(\gamma)$ teljes előjeles görbületre igaz

$$k(\gamma) = \int_a^b k(t) v(t) dt = \int_a^b \alpha'(t) dt = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Amennyiben a γ reguláris görbe zárt, akkor $\mathbf{T}(a) = \mathbf{T}(b)$. Emiatt valamely $n \in \mathbb{Z}$ egész számmal teljesül $\alpha(b) = \alpha(a) + 2n\pi$. A $k(\gamma)$ értékének fenti kifejezése tehát már igazolja az állításunkat. \square

A fenti állítás alapján értelmezni lehet a következő fogalmat.

3.15. Definíció Legyen adva egy $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ reguláris zárt görbe. Az $n(\gamma) = \frac{1}{2\pi} k(\gamma)$ egész számot a γ zárt görbe körülfordulási számának mondjuk.

Ezt követően a zárt síkgörbét úgy paraméterezzük, hogy a görbe \mathbb{R} -beli paramétertartományának kezdőpontja a 0 legyen. Az alábbi tétel az egyszerű zárt görbékre vonatkozik, melyek fogalmát a 2.28. Definícióban adtuk meg. A tétel bizonyítása során topológiai eszközöket is alkalmazunk.

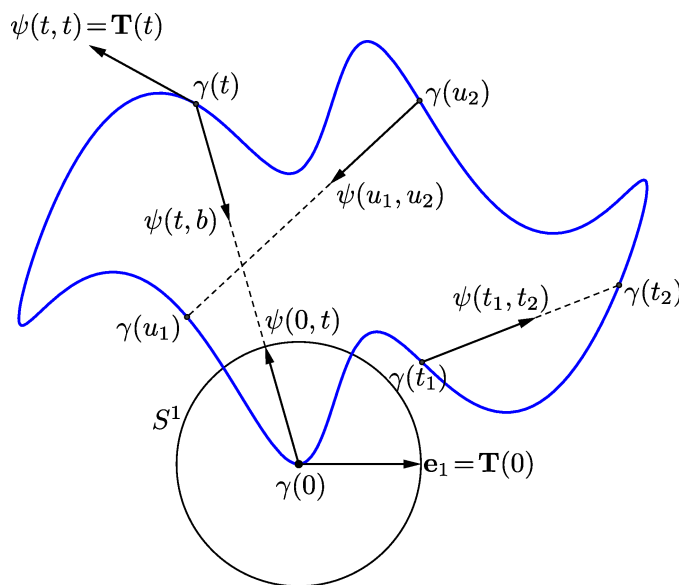
3.16. Tétel Amennyiben a $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ zárt görbe egyszerű, akkor az $n(\gamma)$ körülfordulási szám értéke 1 vagy -1 .

Bizonyítás. Az általánosság elvét nem sértjük azzal, ha feltesszük, hogy γ második koordináta-függvénye a 0 helyen veszi fel a minimumát. Eszerint a tekintett γ görbére most fennáll $\langle \gamma(t) - \gamma(0), \mathbf{e}_2 \rangle \geq 0$. Ennek következtében a 0 helyen vett érintő egységvektorra teljesül $\mathbf{T}(0) = \mathbf{e}_1$ vagy $\mathbf{T}(0) = -\mathbf{e}_1$.

Tekintsük azt a $\psi : [0, b] \times [0, b] \rightarrow S^1$ leképezést, amelyre fennáll

$$\begin{aligned} \psi(t_1, t_2) &= \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\|} \quad \text{ha } t_1 < t_2 \text{ és } (t_1, t_2) \neq (0, b); \\ \psi(t_1, t_2) &= \frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_2)}{\|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|} \quad \text{ha } t_1 > t_2 \text{ és } (t_1, t_2) \neq (b, 0); \\ \psi(t, t) &= \mathbf{T}(t) \quad \text{bármely } t \in [0, b] \text{ esetén; továbbá} \\ \psi(0, b) &= \psi(b, 0) = -\mathbf{T}(0). \end{aligned}$$

Ezen ψ függvény értelmezésében segít a 3.3. ábra. Könnyen igazolható, hogy ez a ψ leképezés folytonos. Vegyük továbbá azon $\xi, \vartheta : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, ahol $\xi(t) = \psi(0, t)$ és $\vartheta(t) = \psi(t, b)$. A ψ fenti definiálása alapján belátható, hogy a $\xi([0, b])$ képhalmaz megegyezik az S^1 felső félkörével, illetve a $\vartheta([0, b])$ képhalmaz éppen az S^1 alsó félköre.



3.3. ábra. A $\psi : [0, b] \times [0, b] \rightarrow S^1$ függvény értelmezése.

Emlékezzünk rá, hogy korábban már alkalmaztuk az S^1 kör $\phi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ univerzális fedőleképezését, ahol fennáll $\phi(t) = \cos t \mathbf{e}_1 + \sin t \mathbf{e}_2$ tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén. A topológiából

ismeretes, hogy van olyan $\hat{\psi}: [0, b] \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, amellyel teljesül $\phi \circ \hat{\psi} = \psi$ és $\hat{\psi}(0, 0) = 0$. Tekintsük az $\alpha: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, ahol $\alpha(t) = \hat{\psi}(t, t)$. Világos, hogy fennáll $\phi \circ \alpha = \mathbf{T}$, vagyis α az egyik fedőleképezése \mathbf{T} -nek, amelyről korábban azt is beláttuk, hogy differenciálható.

Vezessük most be a $\hat{\xi}, \hat{\vartheta}: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, melyeket a $\hat{\xi}(t) = \hat{\psi}(0, t)$ és $\hat{\vartheta}(t) = \hat{\psi}(t, b)$ összefüggések írják le. Ezekkel nyilván teljesül $\phi \circ \hat{\xi} = \xi$ és $\phi \circ \hat{\vartheta} = \vartheta$. A ξ és ϑ képhalmaza egy-egy félkör, melyeknek a végpontjai közösek és egyesítésük a teljes S^1 kör. Ebből viszont az következik, hogy $\hat{\xi}([0, b])$ és $\hat{\vartheta}([0, b])$ egy-egy π hosszúságú intervallumot adnak \mathbb{R} -ben, melyeknek csupán a $\hat{\xi}(b) = \hat{\vartheta}(0)$ pont a közös eleme. Így módon azt kapjuk, hogy igaz

$$\begin{aligned} \alpha(b) - \alpha(0) &= \hat{\psi}(b, b) - \hat{\psi}(0, 0) = \hat{\vartheta}(b) - \hat{\vartheta}(0) + \hat{\xi}(b) - \hat{\xi}(0) \\ &= 2(\hat{\xi}(b) - \hat{\xi}(0)) = 2(\pm\pi) = \pm 2\pi. \end{aligned}$$

Ebből $\alpha'(t) = k(t)v(t)$ miatt már adódik, hogy fennáll

$$k(\gamma) = \int_0^b k(t)v(t) dt = \alpha(b) - \alpha(0) = \pm 2\pi,$$

ami teljessé teszi a tétel bizonyítását. □

Megjegyzés A fenti bizonyítás nem marad érvényben abban az esetben, amikor a $\gamma: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ zárt síkgörbe nem egyszerű. Ez esetben ugyanis a γ görbének önmetszése van, azaz vannak olyan $t_1, t_2 \in [0, b]$ különböző értékek, melyekre fennáll $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. Emiatt viszont nem lehet definiálni a ψ leképezést.

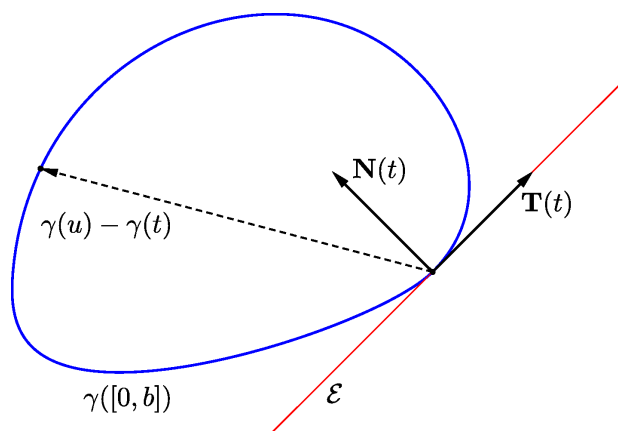
A konvex zárt síkgörbék

3.17. Definíció Legyen adva egy $\gamma: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt görbe. Ezt konvexnek nevezzük, ha bármely rögzített $t \in [0, b]$ szám esetén a $h_t(u) = \langle \gamma(u) - \gamma(t), \mathbf{N}(t) \rangle$, ($u \in [0, b]$) formulával értelmezett $h_t: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre $h_t \geq 0$ vagy $h_t \leq 0$ teljesül.

Vegyük észre, hogy a $h_t(u)$ függvényérték megegyezik a $\gamma(u)$ pontnak a t -beli érintőegyenestől mért előjeles távolságával.

A fenti definíció tehát azt mondja ki, hogy bármely pontban is vesszük a konvex zárt görbe érintőegyenését, az érintőegyenes által határolt egyik zárt félsík tartalmazza a görbe pályáját. (Lásd a 3.4. ábrát.)

Jordan tétele szerint a γ egyszerű zárt görbe pályája a síkot felosztja két összefüggő tartományra. Amennyiben vesszük a korlátos belső tartomány és a pálya unióját, akkor egy zárt alakzatot kapunk a síkban. Ha pedig γ egy konvex zárt görbe, akkor ez az alakzat előáll zárt félsíkok metszeteként, amiből már következik, hogy konvex. Ez adja az elnevezés motivációját.



3.4. ábra. Egy konvex zárt síkgörbe.

Az \mathbb{R}^2 -beli konvex zárt görbék jellemző tétel bizonyításához szükségünk lesz az alábbi segédtételre.

3.18. Lemma *Legyen adott egy $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ konvex egyszerű zárt görbe. Amennyiben valamely $u_1, u_2 \in [0, b)$ paraméterértékekre fennáll $\mathbf{T}(u_1) = \mathbf{T}(u_2)$, akkor γ pályája tartalmazza a $\gamma(u_1)$ és $\gamma(u_2)$ pontokat összekötő szakaszt.*

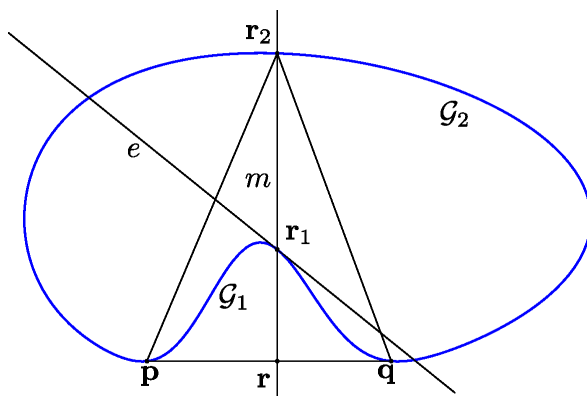
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamely $u_1, u_2 \in [0, b)$ helyek esetében igaz $\mathbf{T}(u_1) = \mathbf{T}(u_2)$.

A 3.16. Tételből következik, hogy egy egyszerű zárt görbe esetében a \mathbf{T} érintő egységvektormező befutja a teljes S^1 egységkört. Emiatt van olyan $u_3 \in [a, b)$ érték, ahol fennáll $\mathbf{T}(u_3) = -\mathbf{T}(u_1)$. Eszerint a $\gamma(u_1), \gamma(u_2), \gamma(u_3)$ pontokban az érintőegyenesek párhuzamosak egymással. Vegyük észre, hogy a három párhuzamos érintő közül legalább kettőnek egybe kell esnie a konvexitás miatt.

Legyenek \mathbf{p}, \mathbf{q} olyan pontok a három közül, melyekben azonosak az érintőegyenesek. A két pont a körvonallal homeomorf $\mathcal{G} = \gamma([0, b])$ pályát felbontja két görbévre, melyeket jelöljön most \mathcal{G}_1 és \mathcal{G}_2 . Be fogjuk látni, hogy a $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ görbévek közül az egyik megegyezik a \mathbf{p}, \mathbf{q} pontokat összekötő szakasszal.

Tegyük fel, hogy az összekötő szakasznak van egy olyan \mathbf{r} pontja, amely nincs rajta a görbén. (Lásd a 3.5. ábrát.) Vegyük az \mathbf{r} ponton átmenő és a szakaszra merőleges m egyenest. Ez elmettzi a \mathbf{p} -t és \mathbf{q} -t összekötő $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ görbéveket legalább egy pontban. Legyen \mathbf{r}_i ($i = 1, 2$) egy olyan pontja az m egyenesnek, amely rajta van a \mathcal{G}_i görbéven. Világos, hogy a $\mathbf{pqr}_1\Delta$ és $\mathbf{pqr}_2\Delta$ háromszögek közül az egyik tartalmazza a másikat. Amennyiben az \mathbf{r}_1 pont van benne a $\mathbf{pqr}_2\Delta$ háromszög belsejében, akkor a γ görbe \mathbf{r}_1 pontbeli e érintője elválasztja egymástól a háromszög valamely két csúcsát. Ez viszont ellentmond annak, hogy a γ görbe konvex.

A fentiek alapján a $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ görbévek egyike azonos a \mathbf{p}, \mathbf{q} pontokat összekötő szakasszal. Ebből viszont az is következik, hogy a \mathbf{p}, \mathbf{q} pontokban a tangenciális egység-



3.5. ábra. Illusztráció a 3.18. Lemma bizonyításához.

vektorok megegyeznek, vagyis fennáll $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\} = \{\gamma(u_1), \gamma(u_2)\}$. Ezzel a segédttétel bizonyítást nyert. \square

3.19. Tétel *Legyen adott egy $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt görbe. A γ konvex akkor és csak akkor, ha az előjeles görbületet leíró $k : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre fennáll $k \geq 0$ vagy $k \leq 0$.*

Bizonyítás. Tételünket két részletben igazoljuk.

a) Elsőként azt látjuk be, hogy ha a γ egyszerű zárt görbe konvex, akkor a k függvény nem vált előjelet. Konkrétan, azt az egyenértékű kijelentést bizonyítjuk be, hogy amennyiben a k függvény előjelet vált, akkor a γ görbe nem konvex.

Tegyük fel, hogy a γ -hoz tartozó k függvény előjelet vált. Vegyük a $\mathbf{T} : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ érintő egységvektormezőt, továbbá a (3.6) egyenlettel meghatározott $\alpha : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amellyel $\phi \circ \alpha = \mathbf{T}$ teljesül.

Korábban már beláttuk, hogy fennáll az $\alpha'(t) = k(t) \cdot v(t)$ összefüggés. A k függvény előjelváltása miatt van olyan részintervallum, ahol α szigorúan monoton növekvő és olyan is, ahol α szigorúan monoton csökkenő. Ennek következtében léteznek olyan $u_1, u_2 \in [0, b)$ paraméterértékek, melyekre igaz $u_1 \neq u_2$, $\alpha(u_1) = \alpha(u_2)$ és $k(u_1) \neq 0$. Világos, hogy ezeken a helyeken fennáll $\mathbf{T}(u_1) = \mathbf{T}(u_2)$. Mivel a 2.12. Állítás szerint egy szakasz összes pontjában eltűnik a görbület, a $\gamma(u_1)$ és $\gamma(u_2)$ pontokat összekötő szakaszt nem tartalmazza a γ pályája. Ily módon a 3.18. Lemmából már következik, hogy a γ zárt görbe nem lehet konvex.

b) Az indirekt bizonyítás módszerével azt fogjuk igazolni, hogy amennyiben fennáll $k(t) \geq 0$ tetszőleges $t \in [0, b]$ esetén, akkor a γ egyszerű zárt görbe konvex.

Tegyük fel, hogy $k \geq 0$ teljesül, de a γ görbe nem konvex. Ekkor van olyan $t \in [0, b]$ érték, hogy a $h_t(u) = \langle \gamma(u) - \gamma(t), \mathbf{N}(t) \rangle$ formulával definiált $h_t : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény

előjelet vált. A h_t függvény vegye fel az u_1 helyen a minimumát és az u_2 helyen a maximumát. Eszerint igaz $h_t(u_1) < 0$ és $h_t(u_2) > 0$.

A γ görbe t , u_1 , u_2 pontjaiban az érintőegyenesek párhuzamosak a $\mathbf{T}(t)$ vektorral. Vegyük észre, hogy amennyiben a $\gamma(t)$, $\gamma(u_1)$ és $\gamma(u_2)$ pontok közül kiválasztunk kettőt, akkor azok összekötő szakasza $h_t(u_1) < 0$ és $h_t(u_2) > 0$ miatt nem párhuzamos $\mathbf{T}(t)$ -vel, tehát a szakaszt nem tartalmazza a γ pályája.

Ugyanakkor a három érintő párhuzamossága miatt két pontban az érintő egységvektor megegyezik. Tegyük most fel, hogy a $c_1, c_2 \in \{t, u_1, u_2\}$ paraméterértékekre, fennáll $\mathbf{T}(c_1) = \mathbf{T}(c_2)$ és $c_1 < c_2$.

A $k \geq 0$ egyenlőtlenségből és a (3.8) összefüggésből adódik, hogy az $\alpha : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fedőleképezés monoton növekvő, továbbá a 3.16. Tétel miatt $\alpha(b) - \alpha(0) = 2\pi$ teljesül. Ezekből az következik, hogy az α függvény konstans a $[c_1, c_2]$ intervallumon. Eszerint a k görbület eltűnik ezen intervallumon, tehát a $\gamma(c_1)$ és $\gamma(c_2)$ pontokat összekötő szakaszt tartalmazza a γ pályája. Ez viszont ellentmond a korábbi megállapításunknak. \square

3.20. Definíció Legyen adva egy $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ zárt görbe. A $\gamma(t)$ pontot a γ csúcspontjának mondjuk, amennyiben fennáll $k'(t) = 0$.

Megjegyzés Tegyük fel, hogy a γ zárt görbe görbülete sehol sem tűnik el, és vegyük γ -nak a σ evolútáját, amely szintén egy zárt görbe. A (3.4) összefüggés szerint a σ görbe sebességvektora pontosan akkor tűnik el a $t \in I$ helyen, ha igaz $k'(t) = 0$. Ekkor a $\gamma(t)$ pontban nem értelmezhető a σ evolúta érintője, és szokás azt mondani, hogy az evolútának itt törése van. Ez indokolja a csúcspont elnevezést. (Példaként lásd az ellipszis evolútáját a 3.1. ábrán.)

Ha veszünk egy zárt síkgörbét, akkor a k függvény valamelyik pontban felveszi a minimumát, illetve egy másik pontban a maximumát, és ezeken a helyeken a k deriváltja eltűnik. Ebből adódik, hogy bármely zárt síkgörbének van legalább két csúcspontja.

Az alábbi kijelentést a négy csúcspont tétele néven szokták említeni.

3.21. Tétel Egy konvex zárt síkgörbének legalább négy csúcspontja van.

Bizonyítás. Legyen adott egy ívhossz szerint paraméterezett $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt görbe, amely konvex. Ily módon a 3.19. Tételből adódik, hogy a k függvény nem vált előjelet. A γ görbéről a továbbiakban feltesszük, hogy nincs olyan valódi részintervallum $[0, b]$ -ben, amelyen a k görbületi függvény konstans lenne.

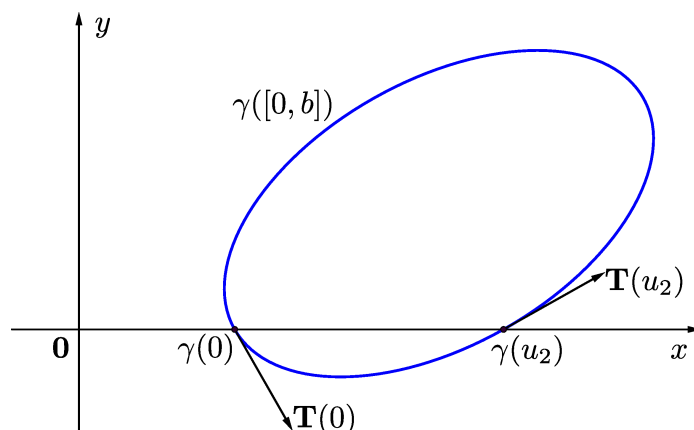
Az alábbiak során az esetet vizsgáljuk, amikor fennáll $k(s) \geq 0$ tetszőleges $s \in [0, b]$ mellett. Átparaméterezéssel mindig el tudjuk érni, hogy a folytonos k függvény az $u_1 = 0$ helyen vegye fel a maximumát. Jelölje továbbá u_2 azt a helyet, ahol k a minimumát veszi fel.

Tegyük fel, hogy k -nak van egy harmadik lokális szélsőérték helye is. Konkrétan tegyük fel a következőt. Van egy olyan $u_3 \in [0, b)$ hely, hogy $\gamma(u_3)$ különbözik a $\gamma(0)$

ponttól és k -nak lokális maximuma van u_3 -ban. A $\gamma(u_1)$, $\gamma(u_3)$ pontok a γ zárt görbe pályáját felbontják két egyszerű görbéivre. A $\gamma(0)$, $\gamma(u_3)$ pontokat összekötő két görbéi közül vegyük azt, amelyik nem tartalmazza a $\gamma(u_2)$ pontot. Ezen az íven mindenképp létezik egy olyan $\gamma(u_4)$ pont, ahol a k -nak lokális minimuma van, ami azt igazolja, hogy a γ görbének van legalább négy csúcspontja. Ha a harmadik u_3 lokális szélsőérték helyen a k függvénynek lokális minimuma van, hasonlóan járunk el.

Azt kellene tehát belátnunk, hogy nem fordulhat elő az az eset, amikor k -nak az $u_1 = 0$, u_2 pontokon kívül nincs más lokális szélsőérték helye.

Indirekt módon tegyük fel, hogy k -nak nincs további lokális szélsőérték helye. Ekkor a k függvény monoton csökkenő az $[0, u_2]$ intervallumon, illetve monoton növekvő az $[u_2, b]$ intervallumon. Ennek következtében $k'(s) \leq 0$ igaz $s \in [0, u_2]$ esetén, illetve fennáll $k'(s) \geq 0$, amennyiben $s \in [u_2, b]$. Irányítástartó izometria alkalmazásával el lehet érni, hogy a $\gamma(0)$, $\gamma(u_2)$ pontok az \mathbb{R}^2 sík első koordináta-tengelyére essenek. (Lásd a 3.6. ábrát.) Tekintsük ekkor a γ görbe $x, y : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ koordináta-függvényeit, melyekkel teljesül $\gamma(s) = x(s) \mathbf{e}_1 + y(s) \mathbf{e}_2$.



3.6. ábra. Illusztráció a 3.21. Tétel bizonyításához.

Vegyük észre, hogy a konvexitás miatt $\gamma(0)$, $\gamma(u_2)$ végpontokkal meghatározott görbéiek az első koordináta-tengely más-más oldalára esnek. Tegyük most fel, hogy fennáll $y(s) < 0$ az $s \in (0, u_2)$ esetben, továbbá $y(s) > 0$ amennyiben $s \in (u_2, b)$. Ily módon teljesül $y(s) k'(s) \geq 0$ tetszőleges $s \in [0, b]$ esetén. Világos, hogy vannak olyan részintervallumok, amelyeken az $y(s) k'(s)$ szorzat pozitív. Ennek következtében fennáll

$$\int_0^b y(s) k'(s) ds > 0.$$

Vegyük most az első Frenet-formulából adódó

$$\mathbf{T}'(s) = \boldsymbol{\gamma}''(s) = k(s) \mathbf{N}(s) = k(s) (-y'(s) \mathbf{e}_1 + x'(s) \mathbf{e}_2)$$

összefüggést, amely alapján teljesül $x''(s) = -k(s)y'(s)$. Ezt alkalmazva viszont azt nyerjük, hogy igaz

$$\int_0^b y(s) k'(s) ds = \left[y(s) k(s) \right]_0^b - \int_0^b y'(s) k(s) ds = \int_0^b x''(s) ds = \left[x'(s) \right]_0^b = 0.$$

A kapott összefüggés pedig ellentmond az integrálra előbb kapott egyenlőtlenségnek. Ez pedig azt jelenti, hogy a k függvénynek kettőnél több, tehát legalább négy lokális szélsőértékhelye van. \square

3.4. Az implicit egyenlettel leírt síkgörbe

Legegyszerűbben egy differenciálható valós függvény grájként kaphatunk sima görbét az \mathbb{R}^2 síkban.

3.22. Definíció Legyen adott egy C^∞ -osztályú $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény. A $\boldsymbol{\gamma}(t) = t \mathbf{e}_1 + h(t) \mathbf{e}_2$ összefüggéssel megadott $\boldsymbol{\gamma}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ sima görbét a h függvény grafikonjának (más szóval gráfjának) mondjuk.

A $\boldsymbol{\gamma}$ görbe pályáját is a h függvény grafikonjának nevezzük.

Vegyük egy C^∞ -osztályú $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést. Az $f(x, y) = 0$ egyenlettel leírt alakzaton 0-nak az f szerinti inverz képét, vagyis az $\mathcal{A} = f^{-1}(0)$ ponthalmazt értjük.

Tegyük fel, hogy a sík egy rögzített $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ pontjára fennáll $(p, q) \in f^{-1}(0)$ és a $\partial_i f(p, q)$ ($i = 1, 2$) parciális deriváltak közül legalább az egyik nem 0. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ekkor a pontnak van olyan $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$ nyílt környezete, amelynél a $\mathcal{K} \cap \mathcal{A}$ metszet egy egyszerű görbeív.

Tekintsük azt az esetet, amikor igaz $\partial_2 f(p, q) \neq 0$. Alkalmazzuk az implicit előállítású függvény tételét. Eszerint vannak olyan (a_1, b_1) , (a_2, b_2) nyílt intervallumok \mathbb{R} -ben, ahol $p \in (a_1, b_1)$, $q \in (a_2, b_2)$ és bármely $t \in (a_1, b_1)$ esetén egyértelműen létezik egy olyan $u \in (a_2, b_2)$ szám, amellyel fennáll $f(t, u) = 0$. Ha vesszük a $h(t) = u$ kifejezéssel értelmezett $h: (a_1, b_1) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, akkor az C^∞ -osztályú és teljesül $h'(t) = -\frac{\partial_1 f(t, h(t))}{\partial_2 f(t, h(t))}$.

Tekintsük a $\boldsymbol{\gamma}(t) = t \mathbf{e}_1 + h(t) \mathbf{e}_2$ egyenlettel meghatározott $\boldsymbol{\gamma}: (a_1, b_1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ görbét, továbbá a $\mathcal{K} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ nyílt téglalapot az \mathbb{R}^2 síkban. A fentiek alapján a $\mathcal{K} \cap \mathcal{A}$ metszet megegyezik a $\boldsymbol{\gamma}$ görbe pályájával, azaz a h függvény grafikonjával.

Vezessük be a $c_1 = \partial_1 f(p, q)$ és $c_2 = \partial_2 f(p, q)$ jelölést. A $\boldsymbol{\gamma}$ görbe p -beli deriváltjaira nyilván igaz $\boldsymbol{\gamma}'(p) = \mathbf{e}_1 + h'(p) \mathbf{e}_2 = \frac{1}{c_2} (c_2 \mathbf{e}_1 - c_1 \mathbf{e}_2)$ és $\boldsymbol{\gamma}''(p) = h''(p) \mathbf{e}_2$. Világos,

hogy a $\mathcal{G} = \mathcal{K} \cap \mathcal{A}$ görbeív (p, q) pontbeli görbületének kiszámításához szükség van a $h''(p)$ értékre is. Ezt a $h'(t) = -\frac{\partial_1 f(t, h(t))}{\partial_2 f(t, h(t))}$ kifejezés deriválásával kaphatjuk meg. Az f függvény másodrendű parciális deriváltjaira alkalmazzuk az $m_{ij} = \partial_{i,j} f(p, q)$ ($i, j = 1, 2$) jelölést. Innen közvetlen számolással adódik, hogy fennáll

$$h''(p) = -\frac{1}{(c_2)^3} (m_{11} (c_2)^2 - 2 m_{12} c_1 c_2 + m_{22} (c_1)^2).$$

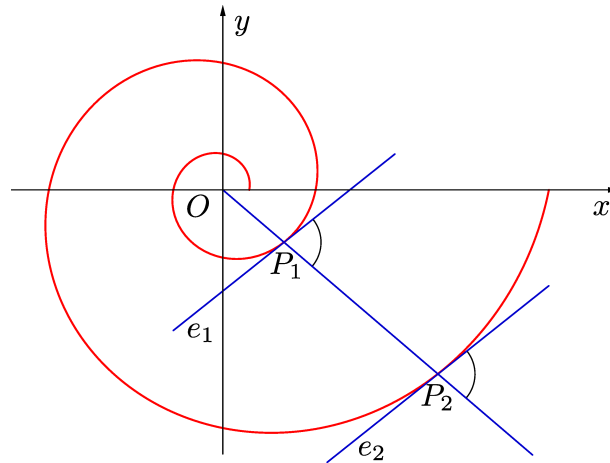
Ennek ismeretében a (2.4) vagy a (3.2) összefüggés felhasználásával a következő eredményre jutunk.

3.23. Következmény *A \mathcal{G} egyszerű görbeív (p, q) pontbeli görbületére fennáll*

$$\kappa = \frac{|m_{11} (c_2)^2 - 2 m_{12} c_1 c_2 + m_{22} (c_1)^2|}{((c_1)^2 + (c_2)^2)^{3/2}}. \quad (3.9)$$

3.5. Síkgörbékre vonatkozó feladatok

3.1. Feladat *Tekintsük azt az \mathbb{R}^2 -beli alakzatot, amelynek a síkbeli r, φ polárkoordinátákra vonatkozó egyenlete $r = a \exp(c\varphi)$, amelyben $a > 0$ és $c \neq 0$ rögzített számok. Ezt nevezik a szakirodalomban logaritmikus spirálisnak. (Lásd a 3.7. ábrát.) Adjunk meg egy olyan γ reguláris görbét, amelynek pályáját a fenti egyenlet írja le. Igazoljuk, hogy a logaritmikus spirális az O kezdőpontból kiinduló félegyeneseket konstans szögben metszi.*

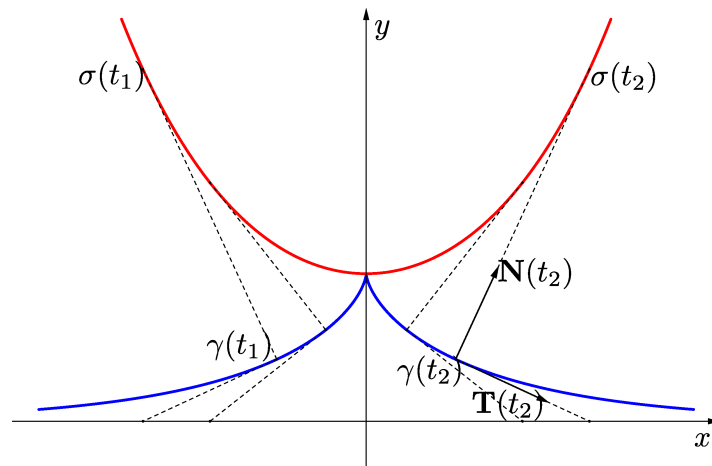


3.7. ábra. A logarimikus spirális azon szegmense, ahol φ a $[0, 4\pi]$ intervallumot futja be.

3.2. Feladat Tekintsük azt a $\gamma : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ síkgörbét, ahol tetszőleges $t \in (0, 2\pi)$ esetén fennáll $\gamma(t) = (1 - \cos t)(\cos t \mathbf{e}_1 + \sin t \mathbf{e}_2)$. Határozzuk meg a kardioidnak (más szóval szívgörbének) nevezett γ görbe kíséző Frenet-bázisát.

3.3. Feladat Tekintsük a $\gamma(t) = (t - \sin t) \mathbf{e}_1 + (1 - \cos t) \mathbf{e}_2$ egyenlettel leírt $\gamma : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ görbét, azaz a közönséges cikloist. Határozzuk meg a γ síkgörbe kíséző Frenet-bázisát és előjeles görbületi függvényét.

3.4. Feladat Vegyük a $\gamma(t) = a \cos t \mathbf{e}_1 + b \sin t \mathbf{e}_2$ egyenlettel leírt $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ síkgörbét ($a > 0, b > 0$), melynek pályája egy ellipszis. Határozzuk meg γ kíséző Frenet-bázisát, előjeles görbületi függvényét és az evolútáját.



3.8. ábra. A traktrix és az evolútája.

3.5. Feladat Tekintsük a $\gamma(t) = a(\ln(\operatorname{tg} \frac{t}{2}) + \cos t) \mathbf{e}_1 + a \sin t \mathbf{e}_2$ összefüggés által leírt $\gamma : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ sima görbét, melynek pályáját traktriznak nevezzük. (Lásd a 3.8 ábrát.) Vegyük a t -beli ($t \neq 0$) érintőegyenest azon szakaszát, amelynek az egyik végpontja $\gamma(t)$, a másik pedig az x_1 tengellyel vett metszéspont. Igazoljuk, hogy a szakasz hossza nem függ a t megválasztásától.

3.6. Feladat Az előző feladatban szereplő γ görbének a t ($0 < t < \frac{\pi}{2}$) helyen vett előjeles görbületét jelölje $k(t)$, a normális egységvektorát pedig $\mathbf{N}(t)$. Tekintsük a $\sigma(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k(t)} \mathbf{N}(t)$ egyenlettel meghatározott $\sigma : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ görbét, azaz a $\gamma|_{(0, \frac{\pi}{2})}$ evolútáját. (Lásd a 3.8. ábrát.) Bizonyítsuk be, hogy a σ koordináta-függvényei kielégítik az $y = a \operatorname{ch}(\frac{x}{a})$ egyenletet.

3.7. Feladat Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ reguláris görbe, amelynél az $a \in I$ pontban $\kappa(a) \neq 0$ teljesül. Vegyünk egy olyan t_n ($n \in \mathbb{N}$) számsorozatot, amelyre fennáll $t_n \in I$, $t_n \neq a$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a$. Jelölje P_n a γ görbe t_n -beli és a -beli normális egyeneseinek a metszéspontját. Bizonyítsuk be, hogy a P_n ($n \in \mathbb{N}$) pontsorozat konvergál a γ a helyen vett simulókörének a középpontjához.

3.8. Feladat Vegyük a $\gamma(t) = \operatorname{ch} t \mathbf{e}_1 + \operatorname{sh} t \mathbf{e}_2$ egyenlettel leírt $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ egyszerű síkgörbét, melynek pályája az $x^2 - y^2 = 1$ egyenletű hiperbola egyik ága. Határozzuk meg a γ görbe k előjeles görbületi függvényét, továbbá a $k(\gamma)$ teljes előjeles görbületet, vagyis az $\int_{-\infty}^{\infty} k(t) v(t) dt$ improprius integrál értékét.

3.9. Feladat Vegyük a $\gamma(t) = (t - 2) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{3} t^3 \mathbf{e}_2$ összefüggéssel leírt $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ egyszerű síkgörbét. Határozzuk meg γ előjeles görbületi függvényét, továbbá a $\gamma|_{[0,1]}$ görbedarab teljes előjeles görbületét.

3.10. Feladat Tekintsük a $\gamma(t) = 2 \sin t \mathbf{e}_1 + \sin(2t) \mathbf{e}_2$ egyenlettel leírt $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ reguláris zárt görbét. Határozzuk meg a γ előjeles görbületi függvényét és a körülfordulási számát.

3.11. Feladat Egy ívhossz szerint paraméterezett \mathbb{R}^2 -beli γ görbének ismerjük a $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ előjeles görbületi függvényét. Emellett egy $s_0 \in I$ helyen adva van a $\gamma(s_0) = x_0 \mathbf{e}_1 + y_0 \mathbf{e}_2$ pont és a $\gamma'(s_0) = \cos \alpha_0 \mathbf{e}_1 + \sin \alpha_0 \mathbf{e}_2$ egységvektor. Tekintsük azt az $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre fennáll $\alpha(s) = \alpha_0 + \int_{s_0}^s k(u) du$. Mutassuk meg, hogy a γ koordináta-függvényeire igaz

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s \cos \alpha(u) du, \quad y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \sin \alpha(u) du.$$

3.12. Feladat Határozzuk meg explicit formában annak az ívhossz szerint paraméterezett $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ görbének a koordináta-függvényeit, amelyre igaz $\gamma(0) = \mathbf{e}_2$, $\gamma'(0) = \mathbf{e}_1$, és amelynek k előjeles görbületi függvényére fennáll $k(s) = \frac{1}{1+s^2}$ ($s \in \mathbb{R}$).

3.13. Feladat Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ reguláris görbe. Ennek egy $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ pontra vonatkozó talpponti görbéjén a $\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{p} + \langle \gamma(t) - \mathbf{p}, \mathbf{N}(t) \rangle \cdot \mathbf{N}(t)$ egyenlettel meghatározott $\boldsymbol{\mu} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ differenciálható leképezést értjük.

Igazoljuk, hogy a $\gamma(t) = (1 + \cos t) \mathbf{e}_1 + \sin t \mathbf{e}_2$ ($t \in [0, 2\pi]$) összefüggéssel leírt $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ görbe $\mathbf{0}$ pontra vonatkozó talpponti görbéjének a pályája egy kardioid.

3.14. Feladat Legyen adva az \mathbb{R}^2 síkban egy ívhossz szerint paraméterezett $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt görbe. Jelölje κ_0 a $\kappa : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ görbületi függvénynek a maximális értékét. Mutassuk meg, hogy a γ ívhosszára fennáll a $b \geq \frac{2\pi}{\kappa_0}$ egyenlőtlenség.

3.15. Feladat Tekintsünk egy olyan $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt görbét, amelynek a pályáját tartalmazza egy \mathbb{R}^2 -beli r sugarú körlemez. Jelölje κ_0 a γ maximális görbületét. Bizonyítsuk be, hogy teljesül a $\kappa_0 \geq \frac{1}{r}$ összefüggés.

3.16. Feladat Legyen adva egy olyan $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt görbe, amelynek pályája megegyezik egy \mathbb{R}^2 -beli D zárt konvex tartomány határával. A D -ről feltesszük, hogy nem körlemez. Bizonyítsuk be, hogy γ legkisebb sugarú simulókörét le lehet gördíteni a D tartomány belsejében a γ pályája mentén.

3.17. Feladat Tekintsük az \mathbb{R}^2 síkban az $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} - 1 = 0$ egyenlettel leírt hiperbolát. Paraméterezés alkalmazása nélkül számítsuk ki a hiperbola görbületét a $\mathbf{p} = (4, -3)$ pontban a (3.9) összefüggés alapján.

4. fejezet

Általános típusú görbék az \mathbb{R}^n térben

Reguláris sima görbék az \mathbb{R}^n euklideszi térben

Elsőként idézzünk fel néhány olyan fogalmat és összefüggést, amelyek már szerepeltek a második fejezetben az \mathbb{R}^3 -beli görbék tárgyalása során.

Az \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) térben vett sima görbén egy C^∞ -osztályú $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezést értünk. Tegyük fel, hogy a γ görbe reguláris, azaz a $v = \|\gamma'\|$ sebességfüggvény sehol sem tűnik el. Vegyük a γ görbe $\mathbf{T} = \frac{1}{v} \gamma'$ érintő egységvektormezőjét. Ennek alkalmazásával definiálni lehet a κ görbületi függvényt is a $\kappa(t) = \frac{1}{v(t)} \|\mathbf{T}'(t)\|$ összefüggéssel.

A görbületet a γ leképezés első két deriváltjából is ki lehet számolni. A $v(t) = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle^{1/2}$ kifejezés alapján fennáll $v'(t) = \frac{1}{v(t)} \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle$. Ennek következtében igaz

$$\mathbf{T}' = \frac{1}{v} \gamma'' - \frac{v'}{v^2} \gamma' = \frac{1}{v^3} (\|\gamma'\|^2 \gamma'' - \langle \gamma', \gamma'' \rangle \gamma').$$

Innen már adódik, hogy a $\mathbf{T}'(t)$ vektor normájára teljesül

$$\|\mathbf{T}'(t)\|^2 = \frac{1}{v(t)^4} (\|\gamma'(t)\|^2 \cdot \|\gamma''(t)\|^2 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle^2).$$

Ebből pedig azt nyerjük, hogy a γ reguláris görbe $t \in I$ pontban vett görbületére fennáll az alábbi összefüggés

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{\|\gamma'(t)\|^2 \cdot \|\gamma''(t)\|^2 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle^2}}{v(t)^3}. \quad (4.1)$$

A fenti egyenletből adódik, hogy $\kappa(t) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha a $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$ vektorok lineárisan összefüggőek.

Amennyiben a $t \in I$ helyen a $\kappa(t)$ görbület nem tűnik el, akkor értelmezni lehet az $\mathbf{F}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \mathbf{T}'(t)$ főnormális egységvektort is. Ez esetben érvényben maradnak a 2. fejezet azon állításai, amelyek a simulósíkkal és a simulókörrrel kapcsolatosak.

4.1. Az általános görbe kíséző Frenet-bázisa

4.1. Definíció Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sima görbe. A γ mentén vett $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sima vektormezőkről azt mondjuk, hogy azok γ -nak egy ortonormált kíséző bázisát alkotják, ha bármely $t \in I$ esetén a $\mathbf{B}_1(t), \dots, \mathbf{B}_n(t)$ vektorok az \mathbb{R}^n vektortér ortonormált bázisát képezik.

4.2. Definíció A $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sima görbét általános típusúnak (rövidebben általánosnak) mondjuk, ha tetszőleges $t \in I$ helyen a $\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)$ vektorok lineárisan független rendszert alkotnak.

Megjegyzés Legyen $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy olyan sima görbe, ahol valamely $t \in I$ pontban a $\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)$ vektorok lineárisan függetlenek. Ez esetben van olyan $J \subset I$ intervallum, amelynél $t \in J$ és a $\gamma|_J$ görbe általános típusú.

4.3. Definíció Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ általános típusú görbe. A γ mentén vett $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektormezőkről azt mondjuk, hogy a γ görbe kíséző Frenet-bázisát alkotják, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

- (1) A $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n$ vektormezők a γ -nak egy ortonormált kíséző bázisát képezik.
- (2) A $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(i)}(t)$ vektorok által meghatározott \mathbb{R}^n -beli lineáris altér megegyezik a $\mathbf{B}_1(t), \dots, \mathbf{B}_i(t)$ vektorok által generált altérrel tetszőleges $1 \leq i \leq n-1$ index és $t \in I$ paraméter esetén.
- (3) Az $\mathcal{L}(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(i)}(t))$ lineáris altérben a $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(i)}(t)$ és $\mathbf{B}_1(t), \dots, \mathbf{B}_i(t)$ bázisok ugyanazt az irányítást képviselik.
- (4) A $\mathbf{B}_1(t), \dots, \mathbf{B}_n(t)$ bázis az \mathbb{R}^n természetes orientációját adja.

A definíció alapján könnyen be lehet látni, hogy igaz az alábbi kijelentés.

4.4. Állítás Bármely $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ általános típusú görbének egyértelműen létezik a kíséző Frenet-bázisa.

Bizonyítás. A γ általános görbe mentén vegyük azon $\mathbf{E}_i, \mathbf{B}_i$ ($i = 1, \dots, n$) vektormezőket, melyeket az alábbi rekurzív eljárással értelmezünk.

Kiindulásul tekintsük az I intervallumon értelmezett $\mathbf{E}_1 = \gamma'$ és $\mathbf{B}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{E}_1\|} \mathbf{E}_1$ vektorértékű függvényeket. Ha az $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_{i-1}$ és $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{i-1}$ vektormezőket már meghatároztuk, akkor az

$$\mathbf{E}_i(t) = \gamma^{(i)}(t) - \sum_{r=1}^{i-1} \langle \gamma^{(i)}(t), \mathbf{B}_r(t) \rangle \mathbf{B}_r(t) \quad (4.2)$$

($t \in I$) összefüggéssel értelmezzük az $\mathbf{E}_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($i = 2, \dots, n$) leképezést.

Mivel a γ görbe általános, nyilván fennáll $\mathbf{E}_i(t) \neq \mathbf{0}$ feltéve, hogy $i \leq n - 1$. Ez esetben legyen \mathbf{B}_i az a vektormező, melyet a $\mathbf{B}_i(t) = \frac{1}{\|\mathbf{E}_i(t)\|} \mathbf{E}_i(t)$ kifejezéssel nyerünk.

Végül \mathbf{B}_n legyen az a vektormező a γ görbe mentén, ahol bármely $t \in I$ -re $\mathbf{B}_n(t)$ megegyezik a $[\mathbf{B}_1(t), \dots, \mathbf{B}_{n-1}(t)]$ vektoriális szorzattal, melyet az (1.3) kifejezéssel számolhatunk ki.

Világos, hogy egy rögzített i ($2 \leq i \leq n - 1$) indexnél tetszőleges $t \in I$ esetén a $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(i)}(t)$ vektorok ugyanazt az \mathbb{R}^n -beli lineáris alteret generálják, mint a $\mathbf{B}_1(t), \dots, \mathbf{B}_i(t)$ vektorok, melyek egy ortonormált bázist képeznek. Ha ebben az altérben vesszük a $\mathbf{B}_1(t), \dots, \mathbf{B}_i(t)$ bázisról a $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(i)}(t)$ bázisra való áttérés mátrixát, akkor $\mathbf{E}_i(t) = \|\mathbf{E}_i(t)\| \mathbf{B}_i(t)$ és (4.2) alapján egy olyan mátrix adódik, amelynek főátlójában pozitív értékek szerepelnek és a főátló alatti elemek eltűnnek. Ez pedig azt igazolja, hogy a mátrix determinánsa pozitív, tehát a bázisok ugyanazt az irányítást képviselik az altérben.

Világos, hogy a fentiek során értelmezett $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n$ vektormezők a γ görbe kísérő Frenet-bázisát adják. A konstrukció alapján pedig belátható az is, hogy ezen kívül a γ görbének már nincs további kísérő Frenet-bázisa. \square

A görbe Cartan-mátrixa és görbületi függvényei

Legyen adott a $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ általános görbe. Tekintsük a γ kísérő Frenet-bázisát képező $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektormezőket.

A \mathbf{B}_i leképezés deriválásával nyert $\mathbf{B}'_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényt fejezzük ki a Frenet-bázis elemeivel a $\mathbf{B}'_i(t) = \sum_{j=1}^n C_{i,j}(t) \cdot \mathbf{B}_j(t)$ alakban. Világos, hogy az így nyert $C_{i,j} : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j = 1, \dots, n$) függvények differenciálhatóak és tetszőleges $t \in I$ helyen fennáll $C_{i,j}(t) = \langle \mathbf{B}'_i(t), \mathbf{B}_j(t) \rangle$.

4.5. Definíció A γ görbe $t \in I$ helyen vett Cartan-mátrixának mondjuk azt az n -edrendű kvadratikus $\mathbf{C}(t)$ mátrixot, ahol $C_{i,j}(t) = \langle \mathbf{B}'_i(t), \mathbf{B}_j(t) \rangle$ az i -edik sor j -edik eleme.

A következő tétel arra mutat rá, hogy a Cartan-mátrix nem eltűnő elemeit a (4.2) összefüggéssel definiált \mathbf{E}_i ($i = 1, \dots, n$) vektormezők felhasználásával is meg lehet határozni.

4.6. Tétel Egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ általános görbe Cartan-mátrixára igazak az alábbiak.

- (1) Bármely $t \in I$ esetén a $\mathbf{C}(t)$ mátrix antiszimmetrikus.
- (2) Ha az i, j indexekre teljesül $i + 1 < j$, akkor $C_{i,j}(t) = 0$.
- (3) A Cartan-mátrix nem eltűnő elemeire fennáll

$$C_{i,i+1}(t) = \frac{\|\mathbf{E}_{i+1}(t)\|}{\|\mathbf{E}_i(t)\|} \quad (i = 1, \dots, n - 2) \quad \text{és}$$

$$C_{n-1,n}(t) = \frac{\langle \mathbf{E}_n(t), \mathbf{B}_n(t) \rangle}{\|\mathbf{E}_{n-1}(t)\|} = \pm \frac{\|\mathbf{E}_n(t)\|}{\|\mathbf{E}_{n-1}(t)\|}.$$

Bizonyítás. A tételben szereplő kijelentéseket lépésenként igazoljuk.

(1) Amennyiben deriváljuk a $\langle \mathbf{B}_i(t), \mathbf{B}_j(t) \rangle = \delta_{ij}$ összefüggést, akkor a $\langle \mathbf{B}'_i(t), \mathbf{B}_j(t) \rangle + \langle \mathbf{B}_i(t), \mathbf{B}'_j(t) \rangle = 0$ egyenletet kapjuk. Eszerint valóban teljesül $C_{i,j}(t) + C_{j,i}(t) = 0$ ($i, j = 1, \dots, n$).

(2) A továbbiakban feltesszük, hogy az i indexre fennáll $i \leq n - 2$. A $\mathbf{B}_i(t)$ vektor tetszőleges $t \in I$ esetén benne van az i -dimenziós $\mathcal{L}(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(i)}(t))$ lineáris altérben. Eszerint vannak olyan $D_{ir} : I \rightarrow \mathbb{R}$ sima függvények ($r = 1, \dots, i$), melyekkel teljesül a $\mathbf{B}_i(t) = \sum_{r=1}^i D_{ir}(t) \gamma^{(r)}(t)$ összefüggés. Ebből pedig azt kapjuk, hogy a $\mathbf{B}'_i(t)$ vektor eleme az $\mathcal{L}(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(i+1)}(t))$ lineáris altérnek, melyet a $\mathbf{B}_1(t), \dots, \mathbf{B}_{i+1}(t)$ ortonormált vektorok is generálnak. Amennyiben a j indexre igaz $j > i + 1$, akkor $\mathbf{B}_j(t)$ merőleges erre az altérre és a benne lévő $\mathbf{B}'_i(t)$ vektorra. Ily módon fennáll $C_{i,j}(t) = \langle \mathbf{B}'_i(t), \mathbf{B}_j(t) \rangle = 0$.

(3) Az \mathbf{E}_i vektormezőket az előző állítás bizonyításában a kísérő Frenet-bázis konstrukciója során definiáltuk a (4.2) egyenlettel. Emlékezzünk rá, hogy amennyiben igaz $i \leq n - 1$, akkor az $\mathbf{E}_i(t)$ és $\mathbf{B}_i(t)$ vektorok iránya megegyezik.

Az I intervallumon vegyük az $f_i = \frac{1}{\|\mathbf{E}_i\|}$ ($i = 1, \dots, n - 1$) függvényeket. Eszerint teljesül $\mathbf{B}_i(t) = f_i(t) \mathbf{E}_i(t)$ és $\mathbf{B}'_i(t) = f'_i(t) \mathbf{E}_i(t) + f_i(t) \mathbf{E}'_i(t)$ tetszőleges $t \in I$ helyen. Ennek következtében igaz

$$C_{i,i+1}(t) = \langle \mathbf{B}'_i(t), \mathbf{B}_{i+1}(t) \rangle = f_i(t) \langle \mathbf{E}'_i(t), \mathbf{B}_{i+1}(t) \rangle. \quad (4.3)$$

A \mathbf{E}_i leképezés deriváltjára nyilván teljesül

$$\mathbf{E}'_i = \gamma^{(i+1)} - \sum_{r=1}^{i-1} (\langle \gamma^{(i+1)}, \mathbf{B}_r \rangle + \langle \gamma^{(i)}, \mathbf{B}'_r \rangle) \mathbf{B}_r + \sum_{r=1}^{i-1} \langle \gamma^{(i)}, \mathbf{B}_r \rangle \mathbf{B}'_r.$$

Az előzőekben már beláttuk, hogy $r \leq i - 1$ esetén igaz $C_{r,i+1}(t) = \langle \mathbf{B}'_r(t), \mathbf{B}_{i+1}(t) \rangle = 0$. Ily módon, ha vesszük az $\mathbf{E}'_i(t)$ és $\mathbf{B}_{i+1}(t)$ vektorok skaláris szorzatát, akkor (4.3) alapján fennáll

$$C_{i,i+1}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{E}_i(t)\|} \langle \gamma^{(i+1)}(t), \mathbf{B}_{i+1}(t) \rangle = \frac{1}{\|\mathbf{E}_i(t)\|} \langle \mathbf{E}_{i+1}(t), \mathbf{B}_{i+1}(t) \rangle. \quad (4.4)$$

Amennyiben $i \leq n - 2$, akkor teljesül $\langle \mathbf{E}_{i+1}(t), \mathbf{B}_{i+1}(t) \rangle = \|\mathbf{E}_{i+1}(t)\|$. Az $\mathbf{E}_n(t)$ és $\mathbf{B}_n(t)$ vektorok iránya azonban ellentétes is lehet, emiatt skaláris szorzatukra az előjeles $\langle \mathbf{E}_n(t), \mathbf{B}_n(t) \rangle = \pm \|\mathbf{E}_n(t)\|$ kifejezés adódik.

Ezek ismeretében a (4.4) összefüggés már igazolja a tételünk harmadik kijelentését. \square

4.7. Definíció Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ általános görbe. A $k_i(t) = \frac{1}{v(t)} \langle \mathbf{B}'_i(t), \mathbf{B}_{i+1}(t) \rangle$ kifejezéssel értelmezett $k_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a γ görbe i -edik görbületi függvényének mondjuk ($i = 1, \dots, n - 1$).

A görbületi függvények és Cartan-mátrix elemei között az előző definíciók alapján fennáll a $k_i(t) = \frac{1}{v(t)} C_{i,i+1}(t)$ kapcsolat. A 4.6. Tételből azonnal következik, hogy igazak az alábbi kijelentések.

4.8. Következmény *A k_r ($r = 1, \dots, n-2$) görbületi függvények pozitívak. A kísérő Frenet-bázist alkotó vektormezők deriváltjaira teljesülnek az alábbi egyenletek:*

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'_1 &= v k_1 \mathbf{B}_2, \\ \mathbf{B}'_i &= -v k_{i-1} \mathbf{B}_{i-1} + v k_i \mathbf{B}_{i+1} \quad (i = 2, \dots, n-1), \\ \mathbf{B}'_n &= -v k_{n-1} \mathbf{B}_{n-1}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

A fenti (4.5) összefüggéseket a γ általános görbére vonatkozó Frenet-formuláknak nevezzük.

Megjegyzés Világos, hogy $n \geq 3$ esetén $\mathbf{B}_1 = \mathbf{T}$ és $\mathbf{B}_2 = \mathbf{F}$ teljesül, továbbá a $k_1: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény azonos a κ függvénnyel. Ha $n = 3$, akkor k_2 megegyezik a torzió-függvénnyel.

A görbületi függvények kiszámítása

Az alábbiak során megmutatjuk, hogy a görbületi függvényeket ki lehet számítani γ deriváltjaiból akkor is, ha nem ismerjük a kísérő Frenet-bázis vektormezőit.

Legyen adott egy $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ általános görbe. A γ görbe deriváltjait fejezzük ki a $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n$ kísérő Frenet-bázis vektoraival a

$$\gamma^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^n A_{ji}(t) \cdot \mathbf{B}_j(t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.6)$$

alakban. Tetszőleges $t \in I$ helyen az $A_{ji}(t)$ ($i, j = 1, \dots, n$) elemekkel meghatározott $n \times n$ -es mátrix legyen $\mathbf{A}(t)$. Célszerű itt megjegyeznünk, hogy $n \geq 3$ esetén az első három deriváltra a Frenet-képletek felhasználásával a következő kifejezéseket nyerjük:

$$\begin{aligned} \gamma' &= v \mathbf{B}_1, & \gamma'' &= v' \mathbf{B}_1 + v^2 k_1 \mathbf{B}_2, \\ \gamma''' &= (v'' - v^3 (k_1)^2) \mathbf{B}_1 + (v' v k_1 + (v^2 k_1)') \mathbf{B}_2 + v^3 k_1 k_2 \mathbf{B}_3. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az $\mathbf{A}(t)$ mátrix elemeire $j > i$ esetén $A_{ji}(t) = 0$ teljesül. A teljes indukció módszerével és a Frenet-formulákkal igazolható, hogy tetszőleges $t \in I$ esetén az $\mathbf{A}(t)$ főátlóbeli elemeire fennáll az

$$A_{mm}(t) = v(t)^m \cdot k_1(t) \dots k_{m-1}(t)$$

összefüggés, amennyiben $m \geq 2$.

Jelölje $\mathbf{A}_m(t)$ az \mathbf{A} mátrixnak azt a sarokmátrixát, amelyet az $A_{ij}(t)$ ($i, j = 1, \dots, m$) elemek alkotnak. A főátló alatti elemek eltűnését kihasználva ennek determinánsára a

$$\det \mathbf{A}_m(t) = v(t)^{\frac{1}{2}m(m+1)} \cdot \prod_{i=1}^{m-1} (k_i(t))^{m-i}$$

összefüggést kapjuk. Ebből az következik, hogy fennáll $k_1(t) = \frac{\det \mathbf{A}_2(t)}{v(t)^3}$ és

$$k_{m-1}(t) = \frac{\det \mathbf{A}_m(t)}{v(t)^{\frac{1}{2}m(m+1)} \cdot \prod_{i=1}^{m-2} (k_i(t))^{m-i}} \quad (m = 3, \dots, n). \quad (4.7)$$

Legyen $\mathbf{G}(t)$ a $t \in I$ pontbeli $\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(n)}(t)$ deriváltvektorok skaláris szorzataiból nyert Gram-mátrix. Eszerint a $\mathbf{G}(t)$ elemei a $G_{ij}(t) = \langle \gamma^{(i)}(t), \gamma^{(j)}(t) \rangle$ ($i, j = 1, \dots, n$) értékek.

A $\mathbf{G}(t)$ első m sorában és első m oszlopában lévő elemek sarokmátrixát jelölje $\mathbf{G}_m(t)$. Mivel a $\mathbf{B}_1(t), \dots, \mathbf{B}_n(t)$ vektorok egy ortonormált bázist képeznek \mathbb{R}^n -ben és az $\mathbf{A}(t)$ mátrixnak a főátló alatti elemei eltűnnek, a (4.6) kifejezés alapján teljesül $\mathbf{A}_m^T(t) \mathbf{A}_m(t) = \mathbf{G}_m(t)$. Ebből viszont már következik, hogy $m < n$ esetén igaz $\det \mathbf{A}_m(t) = \sqrt{\det \mathbf{G}_m(t)}$. Tehát a (4.7) összefüggésbe $\det \mathbf{A}_m(t)$ helyett beírhatjuk a $\sqrt{\det \mathbf{G}_m(t)}$ értéket feltéve, hogy $m < n$. Ily módon a görbületi függvényeket egy rekurzív eljárással is megkaphatjuk a $\mathbf{G}(t)$ mátrix elemeiből (4.1) és a (4.7) egyenletek alkalmazásával.

Mint ismeretes, a k_{n-1} görbületi függvény negatív értékeket is felvehet. Vegyük azonban észre, hogy fennáll $\det \mathbf{A}(t) = \langle [\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)], \gamma^{(n)}(t) \rangle$. Emiatt (4.7) szerint igaz

$$k_{n-1}(t) = \frac{\langle [\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)], \gamma^{(n)}(t) \rangle}{v(t)^{\frac{1}{2}n(n+1)} \cdot \prod_{i=1}^{n-2} (k_i(t))^{n-i}}. \quad (4.8)$$

A (4.8) összefüggés kapcsán tekintsük a γ görbe x_i ($i = 1, \dots, n$) koordináta-függvényeit, melyeket az $x_i(t) = \langle \gamma(t), \mathbf{e}_i \rangle$ összefüggés ír le. Legyen $\mathbf{H}(t)$ az a mátrix, ahol a j -edik sor i -edik eleme $H_{ji}(t) = x_i^{(j)}(t)$. Világos, hogy erre teljesül

$$\det \mathbf{H}(t) = \langle [\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)], \gamma^{(n)}(t) \rangle.$$

4.2. A görbületi függvények geometriai tartalma

Az $(n-1)$ -edik görbületi függvény eltűnésének geometriai jelentését adja meg a következő állítás, melynek bizonyítása analóg a 2.34. Állítás igazolásával.

4.9. Állítás *A $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ általános típusú görbe pályája benne van egy $(n-1)$ -dimenziós affin altérben akkor és csak akkor, ha $k_{n-1} = 0$ teljesül.*

Az alábbiak során azt vizsgáljuk, hogy egy általános görbe görbületi függvényei invariánsak-e az izometriákkal szemben.

Tekintsünk az \mathbb{R}^n euklideszi térnek egy $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ izometriáját, amelyet az (1.2) összefüggés ír le. Vegyük a Ψ -nek megfelelő Φ ortogonális lineáris leképezést az \mathbb{R}^n vektortéren, továbbá az $\varepsilon = \det \Phi$ számot.

Legyen adott egy $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ általános görbe. Mint ismeretes, a $\hat{\gamma} = \Psi \circ \gamma$ képgörbe deriváltjaira tetszőleges $t \in I$ esetén fennáll $\hat{\gamma}^{(i)}(t) = \Phi(\gamma^{(i)}(t))$ ($i = 1, \dots, n-1$). Ebből már adódik, hogy a $\hat{\gamma}$ görbe is általános típusú. Mivel Φ megőrzi a skaláris szorzatot, azt nyerjük, hogy a \hat{v} , v sebességfüggvények megegyeznek és a kísérő Frenet-bázisokra teljesül $\hat{\mathbf{B}}_i = \Phi \circ \mathbf{B}_i$ ($i = 1, \dots, n-1$) és $\hat{\mathbf{B}}_n = \varepsilon \cdot (\Phi \circ \mathbf{B}_n)$. Ezek alapján már könnyen igazolható az alábbi kijelentés.

4.10. Következmény *A γ általános görbe Ψ izometriával nyert $\hat{\gamma} = \Psi \circ \gamma$ képgörbénének a görbületi függvényeire fennáll $\hat{k}_j = k_j$ ($j = 1, \dots, n-2$) és $\hat{k}_{n-1} = \varepsilon k_{n-1}$.*

Az átparaméterezéssel nyert görbe görbületi függvényei

Legyen adott egy $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ általános görbe. A 2.8. Definícióban leírtaknak megfelelően egy $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ függvénnyel paraméterezzük át a γ görbét.

Fejezzük ki az átparaméterezéssel nyert $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ görbe deriváltjait a γ deriváltjaival a

$$\tilde{\gamma}^{(i)}(u) = \sum_{r=1}^i D_r^i(u) \cdot \gamma^{(r)}(\varphi(u)) \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

alakban. Ezen egyenletekkel meghatározott $D_r^i: J \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq r \leq i \leq n-1$) függvényekkel kapcsolatban a teljes indukció módszerével igazolható, hogy fennáll $D_i^i(u) = (\varphi'(u))^i$. Ily módon teljesül $D_i^i(u) \neq 0$, $u \in I$. Ennek alapján már könnyű belátni, hogy tetszőleges $u \in J$ és i ($1 \leq i \leq n-1$) egész szám esetén a $\tilde{\gamma}'(u), \dots, \tilde{\gamma}^{(i)}(u)$ vektorok ugyanazt az \mathbb{R}^n -beli lineáris alteret generálják, mint a $\gamma'(\varphi(u)), \dots, \gamma^{(i)}(\varphi(u))$ vektorok. Ez egyúttal azt jelenti, hogy a $\tilde{\gamma}: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ görbe is általános típusú.

Tegyük fel, hogy az átparaméterezés irányítástartó, vagyis fennáll $\varphi' > 0$. A fent leírtakból adódik, hogy a $\tilde{\gamma}$ és γ görbék kísérő Frenet-bázisait adó vektormezőkre igaz $\tilde{\mathbf{B}}_i = \mathbf{B}_i \circ \varphi$ ($i = 1, \dots, n$). Ugyancsak könnyű ellenőrizni, hogy $\tilde{\gamma}$ és γ görbületi függvényei között fennáll a $\tilde{k}_i = k_i \circ \varphi$ ($i = 1, \dots, n-1$) kapcsolat.

Tekintsük most azt az esetet, amikor az átparaméterezés irányításváltó ($\varphi' < 0$). Emlékezzünk rá, hogy teljesül $D_i^i(u) = (\varphi'(u))^i$, továbbá a $\tilde{\mathbf{B}}_n(u)$ vektor megegyezik a $[\tilde{\mathbf{B}}_1(u), \dots, \tilde{\mathbf{B}}_{n-1}(u)]$ vektoriális szorzattal bármely $u \in J$ -re. Ezek alapján a kísérő Frenet-bázisok vektormezőire igazak a

$$\tilde{\mathbf{B}}_i = (-1)^i \cdot \mathbf{B}_i \circ \varphi \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad \tilde{\mathbf{B}}_n = (-1)^{[n/2]} \cdot \mathbf{B}_n \circ \varphi$$

összefüggések, ahol most $[n/2]$ az $n/2$ tört egész részét jelöli. Ezeket alkalmazva belátható, hogy a $\tilde{\gamma}$ és γ általános görbék görbületi függvényeire

$$\tilde{k}_j = k_j \circ \varphi \quad (j = 1, \dots, n-2), \quad \tilde{k}_{n-1} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} \cdot k_{n-1} \circ \varphi$$

teljesül. Az \tilde{k}_{n-1} görbületi függvényre vonatkozó fenti formulát a (4.8) összefüggés alapján is igazolni lehet.

A görbeelmélet alaptétele \mathbb{R}^n -ben

A második fejezetben szereplő 2.38. Állítás és a 2.39. Tétel egyaránt átfogalmazható az \mathbb{R}^n térben vett általános görbékre. A Frenet-formulákon alapuló bizonyítási eljárások is érvényben maradnak.

4.11. Állítás *Legyenek adva a $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ és $\hat{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ívhossz szerint paraméterezett általános görbék. Ha ezek görbületi függvényei megegyeznek, azaz $k_i = \hat{k}_i$ ($i = 1, \dots, n-1$) teljesül, akkor egyértelműen létezik egy olyan \mathbb{R}^n -beli Ψ irányítástartó izometria, hogy fennáll $\hat{\gamma} = \Psi \circ \gamma$.*

4.12. Tétel *Legyenek adva az I intervallumon a C^∞ -osztályú $k_1, \dots, k_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvények, melyekre $k_j > 0$ ($j = 1, \dots, n-2$) teljesül. Ez esetben irányítástartó izometria erejéig pontosan egy olyan ívhossz szerint paraméterezett $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ általános görbe létezik, amelynek görbületi függvényei azonosak a megadott k_1, \dots, k_{n-1} függvényekkel.*

Általános típusú görbék az affin alterekben

Legyen adott egy olyan $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ reguláris görbe, amelynek pályája benne van egy m -dimenziós \mathcal{A} affin altérben ($m \geq 2$). Jelölje \mathcal{L} az \mathcal{A} -nak megfelelő \mathbb{R}^n -beli lineáris alteret. Vegyük észre, hogy fennáll $\gamma'(t) \in \mathcal{L}$ bármely $t \in I$ -re.

4.13. Definíció *Azt mondjuk, hogy γ egy általános típusú görbe az m -dimenziós \mathcal{A} affin altérben, ha tetszőleges $t \in I$ helyen a $\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(m-1)}(t)$ vektorok lineárisan függetlenek.*

Tegyük fel, hogy a γ egy általános görbe az \mathcal{A} affin altérben, és vegyük az \mathcal{A} altér egyik irányítását.

A releváns definíciók alapján ekkor értelmezni tudjuk γ -nak az \mathcal{A} altérre vonatkozó kísérő Frenet-bázisát, amelyet a $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m : I \rightarrow \mathcal{L}$ vektormezőik alkotnak, továbbá a $k_1, \dots, k_{m-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ görbületi függvényeket is.

Tekintsünk egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ reguláris görbét, melynek pályája nincs egy egyenesen. Legyen \mathcal{A} az a legszűkebb affin altér az \mathbb{R}^n euklideszi térben, amely tartalmazza a γ görbe pályáját. Tegyük fel, hogy γ egy általános görbét ad ebben az m -dimenziós \mathcal{A} altérben,

és vegyük a k_1, \dots, k_{m-1} görbületi függvényeket. Ekkor a 4.9. állítás következtében semmiképp sem tűnhet el a k_{m-1} függvény.

Egy konkrét \mathbb{R}^4 -beli görbe görbületi függvényeinek kiszámítása

4.1. Feladat Tekintsük az \mathbb{R}^4 térben azt a $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ zárt görbét, melyet a $\gamma(t) = \cos t \mathbf{e}_1 + \sin t \mathbf{e}_2 + \cos(2t) \mathbf{e}_3 + \sin(2t) \mathbf{e}_4$ egyenlőség ír le tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ helyen. Mutassuk meg, hogy γ egy általános típusú görbe, továbbá határozzuk meg a kísérő Frenet-bázisát és a görbületi függvényeit.

Célszerű megjegyezni, hogy a γ vektorfüggvény leszűkítésével nyert $\gamma|_{[0, 2\pi]}$ leképezés egy egyszerű zárt görbét ad. Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ pontban vegyük az

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2t) & -\sin(2t) \\ 0 & 0 & \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}$$

4×4 -es mátrixot. Világos, hogy az $\mathbf{A}(t)$ mátrix ortogonális és fennáll $\det \mathbf{A}(t) = 1$. Vegyük azt a $\Phi(t) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ lineáris leképezést, melyet az \mathbb{R}^4 -beli $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ természetes bázisra nézve éppen az $\mathbf{A}(t)$ mátrix ír le. Ennek most feleltessük meg azt a $\Psi(t)$ irányítástartó izometriát az \mathbb{R}^4 euklideszi térben, amelynél bármely $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^4$ pontra teljesül $\Psi(t)(\mathbf{p}) = \Phi(t)(\mathbf{p})$. Könnyű belátni, hogy ezekkel az izometriákkal a γ görbére fennáll $\Psi(t)(\gamma(u)) = \gamma(u+t)$ bármely $t, u \in \mathbb{R}$ esetén. Ebből viszont következik, hogy a γ függvény j -edrendű deriváltjaira teljesül $\Phi(t)(\gamma^{(j)}(u)) = \gamma^{(j)}(u+t)$ ($j = 1, 2, 3, 4$). Ez pedig azt mutatja, hogy ha egy u helyen a $\gamma'(u), \gamma''(u), \gamma'''(u)$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor ez a tulajdonság az összes pontban fennáll.

Látható, hogy a γ leképezésnek a 0 helyen vett első négy deriváltjára teljesül

$$\gamma'(0) = \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4, \quad \gamma''(0) = -\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_3, \quad \gamma^{(3)}(0) = -\mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_4, \quad \gamma^{(4)}(0) = \mathbf{e}_1 + 16\mathbf{e}_3.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a négy vektor lineárisan független, továbbá az általuk alkotott bázis az \mathbb{R}^4 tér természetes irányítását képviseli. Ebből már adódik, hogy a γ görbe valóban általános típusú. Világos, hogy γ sebességfüggvénye konstans, azaz konkrétan fennáll $v(t) = \sqrt{5}$, $t \in \mathbb{R}$.

Határozzuk meg a γ görbe Frenet-bázisát a $t = 0$ helyen a 4.4. Állítás bizonyításában leírt eljárást követve. Ekkor a (4.2) összefüggést alkalmazva azt nyerjük, hogy igazak az

alábbi egyenlőségek:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1(0) &= \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4, & \mathbf{B}_1(0) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4), \\ \mathbf{E}_2(0) &= -\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_3, & \mathbf{B}_2(0) &= -\frac{1}{\sqrt{17}}(\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_3), \\ \mathbf{E}_3(0) &= \frac{6}{5}(2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4), & \mathbf{B}_3(0) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4), \\ \mathbf{E}_4(0) &= \frac{12}{17}(-4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3), & \mathbf{B}_4(0) &= \frac{1}{\sqrt{17}}(-4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3).\end{aligned}$$

Ebből már megkaphatjuk a γ kísérő Frenet-bázisát, hiszen tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ helyen fennállnak a $\mathbf{B}_i(t) = \Phi(t)(\mathbf{B}_i(0))$ ($i = 1, 2, 3, 4$) egyenlőségek.

Végül vegyük észre, hogy a γ -hoz tartozó Cartan-mátrix elemei és a k_1, k_2, k_3 görbületi függvények konstansok. Ezeket célszerű most a 4.6. Tétel alapján meghatározni. Közvetlen számolással azt kapjuk, hogy teljesül

$$k_1 = \frac{\sqrt{17}}{5}, \quad k_2 = \frac{6}{5\sqrt{17}}, \quad k_3 = \frac{2}{\sqrt{17}}.$$

5. fejezet

Az \mathbb{R}^3 -beli sima elemi felületek metrikus tulajdonságai

5.1. A sima elemi felület paraméterezései

Az elemi felületre vonatkozó alapfogalmak

Ebben a fejezetben elkezdjük az \mathbb{R}^3 euklideszi tér sima felületeinek a tárgyalását. Az alapvető fogalmak definiálása előtt a kétváltozós vektorértékű függvényekre vonatkozóan röviden áttekintjük az 1.3. alfejezetben már bevezetett jelöléseket.

Ezt követően D egy \mathbb{R}^2 -beli összefüggő nyílt halmazzal jelöl, melyet a továbbiakban paramétertartománynak fogunk nevezni. Tekintsünk egy C^∞ -osztályú $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt. Az \mathbf{r} leképezés koordináta-függvényeit x_1, x_2, x_3 fogja jelölni. Eszerint tetszőleges $(u_1, u_2) \in D$ esetén fennáll

$$\mathbf{r}(u_1, u_2) = x_1(u_1, u_2) \mathbf{e}_1 + x_2(u_1, u_2) \mathbf{e}_2 + x_3(u_1, u_2) \mathbf{e}_3.$$

Az \mathbf{r} leképezésnek az 1.27. Definícióban értelmezett parciális deriváltjaira pedig teljesül

$$\partial_i \mathbf{r}(u_1, u_2) = \partial_i x_1(u_1, u_2) \mathbf{e}_1 + \partial_i x_2(u_1, u_2) \mathbf{e}_2 + \partial_i x_3(u_1, u_2) \mathbf{e}_3$$

($i = 1, 2$). Az $(u_1, u_2) \in D$ helyen vett 3×2 -es Jacobi-mátrix a

$$\mathbf{Jr}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \partial_1 x_1(u_1, u_2) & \partial_2 x_1(u_1, u_2) \\ \partial_1 x_2(u_1, u_2) & \partial_2 x_2(u_1, u_2) \\ \partial_1 x_3(u_1, u_2) & \partial_2 x_3(u_1, u_2) \end{pmatrix}$$

alakban írható fel a koordináta-függvények parciális deriváltjaival. Világos, hogy a mátrix oszlopai felelnek meg a $\partial_1 \mathbf{r}(u_1, u_2)$ és $\partial_2 \mathbf{r}(u_1, u_2)$ vektoroknak. Eszerint a

$\partial_1 \mathbf{r}(u_1, u_2)$, $\partial_2 \mathbf{r}(u_1, u_2)$ vektorok lineárisan függetlenek akkor és csak akkor, ha a Jacobi-mátrix rangjára fennáll $\text{rk } \mathbf{J}\mathbf{r}(u_1, u_2) = 2$. Vegyük észre, hogy amennyiben a két parciális derivált bármely (u_1, u_2) helyen lineárisan független, akkor az \mathbf{r} leképezés reguláris.

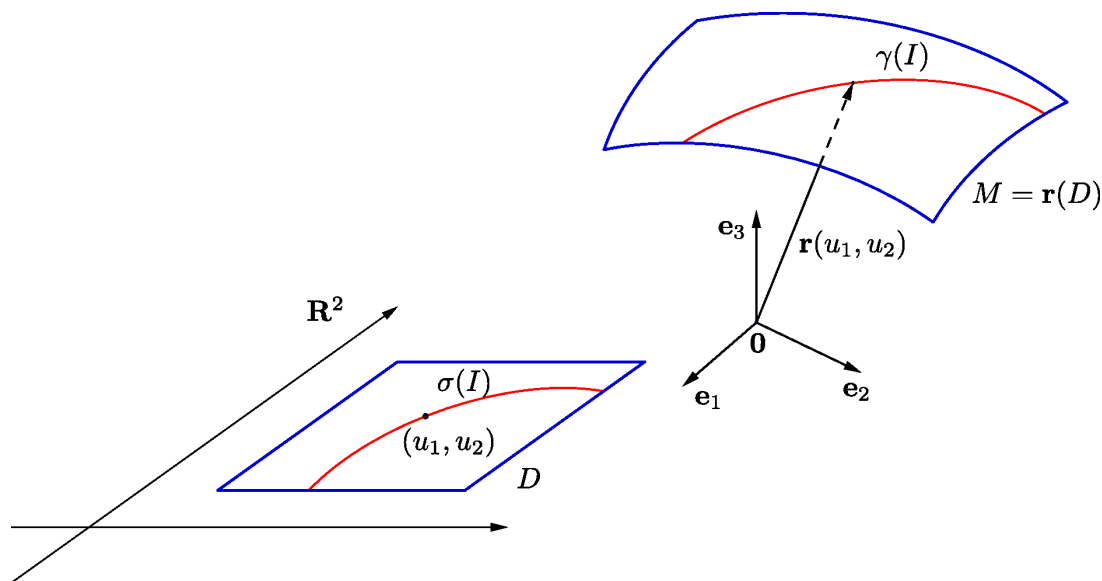
Ennyi előkészítés után rátérünk a felületelmélet alapfogalmainak értelmezésére.

5.1. Definíció Egy $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezésről azt mondjuk, hogy egy sima elemi felületnek a paraméterezése, ha C^∞ -osztályú és teljesül rá az alábbi két feltétel:

- (1) Bármely $(u_1, u_2) \in D$ esetén a $\partial_1 \mathbf{r}(u_1, u_2)$, $\partial_2 \mathbf{r}(u_1, u_2)$ vektorok lineárisan függetlenek.
- (2) Az \mathbf{r} vektorfüggvény injektív, továbbá egy homeomorfizmust ad az \mathbb{R}^2 -beli D tartomány és az \mathbb{R}^3 -beli $\mathbf{r}(D)$ alakzat között.

5.2. Definíció Az \mathbb{R}^3 tér egy M alakzatát sima elemi felületnek mondjuk, ha van egy olyan C^∞ -osztályú $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés, amelyre igaz $\mathbf{r}(D) = M$ és teljesülnek rá a fenti (1), (2) feltételek. Ez esetben az \mathbf{r} függvényt az $M = \mathbf{r}(D)$ felület egyik paraméteres előállításának (illetve paraméterezésének) nevezzük.

A továbbiakban feltesszük, hogy adva van egy M sima elemi felület az $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezéssel.



5.1. ábra. Az M elemi felületet paraméterezése az \mathbf{r} vektorfüggvénnyel.

5.3. Definíció Tekintsük az $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméteres előállítás $\boldsymbol{\rho}: M \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ inverz leképezését. A $\boldsymbol{\rho}$ függvényt az M elemi felület \mathbf{r} paraméterezés szerinti koordinátázásának mondjuk.

Megjegyzés Vegyük az M elemi felület egy \mathbf{p} pontját. A $\rho(\mathbf{p})$ számpárt a \mathbf{p} pont \mathbf{r} paraméterezésre vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

5.4. Definíció Egy C^∞ -osztályú $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést az M egy sima felületi görbéjének mondunk, ha a γ görbe pályája rajta van az M felületen.

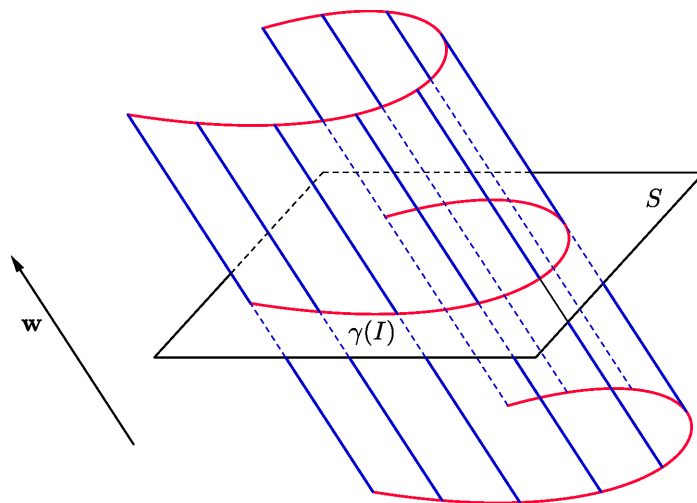
Sima felületi görbét az alábbi módon kaphatunk. Az \mathbb{R}^2 -beli D paramétertartományban vegyünk egy $\sigma : I \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ sima görbét. Világos, hogy ekkor a $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$ görbe pályája rajta van az M sima felületen. Ezt a γ felületi görbét a σ görbe \mathbf{r} általi képének mondjuk. (Lásd az 5.1. ábrát.)

A felületi görbék között vannak olyanok, amelyek speciálisak az \mathbf{r} paraméterezésre nézve. Ezekről szól a következő definíció.

5.5. Definíció Legyen adott egy a_2 szám és egy olyan I ($I \neq \emptyset$) valós intervallum, hogy $(t, a_2) \in D$ teljesül bármely $t \in I$ -re. Ekkor a $\gamma_1(t) = \mathbf{r}(t, a_2)$ összefüggéssel meghatározott $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ felületi görbét az \mathbf{r} paraméterezéshez tartozó első paramétervonalnak mondjuk.

Egy olyan $\gamma_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét, amelynél tetszőleges $t \in J$ -re fennáll $\gamma_2(t) = \mathbf{r}(a_1, t)$ valamely rögzített a_1 szám mellett, második paramétervonalnak nevezzük.

Megjegyzés Könnyen belátható, hogy a fenti definícióban szereplő γ_1, γ_2 felületi görbékre fennáll $\gamma_1'(a_1) = \partial_1 \mathbf{r}(a_1, a_2)$ és $\gamma_2'(a_2) = \partial_2 \mathbf{r}(a_1, a_2)$. Eszerint a $\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{a}), \partial_2 \mathbf{r}(\mathbf{a})$ vektorok éppen a \mathbf{p} ponton áthaladó paramétervonalak sebességvektorai.



5.2. ábra. Hengerfelület a \mathbf{w} alkotóiránnyal.

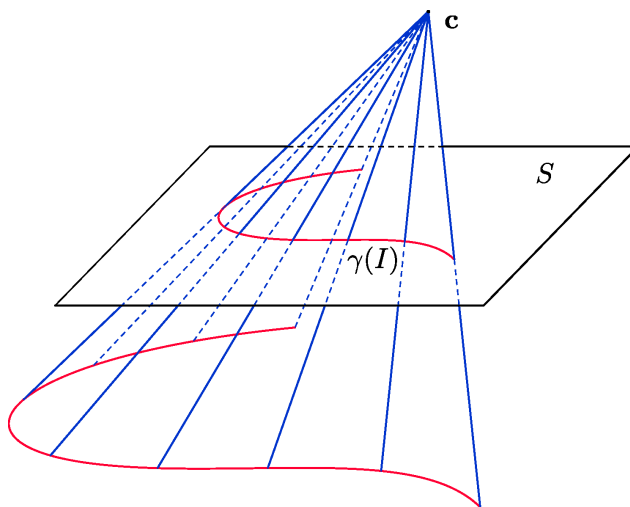
Az alábbiak során megadunk két egyszerű példát a sima elemi felületekre és azok paraméterezéseire.

5.1. Példa. Legyen adott egy az I nyílt intervallumon értelmezett $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ egyszerű sima görbe, amelynek pályája benne van a tér egy S síkjában. Ezen kívül legyen adott egy olyan \mathbf{w} vektor, amely nem párhuzamos az S síkkal. Az \mathbb{R}^2 -beli $D = I \times \mathbb{R}$ tartományon tekintsük az $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést, amelyre igaz $\mathbf{r}(u_1, u_2) = \gamma(u_1) + u_2 \mathbf{w}$ bármely $(u_1, u_2) \in D$ esetén. Vegyük észre, hogy teljesül $\partial_1 \mathbf{r}(u_1, u_2) = \gamma'(u_1)$ és $\partial_2 \mathbf{r}(u_1, u_2) = \mathbf{w}$. Nyilvánvaló, hogy az \mathbf{r} leképezés eleget tesz az 5.1. Definíció feltételeinek. Az $M = \mathbf{r}(D)$ sima elemi felületet hengerfelületnek nevezzük.

Az \mathbf{r} paraméterezésnél a második paramétervonalak a \mathbf{w} vektorral párhuzamos egyenesek, melyeket a hengerfelület alkotóinak mondunk. (Lásd az 5.2. ábrát.)

5.2. Példa. Legyen adva egy olyan $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ egyszerű sima görbe, amelynek pályája benne van a tér egy S síkjában, továbbá egy \mathbf{c} pont, amelyet S nem tartalmaz. Tekintsük azt az $\mathbf{r} : I \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést, ahol tetszőleges $u_1 \in I$ és $u_2 \in (0, \infty)$ esetén igaz $\mathbf{r}(u_1, u_2) = \mathbf{c} + u_2 (\gamma(u_1) - \mathbf{c})$. Világos, hogy a $\partial_1 \mathbf{r}(u_1, u_2) = u_2 \gamma'(u_1)$ és $\partial_2 \mathbf{r}(u_1, u_2) = \gamma(u_1) - \mathbf{c}$ vektorok lineárisan függetlenek, továbbá \mathbf{r} egy homeomorfizmust ad a $D = I \times (0, \infty)$ tartomány és az \mathbb{R}^3 -beli $\mathbf{r}(D)$ alakzat között. Ez esetben az $M = \mathbf{r}(D)$ sima elemi felületet kúpfelületnek mondjuk.

A második paramétervonalakat, amelyek pályái \mathbf{c} kezdőpontú nyílt félegyenesek, a kúpfelület alkotóinak nevezzük. (Lásd az 5.3. ábrát.)



5.3. ábra. A kúpfelület egy darabja.

Megjegyzés A továbbiakban a rövideg kedvéért a *sima* és *elemi* jelzőket gyakran elhagyjuk, de ebben az alfejezetben csak sima elemi felületeket vizsgálunk.

Egy elemi felület paraméteres előállítását a későbbiekben a felületet leíró vektorfüggvénynek is mondjuk.

Az elemi felületet leíró vektorfüggvény átparaméterezése

Legyen adott egy $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés, amely egy M elemi felületnek a paraméterezése. Az \mathbb{R}^2 -nek egy V nyílt tartományán legyen adva egy olyan C^∞ -osztályú $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezés, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- (1) Tetszőleges $(v_1, v_2) \in V$ esetén a φ leképezés Jacobi-mátrixának rangjára fennáll $rk \mathbf{J}\varphi(v_1, v_2) = 2$.
- (2) A φ leképezés injektív és $\varphi(V) = D$ teljesül.

Jelölje $\varphi_j: V \rightarrow \mathbb{R}$ a φ differenciálható leképezés j -edik koordináta-függvényét ($j = 1, 2$). Eszerint fennáll $\varphi(v_1, v_2) = (\varphi_1(v_1, v_2), \varphi_2(v_1, v_2))$ bármely $(v_1, v_2) \in V$ mellett.

Tekintsük a C^∞ -osztályú $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ \varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést. (Lásd az 5.5. ábrát.) Az összetett függvények deriváltjára vonatkozó láncszabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy az $\tilde{\mathbf{r}}$ vektorfüggvény parciális deriváltjait ki lehet fejezni a

$$\partial_i \tilde{\mathbf{r}}(v_1, v_2) = \partial_i \varphi_1(v_1, v_2) \cdot \partial_1 \mathbf{r}(\varphi(v_1, v_2)) + \partial_i \varphi_2(v_1, v_2) \cdot \partial_2 \mathbf{r}(\varphi(v_1, v_2)) \quad (5.1)$$

($i = 1, 2$) alakban bármely $(v_1, v_2) \in V$ pontban. A leképezések Jacobi-mátrixainak alkalmazásával az előbbi két összefüggést a

$$\mathbf{J}\tilde{\mathbf{r}}(v_1, v_2) = \mathbf{J}\mathbf{r}(\varphi(v_1, v_2)) \cdot \mathbf{J}\varphi(v_1, v_2)$$

egyenlettel lehet leírni. Mivel a $\mathbf{J}\mathbf{r}(\varphi(v_1, v_2))$ és $\mathbf{J}\varphi(v_1, v_2)$ mátrixok rangja egyaránt 2, így fennáll $rk \mathbf{J}\tilde{\mathbf{r}}(v_1, v_2) = 2$.

A fentiek alapján már látható, hogy az $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ \varphi$ leképezés eleget tesz az 5.1. Definíció feltételeinek, tehát $\tilde{\mathbf{r}}$ szintén egy paraméteres előállítás a M elemi felületnek. Vegyük még észre azt is, hogy mivel az \mathbb{R}^2 -beli V paramétertartomány összefüggő, a $\det \mathbf{J}\varphi(v_1, v_2)$ determináns nem vált előjelet, ha (v_1, v_2) befutja a V tartományt.

5.6. Definíció Az M elemi felületet leíró $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ \varphi$, $\tilde{\mathbf{r}}: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezésről azt mondjuk, hogy az \mathbf{r} vektorfüggvény φ általi átparaméterezésével jött létre. A φ leképezést a paramétertranszformáció függvényének nevezzük. Az átparaméterezést irányítástartónak mondjuk, ha fennáll $\det \mathbf{J}\varphi(v_1, v_2) > 0$ tetszőleges $(v_1, v_2) \in V$ esetén. Amennyiben $\det \mathbf{J}\varphi(v_1, v_2) < 0$ teljesül, akkor az átparaméterezést irányításváltónak hívjuk.

5.3. Példa Tekintsük az $\mathbf{r}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvényt, amelyre igaz

$$\mathbf{r}(u_1, u_2) = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + ((u_1)^2 - (u_2)^2) \mathbf{e}_3$$

bármely $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ mellett. Az \mathbf{r} vektorfüggvény által leírt $M = \mathbf{r}(\mathbb{R}^2)$ elemi felületet hiperbolikus paraboloidnak hívjuk. Látható, hogy az \mathbf{r} paraméterezéshez tartozó paramétervonalak parabolák.

Vegyük azt a $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvényt, melyet a $\varphi(v_1, v_2) = (v_1 + v_2, v_1 - v_2)$ kifejezés ír le tetszőleges $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ számpárra. Világos, hogy a φ bijektív leképezés reguláris

és Jacobi-mátrixának determinánsára fennáll $\det \mathbf{J}\varphi(v_1, v_2) = -2$. Az \mathbf{r} leképezésnek a φ -vel való irányításváltó átparaméterezésével azt az $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ \varphi$ függvényt nyerjük, amelyre teljesül

$$\tilde{\mathbf{r}}(v_1, v_2) = (v_1 + v_2) \mathbf{e}_1 + (v_1 - v_2) \mathbf{e}_2 + 4v_1 v_2 \mathbf{e}_3.$$

Vegyük észre, hogy az $\tilde{\mathbf{r}}$ paraméterezéshez tartozó paramétervonalak egyenesek. Eszerint a hiperbolikus paraboloid bármely pontján áthalad két felületi egyenes.

Egy kétváltozós valós függvény grafikonja, mint elemi felület

5.7. Definíció Egy $D \subset \mathbb{R}^2$ nyílt tartományon legyen adott egy C^∞ -osztályú $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Tekintsük az $\mathbf{r}(u_1, u_2) = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + h(u_1, u_2) \mathbf{e}_3$ összefüggéssel értelmezett $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést. Az \mathbf{r} vektorfüggvényt és az általa leírt $M = \mathbf{r}(D)$ sima elemi felületet a h függvény grafikonjának (vagy más szóval gráfjának) nevezzük.

Megjegyzés A definícióban szereplő \mathbf{r} vektorfüggvény parciális deriváltjaira fennáll $\partial_1 \mathbf{r}(u_1, u_2) = \mathbf{e}_1 + \partial_1 h(u_1, u_2) \mathbf{e}_3$ és $\partial_2 \mathbf{r}(u_1, u_2) = \mathbf{e}_2 + \partial_2 h(u_1, u_2) \mathbf{e}_3$. Ezek a vektorok lineárisan függetlenek bármely $(u_1, u_2) \in D$ helyen, tehát az $M = \mathbf{r}(D)$ alakzat valóban egy sima felület.

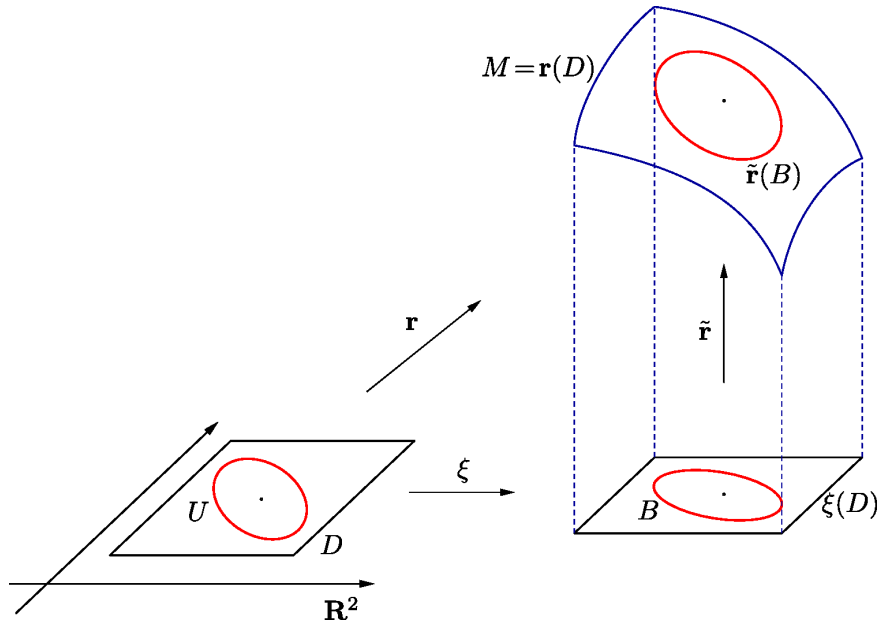
Megjegyzés Legyen adott egy $\pi: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ bijekció, vagyis az 1, 2, 3 egész számok egy permutációja. Az $\hat{\mathbf{r}}(u_1, u_2) = u_1 \mathbf{e}_{\pi(1)} + u_2 \mathbf{e}_{\pi(2)} + h(u_1, u_2) \mathbf{e}_{\pi(3)}$ egyenlettel definiált $\hat{\mathbf{r}}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt és az $\hat{M} = \hat{\mathbf{r}}(D)$ elemi felületet is a h függvény grafikonjának mondjuk.

Az inverz leképezés tételének felhasználásával bizonyítani lehet az alábbi kijelentést, melyet a későbbiekben még többször alkalmazni fogunk.

5.8. Állítás Legyen adott az $\mathbf{r}: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvény, amely egy M elemi felületnek a paraméterezése. Tetszőleges $(a_1, a_2) \in D$ ponthoz van olyan olyan \mathbb{R}^2 -beli U tartomány, hogy $(a_1, a_2) \in U$, $U \subset D$ és az $\mathbf{r}(U)$ elemi felület megegyezik egy differenciálható valós függvény gráfjával.

Bizonyítás. Az általánosság elvének megsértése nélkül feltehetjük, hogy a 3×2 -es $\mathbf{J}\mathbf{r}(a_1, a_2)$ Jacobi-mátrix első két sora lineárisan független.

Tekintsük a $\xi: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezést, ahol $\xi(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2))$ bármely $(u_1, u_2) \in D$ esetén. Ekkor fennáll $rk \mathbf{J}\xi(a_1, a_2) = 2$, és evidens, hogy a ξ -nek az (a_1, a_2) pont egy alkalmas környezetén vett leszűkítése egy reguláris függvényt ad. Ily módon alkalmazni lehet az 1.31. Tételt. Eszerint az (a_1, a_2) pontnak van olyan U ($U \subset D$) nyílt környezete, hogy a $\xi|_U$ leszűkített leképezés invertálható és az inverz leképezés is C^∞ -osztályú. (Lásd az 5.4. ábrát.) Jelölje φ ezen $\xi|_U$ leképezés inverzét. Eszerint a $B = \xi(U)$ tartomány tetszőleges (v_1, v_2) elemére teljesül $\xi \circ \varphi(v_1, v_2) = (v_1, v_2)$.



5.4. ábra. Illusztráció az 5.8. Állítás bizonyításához.

Vegyük az $\mathbf{r}|_U$ leszűkített leképezés φ függvénnyel történő $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ \varphi$ átparaméterezését és az $\mathbf{r}(U)$ elemi felületet. Tekintsük továbbá a $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyet a $h(v_1, v_2) = x_3 \circ \varphi(v_1, v_2)$ összefüggés ír le. Ekkor azt nyerjük, hogy fennáll

$$\tilde{\mathbf{r}}(v_1, v_2) = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + h(v_1, v_2) \mathbf{e}_3$$

bármely $(v_1, v_2) \in B$ esetén. Ez pedig azt mutatja, hogy az $\mathbf{r}(U) = \tilde{\mathbf{r}}(B)$ elemi felület a h függvény gráfja. \square

5.4. Példa. Az \mathbb{R}^2 -beli $D = (1, 2) \times (-\pi/2, \pi/2)$ tartományon vegyük azt az $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést, melyet az $\mathbf{r}(u_1, u_2) = u_1 \cos u_2 \mathbf{e}_1 + u_1 \sin u_2 \mathbf{e}_2 + u_1^2 \mathbf{e}_3$ összefüggés ad meg. Könnyen belátható, hogy \mathbf{r} egy sima elemi felületet ír le.

Az előző bizonyításnak megfelelően tekintsük a $\xi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvényt, ahol $\xi(u_1, u_2) = (u_1 \cos u_2, u_1 \sin u_2)$. Vegyük észre, hogy teljesül $\det \mathbf{J}\xi(u_1, u_2) = u_1 > 0$ és $\xi(D) = B = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < (v_1)^2 + (v_2)^2 < 4, v_1 > 0\}$. Ez a ξ leképezés invertálható, és a $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ inverz leképezésre fennáll $\varphi(v_1, v_2) = (\sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}, \arctg(v_2/v_1))$ tetszőleges $(v_1, v_2) \in B$ helyen. Amennyiben az \mathbf{r} leképezést átparaméterezzük a φ függvénnyel, akkor az $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ \varphi$ leképezésre az $\tilde{\mathbf{r}}(v_1, v_2) = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + ((v_1)^2 + (v_2)^2) \mathbf{e}_3$ összefüggés adódik. Eszerint az $M = \mathbf{r}(D)$ elemi felület megegyezik a $h(v_1, v_2) = (v_1)^2 + (v_2)^2$ egyenlőséggel értelmezett $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ függvény gráfiával.

Az alábbi állítás szerint a sima felületi görbéknek a paramétertartományban sima görbék felelnek meg.

5.9. Állítás *Legyen adva az M elemi felület az $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezéssel, továbbá egy $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima felületi görbe. Tekintsük azt a $\sigma: I \rightarrow D$ leképezést, amellyel fennáll $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$. Ekkor σ egy sima görbe a paramétertartományban.*

Bizonyítás. Amennyiben alkalmazzuk az M felületnek az \mathbf{r} által meghatározott ρ koordinátázását, akkor a $\sigma = \rho \circ \gamma$ kifejezést kapjuk, amiből már adódik, hogy a σ leképezés folytonos.

Vegyünk egy $t_0 \in I$ helyet és a $\sigma(t_0) = (a_1, a_2)$ pontot. Alkalmazzuk az előző 5.8. Állítást és a bizonyításában leírtakat. Eszerint az (a_1, a_2) pontnak van olyan U nyílt környezete D -ben és az $\mathbf{r}|_U$ leképezésnek olyan $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ \varphi$, $\tilde{\mathbf{r}}: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ átparaméterezése, amely megegyezik egy differenciálható $h: B \rightarrow \mathbb{R}$ függvény gráfjával.

A $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe koordináta-függvényei legyenek $y_j: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, 3$). Vegyünk egy olyan $\varepsilon > 0$ értéket, amelynél a $J = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap I$ intervallumra fennáll $\gamma(J) \subset \tilde{\mathbf{r}}(B)$. Látható, hogy ekkor a $\tilde{\sigma}(t) = (y_1(t), y_2(t))$ egyenlőséggel leírt $\tilde{\sigma}: J \rightarrow B \subset \mathbb{R}^2$ függvény lesz az, amellyel teljesül $\gamma|_J = \tilde{\mathbf{r}} \circ \tilde{\sigma}$. Mivel γ egy sima görbe, a $\tilde{\sigma}$ leképezés C^∞ -osztályú.

Vegyük észre, hogy σ -nak a J -re való leszűkítésére fennáll a $\sigma|_J = \varphi \circ \tilde{\sigma}$ összefüggés. A fentiek alapján σ egy sima leképezés a J intervallumon. Mivel a differenciálhatóság egy lokális tulajdonság és a $t_0 \in I$ helyet tetszőlegesen választhatjuk, a σ függvény C^∞ -osztályú. \square

Az elemi felület érintőterei, a normális egységvektormező

Az \mathbb{R}^3 térben legyen adva egy M sima elemi felület az $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezéssel. Vegyünk a $D \subset \mathbb{R}^2$ paramétertartományban egy $\sigma: I \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ sima görbét. A σ koordináta-függvényei legyenek a $\sigma_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) függvények. Ezekkel a σ leképezés kifejezhető a $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$ alakban, ahol t az I intervallum egy tetszőleges eleme.

Tekintsük a $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$ felületi görbét, melyet a σ görbe \mathbf{r} szerinti képének nevezünk. A $\gamma(t) = \sum_{s=1}^3 x_s \circ \sigma(t) \mathbf{e}_s$ kifejezés deriválásával a

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \sum_{s=1}^3 \sum_{i=1}^2 \sigma'_i(t) \cdot \partial_i x_s(\sigma(t)) \cdot \mathbf{e}_s \\ &= \sum_{i=1}^2 \sigma'_i(t) \cdot \left(\sum_{s=1}^3 \partial_i x_s(\sigma(t)) \mathbf{e}_s \right) \end{aligned}$$

összefüggéshez jutunk. Eszerint a γ felületi görbe $t \in I$ helyen vett sebességvektorára fennáll

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^2 \sigma'_i(t) \cdot \partial_i \mathbf{r}(\sigma(t)). \quad (5.2)$$

Vegyünk most egy $t_0 \in I$ értéket és a neki megfelelő $\sigma(t_0) = \mathbf{a} = (a_1, a_2)$ és $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{a})$ pontokat. Az (5.2) egyenlet szerint a γ felületi görbe \mathbf{p} pontbeli $\gamma'(t_0)$ érintővektora előáll a $\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{a})$ és $\partial_2 \mathbf{r}(\mathbf{a})$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ez pedig már indokolja az alábbi fogalmak bevezetését.

5.10. Definíció Tekintsük az $M = \mathbf{r}(D)$ elemi felület egy $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{a})$ pontját. Az \mathbb{R}^3 vektortérnek a $\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{a})$, $\partial_2 \mathbf{r}(\mathbf{a})$ vektorok által generált $T_{\mathbf{p}}M$ lineáris alterét az M felület \mathbf{p} -beli lineáris érintőterének mondjuk. Azt az \mathbb{R}^3 -beli síkot, amely áthalad a \mathbf{p} ponton és párhuzamos a $\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{a})$, $\partial_2 \mathbf{r}(\mathbf{a})$ vektorokkal, az M felület \mathbf{p} -beli érintősíkjának nevezzük.

Megjegyzés Vegyük az M elemi felület egy másik $\hat{\mathbf{r}}: \hat{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméteres előállítását. Jelölje $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2)$ azt a helyet \hat{D} -ben, amelyre fennáll $\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{p}$. Az $\hat{\mathbf{r}}$ leképezésnek a \mathbf{p} ponton átmenő paramétervonalai sima felületi görbék, tehát az 5.9. Állítás szerint ezek is előállnak a D paramétertartományban vett sima görbék \mathbf{r} általi képeként. Ily módon az (5.2) összefüggésből adódik, hogy a független $\partial_1 \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{a}})$, $\partial_2 \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{a}})$ vektorok kifejezhetőek a $\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{a})$ és $\partial_2 \mathbf{r}(\mathbf{a})$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Ennek következtében a $T_{\mathbf{p}}M$ lineáris érintőtér nem függ attól, hogy az M elemi felületet melyik vektorfüggvénnyel paraméterezzük.

Megjegyzés A továbbiakban a $T_{\mathbf{p}}M$ lineáris érintőtér elemeit az M felület \mathbf{p} pontbeli érintővektorainak mondjuk.

5.11. Definíció Az M felület \mathbf{r} paraméterezéséhez tartozó normális egységvektormezőn azt az $\mathbf{N}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést értjük, melyet az

$$\mathbf{N}(u_1, u_2) = \frac{1}{\|\partial_1 \mathbf{r}(u_1, u_2) \times \partial_2 \mathbf{r}(u_1, u_2)\|} \partial_1 \mathbf{r}(u_1, u_2) \times \partial_2 \mathbf{r}(u_1, u_2) \quad (5.3)$$

egyenlet határoz meg tetszőleges $(u_1, u_2) \in D$ esetén.

Megjegyzés Tekintsük az $M = \mathbf{r}(D)$ elemi felület egy $\mathbf{p} = \mathbf{r}(a_1, a_2)$ pontját. Világos, hogy az $\mathbf{N}(a_1, a_2)$ egységvektor merőleges a $T_{\mathbf{p}}M$ lineáris érintőtérre és a felület \mathbf{p} -beli érintősíkjára.

A paraméteres előállítások közötti kapcsolat

Az alábbi fontos tétel azt mondja ki, hogy ha egy elemi felületnek két különböző paraméteres előállítását vesszük, akkor az egyik leíró vektorfüggvényt C^∞ -osztályú átparaméterezéssel lehet megkapni a másiktól.

5.12. Tétel Legyen adott egy M elemi felület és annak az $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ és $\hat{\mathbf{r}}: \hat{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméteres előállításai. Tekintsük azt az $\boldsymbol{\eta}: D \rightarrow \hat{D} \subset \mathbb{R}^2$ bijekciót, amelyet tetszőleges $(u_1, u_2) \in D$ esetén az $\mathbf{r}(u_1, u_2) = \hat{\mathbf{r}}(\boldsymbol{\eta}(u_1, u_2))$ összefüggés határoz meg. Ekkor az $\boldsymbol{\eta}$ leképezés C^∞ -osztályú és reguláris.

Bizonyítás. Vegyük az $\hat{\mathbf{r}}$ paraméterezésnek megfelelő $\hat{\boldsymbol{\rho}}: M \rightarrow \hat{D} \subset \mathbb{R}^2$ koordinátázást. Ezzel a fenti $\boldsymbol{\eta}: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezés kifejezhető az $\boldsymbol{\eta} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \circ \mathbf{r}$ formában. Ennek következtében az $\boldsymbol{\eta}$ egy homeomorfizmust ad az \mathbb{R}^2 -beli D és \hat{D} tartományok között.

Vegyük az M elemi felület egy \mathbf{p} pontját, amelyre fennáll $\mathbf{p} = \mathbf{r}(a_1, a_2) = \hat{\mathbf{r}}(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$ valamely $(a_1, a_2) \in D$ és $(\hat{a}_1, \hat{a}_2) \in \hat{D}$ számpárok esetén. Korábban már beláttuk, hogy M felület \mathbf{p} -beli lineáris érintőtere nem függ a paraméterezés megválasztásától. Emiatt a \mathbf{p} pontbeli normális egységvektorokra igaz $\mathbf{N}(a_1, a_2) = \pm \hat{\mathbf{N}}(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$, vagyis a két vektor csakis előjelben különbözhet.

Az $\mathbf{N}(a_1, a_2)$, $\hat{\mathbf{N}}(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$ vektorok az \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 egységvektorok közül legalább az egyikre nem merőlegesek. Ennek alapján tegyük fel most azt, hogy a \mathbf{p} -beli normális irányt meghatározó $\partial_1 \mathbf{r}(a_1, a_2) \times \partial_2 \mathbf{r}(a_1, a_2)$ és $\partial_1 \hat{\mathbf{r}}(\hat{a}_1, \hat{a}_2) \times \partial_2 \hat{\mathbf{r}}(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$ vektoriális szorzatok nem merőlegesek az \mathbf{e}_3 bázisvektorra. Könnyű belátni, hogy ekkor a koordinátafüggvények parciális deriváltjaira fennáll

$$\begin{vmatrix} \partial_1 x_1(a_1, a_2) & \partial_2 x_1(a_1, a_2) \\ \partial_1 x_2(a_1, a_2) & \partial_2 x_2(a_1, a_2) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{és} \quad \begin{vmatrix} \partial_1 \hat{x}_1(\hat{a}_1, \hat{a}_2) & \partial_2 \hat{x}_1(\hat{a}_1, \hat{a}_2) \\ \partial_1 \hat{x}_2(\hat{a}_1, \hat{a}_2) & \partial_2 \hat{x}_2(\hat{a}_1, \hat{a}_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Alkalmazzuk most az 5.8. Állítás bizonyításában leírtakat. Eszerint a (p_1, p_2) pontnak van olyan B nyílt gömbkörnyezete \mathbb{R}^2 -ben és azon olyan C^∞ -osztályú $\varphi : B \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$, $\hat{\varphi} : B \rightarrow \hat{D} \subset \mathbb{R}^2$, $h, \hat{h} : B \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, hogy bármely v_1, v_2 esetén teljesül

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \circ \varphi(v_1, v_2) &= v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + h(v_1, v_2) \mathbf{e}_3, \\ \hat{\mathbf{r}} \circ \hat{\varphi}(v_1, v_2) &= v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \hat{h}(v_1, v_2) \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Ezen kívül még igaz, hogy $\varphi(p_1, p_2) = (a_1, a_2)$, $\hat{\varphi}(p_1, p_2) = (\hat{a}_1, \hat{a}_2)$, továbbá a φ , $\hat{\varphi}$ leképezések injektívek és regulárisak. A $h(p_1, p_2) = p_3 = \hat{h}(p_1, p_2)$ összefüggésből viszont az következik, hogy az M elemi felület $\mathbf{r} \circ \varphi(B)$, $\hat{\mathbf{r}} \circ \hat{\varphi}(B)$ felületdarabjai, melyek egy-egy függvénynek a gráfjai, megegyeznek. Ebből viszont azt kapjuk, hogy a h és \hat{h} függvények azonosak, vagyis fennáll $h = \hat{h}$.

A fentiek alapján, ha vesszük az η leképezésnek az $U = \varphi(B)$ tartományra történő leszűkítését, akkor az $\mathbf{r} \circ \varphi(v_1, v_2) = \hat{\mathbf{r}} \circ \hat{\varphi}(v_1, v_2)$ egyenlőség miatt teljesül $\eta|U = \hat{\varphi} \circ \varphi^{-1}$. Mivel a C^∞ -osztályú φ , $\hat{\varphi}$ leképezések Jacobi-mátrixának rangja minden helyen 2, az $\eta|U$ függvény reguláris. Innen már adódik, hogy az η bijektív leképezés ugyancsak reguláris, ami igazolja a tételt. \square

Megjegyzés Az előző tétel azért lényeges számunkra, mert kimondja, hogy egy \mathbb{R}^3 -beli M elemi felületen egyetlen differenciálhatósági struktúrát lehet csak megadni.

A fenti tétel egy következménye az is, hogy egy felület geometriai jellemzőinek meghatározásához annak bármelyik paraméteres előállítását alkalmazhatjuk, mivel a geometriai jellemzők az átparaméterezéssel szemben invariánsak.

5.2. Sima felületek az \mathbb{R}^3 térben

Az előző alfejezetben sima elemi felületeket tárgyaltunk. A gömb és a tóruszfelület olyan \mathbb{R}^3 -beli alakzatok, amelyek a kompaktságuk miatt nem lehetnek homeomorfak egy síkbeli

nyílt tartománnyal, tehát ezek nem adnak sima elemi felületet. Azonban a gömb és a tórusz már eleget tesznek az alábbi definícióban szereplő feltételnek.

5.13. Definíció Egy \mathbb{R}^3 -beli M alakzatot sima felületnek mondunk, ha az M tetszőleges \mathbf{p} pontjának van olyan \mathcal{K} nyílt környezete \mathbb{R}^3 -ban, hogy a $\mathcal{K} \cap M$ metszet egy sima elemi felület.

Megjegyzés Tekintsünk egy M sima felületet és annak egy \mathbf{p} pontját. Legyen \mathcal{K} egy olyan környezete \mathbf{p} -nek, hogy $\hat{M} = \mathcal{K} \cap M$ egy elemi felület. Ekkor az \hat{M} elemi felület \mathbf{p} -beli érintőterét, vagyis a 2-dimenziós $T_{\mathbf{p}}\hat{M}$ vektorteret, egyúttal az M felület \mathbf{p} pontbeli érintőterének is mondjuk. Ily módon tehát fennáll $T_{\mathbf{p}}M = T_{\mathbf{p}}\hat{M}$.

Az M felületi görbájén egy olyan $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima görbét értünk, amelynek pályáját az M felület tartalmazza.

Sok nevezetes térbeli alakzatot le lehet írni implicit egyenlettel. Implicit egyenlettel való leírásan itt azt értjük, hogy van olyan az \mathbb{R}^3 euklideszi téren értelmezett f differenciálható valós függvény és c szám, hogy az $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ számhármásokra vonatkozó $f(x, y, z) = c$ egyenletet éppen az alakzat pontjai elégítik ki. A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy az implicit egyenlettel leírt alakzat mikor ad sima felületet.

5.14. Definíció Az \mathbb{R}^3 -beli W nyílt halmazon legyen adva egy C^∞ -osztályú $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Az f függvénynek egy $\mathbf{p} \in W$ pontban vett gradiensén a $\text{grad } f(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^3 \partial_j f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_j$ vektort értjük.

Egy $c \in f(W)$ számot az f reguláris értékének mondunk, ha bármely $\mathbf{p} \in f^{-1}(c)$ esetén fennáll $\text{grad } f(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$.

5.15. Tétel Legyen a $c \in f(W)$ szám az $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek egy reguláris értéke. Ekkor az $M = f^{-1}(c)$ alakzat sima felület az \mathbb{R}^3 euklideszi térben.

Bizonyítás. Tekintsük az $M = f^{-1}(c)$ alakzat egy $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ pontját. Mivel fennáll $\text{grad } f(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$, az f függvénynek legalább egy parciális deriváltja nem tűnik el a \mathbf{p} helyen. Azt fogjuk megmutatni, hogy \mathbf{p} -nek van olyan nyílt környezete, amely M -ből egy sima elemi felületet metsz ki.

Az általánosság elvének megsértése nélkül feltehetjük, hogy $\partial_3 f(\mathbf{p}) \neq 0$. Alkalmazzuk most az 1.32. Tételt. Eszerint vannak olyan (a_j, b_j) ($j = 1, 2, 3$) nyílt intervallumok \mathbb{R} -ben, hogy igaz $p_j \in (a_j, b_j)$ és $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3) \subset W$, továbbá tetszőleges $u_1 \in (a_1, b_1)$ és $u_2 \in (a_2, b_2)$ esetén egyértelműen létezik egy olyan $v \in (a_3, b_3)$, amelyre teljesül az $f(u_1, u_2, v) = c$ egyenlőség. Ezen kívül az is igaz, hogy amennyiben vesszük az \mathbb{R}^2 -beli $D = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ nyílt téglalapon azt a $h : D \rightarrow (a_3, b_3) \subset \mathbb{R}$ függvényt, melyet a $h(u_1, u_2) = v$ egyenlettel értelmezünk, akkor ez a h függvény C^∞ -osztályú.

Vegyük a kétváltozós h függvény $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ gráfját, amelyre igaz $\mathbf{r}(u_1, u_2) = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + h(u_1, u_2) \mathbf{e}_3$. Mivel bármely $(u_1, u_2) \in D$ esetén fennáll

$f(u_1, u_2, h(u_1, u_2)) = c$, az $\mathbf{r}(D)$ sima elemi felület része az $M = f^{-1}(c)$ alakzatnak. Ugyanakkor a fentiek alapján a \mathbf{p} pontot tartalmazó \mathbb{R}^3 -beli $\mathcal{K} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$ nyílt téglára fennáll a $\mathcal{K} \cap M = \mathbf{r}(D)$ összefüggés. Ily módon az M alakzat eleget tesz az 5.13. Definícióban szereplő feltételnek. \square

Ezt követően egy olyan felület lineáris érintőtereit tekintjük, amely előáll valamely sima függvény reguláris értékének inverz képeként.

5.16. Állítás *Legyen adott az \mathbb{R}^3 -beli W nyílt halmazon egy $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy a $c \in f(W)$ szám reguláris értéke f -nek. Ekkor az $M = f^{-1}(c)$ sima felület bármely \mathbf{p} pontja esetén a $T_{\mathbf{p}}M$ lineáris érintőtér merőleges a $\text{grad } f(\mathbf{p})$ vektorra.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy olyan $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima görbét, amelynek pályájája rajta van az M felületen és amely áthalad a \mathbf{p} ponton. Eszerint fennáll $f \circ \gamma(t) = c$ bármely $t \in I$ -re és $\gamma(t_0) = \mathbf{p}$ teljesül valamely t_0 értékre. Legyenek az $x_1, x_2, x_3: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvények a γ felületi görbe koordináta-függvényei. Az $f(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = c$ kifejezés t szerinti deriválásával a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^3 \partial_j f(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \cdot x'_j(t) \\ &= \langle \sum_{j=1}^3 \partial_j f(\gamma(t)) \mathbf{e}_j, \sum_{s=1}^3 x'_s(t) \mathbf{e}_s \rangle = \langle \text{grad } f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \end{aligned}$$

összefüggést nyerjük. Ebből a t_0 helyen, vagyis a \mathbf{p} pontban, a $\langle \text{grad } f(\mathbf{p}), \gamma'(t_0) \rangle = 0$ egyenlőség adódik. Ez azt mutatja, hogy a $\text{grad } f(\mathbf{p})$ vektor merőleges a felületi görbe $\gamma'(t_0)$ sebességvektorára. Mivel a $T_{\mathbf{p}}M$ lineáris érintőteret a \mathbf{p} ponton áthaladó felületi görbék sebességvektorai feszítik ki, a $\text{grad } f(\mathbf{p})$ vektor merőleges $T_{\mathbf{p}}M$ -re. \square

5.5. Példa A továbbiakban S^2 fogja jelölni a $\mathbf{0}$ centrumú és 1 sugarú gömbfelületet az \mathbb{R}^3 térben. Eszerint igaz $S^2 = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{p}\| = 1 \}$. Az S^2 alakzatot a későbbiek során a 2-dimenziós szférának is fogjuk majd nevezni.

Vegyük azt az $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyet az $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ egyenlet ír le. Látható, hogy erre bármely $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ pontban teljesül $\text{grad } f(\mathbf{p}) = 2\mathbf{p}$. Ily módon f -nek az összes pozitív valós szám reguláris értéke.

Nyilvánvaló, hogy fennáll $S^2 = f^{-1}(1)$, tehát az S^2 szféra egy sima felület. A fenti állítást alkalmazva pedig azt kapjuk, hogy bármely $\mathbf{p} \in S^2$ pontban a $T_{\mathbf{p}}S^2$ lineáris érintőtér merőleges a \mathbf{p} vektorra, vagyis $T_{\mathbf{p}}S^2 = \{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{w}, \mathbf{p} \rangle = 0 \}$.

5.6. Példa Tekintsük az $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyet az $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ összefüggés ír le tetszőleges $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mellett. A $\text{grad } f(x, y, z) = 2x \mathbf{e}_1 + 2y \mathbf{e}_2 - 2z \mathbf{e}_3$ egyenlőségből már adódik, hogy egy $c \in \mathbb{R}$ valós szám akkor reguláris értéke f -nek, ha $c \neq 0$. Amennyiben $c > 0$, akkor az $M = f^{-1}(c)$ sima felület egy egyköpenyű

forgáshiperboloid, melyet egy hiperbolának a képzetes tengelye körüli megforgatásával nyerünk. $c < 0$ esetén az $M = f^{-1}(c)$ sima felület egy kétköpenyű forgáshiperboloid.

Az $M = f^{-1}(0)$ alakzat, melyet az $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ egyenlet ír le, egy teljes forgáskúp a $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ csúccsal. A teljes forgáskúp nem sima felület, mert a $\mathbf{0}$ -nak bármely kis \mathcal{K} nyílt környezetét vesszük \mathbb{R}^3 -ban, a $\mathcal{K} \cap M$ metszet nem lesz elemi felület. Ez abból is következik, hogy ha tekintjük a csúcson áthaladó és a kúpfelületre eső görbét, akkor azoknak a $\mathbf{0}$ -beli érintőegyenesei nincsenek egy síkban, tehát a kúpnek nem értelmezhető a $\mathbf{0}$ pontbeli érintősíkja.

5.3. Az első főmennyiségek

A továbbiak során feltesszük, hogy adva van egy M elemi felület és annak egy $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméteres előállítás.

5.17. Definíció Az M sima felület \mathbf{p} pontbeli első alapformáján azt az $I_{\mathbf{p}}: T_{\mathbf{p}}M \times T_{\mathbf{p}}M \rightarrow \mathbb{R}$ szimmetrikus bilineáris formát értjük, amelyre tetszőleges $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ érintővektorok esetén igaz $I_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

Megjegyzés A \mathbf{p} pontbeli $I_{\mathbf{p}}$ első alapforma tehát nem más, mint az \mathbb{R}^3 téren vett természetes skaláris szorzás leszűkítése a 2-dimenziós $T_{\mathbf{p}}M$ érintőtérre.

A következő definícióban bevezetett függvények fontos szerepet játszanak a felületek geometriai vizsgálataiban.

5.18. Definíció Az M elemi felületnek az \mathbf{r} paraméterezéséhez tartozó első főmennyiségek in a

$$g_{ij}(u_1, u_2) = \langle \partial_i \mathbf{r}(u_1, u_2), \partial_j \mathbf{r}(u_1, u_2) \rangle \quad (5.4)$$

összefüggéssel meghatározott $g_{ij}: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j = 1, 2$) függvényeket értjük.

Megjegyzés Világos, hogy az első főmennyiségek C^∞ -osztályú valós függvények a D tartományon. A skaláris szorzás kommutativitásából adódik, hogy igaz $g_{12} = g_{21}$.

Az egyszerűsítés érdekében a továbbiakban alkalmazzuk az $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ jelölést is. Az első főmennyiségek $\mathbf{u} \in D$ helyen vett függvényértékeiből képezzük a $\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} g_{11}(\mathbf{u}) & g_{12}(\mathbf{u}) \\ g_{21}(\mathbf{u}) & g_{22}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$ szimmetrikus mátrixot. Vegyük észre, hogy $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ kifejezhető az \mathbf{r} vektorfüggvény Jacobi mátrixából a

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{Jr}(\mathbf{u})^T \cdot \mathbf{Jr}(\mathbf{u})$$

egyenlettel, amelyben $\mathbf{Jr}(\mathbf{u})^T$ a transzponált mátrixot jelöli.

Legyen $End(\mathbb{R}^2)$ a valós elemű, 2×2 -es mátrixok vektortere, amely izomorf az \mathbb{R}^4 térrel. Eszerint az első főmennyiségekből definiálni tudunk egy $\mathbf{G}: D \rightarrow End(\mathbb{R}^2)$ sima leképezést.

Azt szokás mondani, hogy az első főmennyiségek határozzák meg a felület belső geometriáját, mivel ezekkel lehet kifejezni két egyazon pontban vett érintővektor skaláris szorzatát és hajlásszögét. Ezt a tényt az alábbiakban részleteiben is kifejtjük.

Az \mathbf{r} paraméterezés alkalmazása esetén a $\mathbf{p} = \mathbf{r}(a_1, a_2)$ pontbeli $T_{\mathbf{p}}M$ érintőtér természetes bázisát a $\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{a})$, $\partial_2 \mathbf{r}(\mathbf{a})$ vektorok képezik. Világos, hogy ezen bázisra nézve az $I_{\mathbf{p}}$ első alapformát éppen a $\mathbf{G}(\mathbf{a})$ mátrix írja le.

Vegyük a $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^2 v_i \cdot \partial_i \mathbf{r}(\mathbf{a})$ és $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^2 w_j \cdot \partial_j \mathbf{r}(\mathbf{a})$ érintővektorokat az M felület $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{a})$ pontjában. Ezek skaláris szorzatát a

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij}(\mathbf{a}) \cdot v_i \cdot w_j$$

kifejezés adja meg. Amennyiben \mathbf{v} és \mathbf{w} különböznek $\mathbf{0}$ -tól, a két érintővektor ϑ hajlásszögére teljesül a

$$\cos \vartheta = \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij}(\mathbf{a}) v_i w_j}{\left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij}(\mathbf{a}) v_i v_j \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij}(\mathbf{a}) w_i w_j \right)^{\frac{1}{2}}}$$

összefüggés.

Tekintsünk egy $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ felületi görbét az M -en. Az (5.2) egyenlet következtében a $t \in I$ helyen vett sebességvektor normájára fennáll

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij}(\sigma(t)) \sigma'_i(t) \sigma'_j(t).$$

Ebből és a 2.7. Tételtől következik, hogy egy $\gamma|[a, b]$ ($a, b \in I$, $a < b$) görbedarab ívhosszára igaz az

$$l(\gamma|[a, b]) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij}(\sigma(t)) \sigma'_i(t) \sigma'_j(t)} dt \quad (5.5)$$

összefüggés.

A felület izometriával nyert képe

Legyen adott az M elemi felület az $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméteres előállításal.

Tekintsünk az \mathbb{R}^3 euklideszi térben egy olyan $\Psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ izometriát, amely az (1.2) egyenlet ír le. Vegyük az $\hat{\mathbf{r}} = \Psi \circ \mathbf{r}$ leképezést. Világos, hogy az $\hat{\mathbf{r}}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvény egy olyan differenciálható leképezés, amely az $\hat{M} = \Psi(M)$ elemi felületnek az egyik paraméteres előállítása. A $\partial_i \hat{\mathbf{r}} = \Phi \circ \partial_i \mathbf{r}$ ($i = 1, 2$) összefüggés következtében tetszőleges $\mathbf{u} \in D$ esetén a lineáris érintőterekre fennáll $T_{\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{u})} \hat{M} = \Phi(T_{\mathbf{r}(\mathbf{u})} M)$. Mivel a Φ lineáris leképezés megőrzi a skaláris szorzatot, az \mathbf{r} , $\hat{\mathbf{r}}$ paraméterezésekhez tartozó első főmennyiségek megegyeznek, vagyis igaz $\hat{g}_{ij} = g_{ij}$ ($i, j = 1, 2$).

Amennyiben a Ψ egybevágóság irányítástartó, akkor az $\hat{\mathbf{r}}$ és \mathbf{r} paraméterezésekhez tartozó normális egységvektormezőkre teljesül $\hat{\mathbf{N}} = \Phi \circ \mathbf{N}$. Ha Ψ egy irányításváltó izometria, akkor fennáll $\hat{\mathbf{N}} = -\Phi \circ \mathbf{N}$.

Az átparaméterezésnél fellépő első főmennyiségek

Az M elemi felületet leíró $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvénynek vegyük az 5.6. Definícióban leírt $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ \varphi$ átparaméterezését a $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ reguláris függvénnyel.

Az (5.1) összefüggés szerint bármely $(v_1, v_2) \in V$ esetén a $T_{\mathbf{r}(\varphi(v_1, v_2))}M$ lineáris érintőtérben a $\partial_1 \mathbf{r}(\varphi(v_1, v_2))$, $\partial_2 \mathbf{r}(\varphi(v_1, v_2))$ bázisról a $\partial_1 \tilde{\mathbf{r}}(v_1, v_2)$, $\partial_2 \tilde{\mathbf{r}}(v_1, v_2)$ bázisra történő áttérést (más szóval a bázistranszformációt) a $\mathbf{J}\varphi(v_1, v_2)$ Jacobi-mátrix írja le. A parciális deriváltak vektoriális szorzatára közvetlen számolással azt kapjuk, hogy teljesül

$$\partial_1 \tilde{\mathbf{r}}(v_1, v_2) \times \partial_2 \tilde{\mathbf{r}}(v_1, v_2) = \det \mathbf{J}\varphi(v_1, v_2) (\partial_1 \mathbf{r}(\varphi(v_1, v_2)) \times \partial_2 \mathbf{r}(\varphi(v_1, v_2))).$$

Ez alapján a következő megállapításokat tehetjük. Ha a φ általi átparaméterezés irányítás-tartó, akkor a normális egységvektormezőkre igaz $\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \circ \varphi$. Amennyiben az átparaméterezés irányításváltó, akkor az $\tilde{\mathbf{N}} = -\mathbf{N} \circ \varphi$ összefüggés teljesül.

Ugyancsak egyszerűen adódik az (5.1) egyenletekből, hogy az M felület $\tilde{\mathbf{r}}$ paraméterezéséhez tartozó $\tilde{g}_{ij}: V \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j = 1, 2$) első főmennyiségekre fennáll

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij}(v_1, v_2) &= \langle \partial_i \tilde{\mathbf{r}}(v_1, v_2), \partial_j \tilde{\mathbf{r}}(v_1, v_2) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 g_{kl}(\varphi(v_1, v_2)) \cdot \partial_i \varphi_k(v_1, v_2) \cdot \partial_j \varphi_l(v_1, v_2). \end{aligned}$$

bármely $(v_1, v_2) \in V$ -re. Kvadratikus mátrixokat alkalmazva a fenti összefüggést a

$$\tilde{\mathbf{G}}(v_1, v_2) = (\mathbf{J}\varphi(v_1, v_2))^T \cdot \mathbf{G}(\varphi(v_1, v_2)) \cdot \mathbf{J}\varphi(v_1, v_2) \quad (5.6)$$

egyenlettel írhatjuk fel.

5.4. A kompakt felületdarab felszíne

Legyen adva az M elemi felület az $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméteres előállításal. A továbbiakban alkalmazni fogjuk az előző alfejezetben bevezetett fogalmakat és jelöléseket. A felszín fogalmának definiálása előtt még igazoljuk az alábbi kijelentést, amely arra mutat rá, hogy a \mathbf{G} mátrix determinánsa minden pontban pozitív.

5.19. Állítás *Tetszőleges $(u_1, u_2) \in D$ helyen teljesül*

$$\det \mathbf{G}(u_1, u_2) = \|\partial_1 \mathbf{r}(u_1, u_2) \times \partial_2 \mathbf{r}(u_1, u_2)\|^2. \quad (5.7)$$

Bizonyítás. Jelölje $\alpha(u_1, u_2)$ a $\partial_1 \mathbf{r}(u_1, u_2)$ és $\partial_2 \mathbf{r}(u_1, u_2)$ vektorok szögét. Egyszerű számolással adódik, hogy bármely D -beli $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ pontban fennáll

$$\begin{aligned} \det \mathbf{G}(\mathbf{u}) &= g_{11}(\mathbf{u}) \cdot g_{22}(\mathbf{u}) - g_{12}(\mathbf{u})^2 = \|\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{u})\|^2 \cdot \|\partial_2 \mathbf{r}(\mathbf{u})\|^2 - \langle \partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{u}), \partial_2 \mathbf{r}(\mathbf{u}) \rangle^2 \\ &= \|\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{u})\|^2 \cdot \|\partial_2 \mathbf{r}(\mathbf{u})\|^2 - \|\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{u})\|^2 \cdot \|\partial_2 \mathbf{r}(\mathbf{u})\|^2 \cdot \cos^2 \alpha(\mathbf{u}) \\ &= \|\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{u})\|^2 \cdot \|\partial_2 \mathbf{r}(\mathbf{u})\|^2 \cdot \sin^2 \alpha(\mathbf{u}) = \|\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{u}) \times \partial_2 \mathbf{r}(\mathbf{u})\|^2, \end{aligned}$$

ami igazolja az állításunkat. □

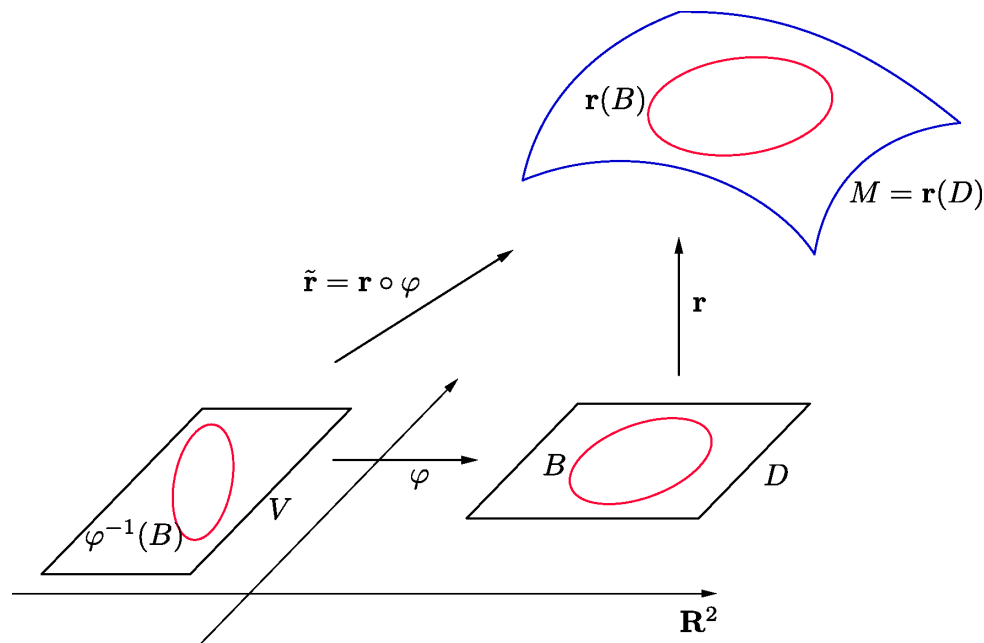
Emlékezzünk rá, hogy zárt tartományon egy olyan síkbeli alakzatot értünk, amely előáll egy összefüggő nyílt halmaz lezárásaként. Amennyiben a zárt tartomány Jordan-mérhető, akkor a korlátosságból adódóan kompakt.

5.20. Definíció Legyen B egy olyan Jordan-mérhető zárt tartomány \mathbb{R}^2 -ben, amely részhalmaza a D paramétertartománynak. Az $\mathbf{r}(B)$ kompakt felületdarab felszínén az

$$F(\mathbf{r}(B)) = \int \int_B \sqrt{\det \mathbf{G}(u_1, u_2)} \, du_1 \, du_2 \quad (5.8)$$

pozitív számot értjük.

Korábban már utaltunk rá, egy felület bármely geometriai jellemzőjétől elvárjuk, hogy az ne függjön az alkalmazott paraméteres előállítástól. A felszín vonatkozásában a következő kijelentés egy megnyugtató választ ad erre a felvetésre.



5.5. ábra. Az M felületet leíró \mathbf{r} leképezés átparaméterezése.

5.21. Állítás A felületdarab felszíne nem függ a felület paraméterezésének megválasztásától.

Bizonyítás. Tekintsük az M elemi felületet leíró \mathbf{r} vektorfüggvénynek egy $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ \varphi$ átparaméterezését a φ reguláris leképezéssel. (Lásd az 5.5. ábrát.) Ekkor az (5.6)

összefüggésben szereplő 2×2 -es mátrixok determinánisaival teljesül a

$$\det \tilde{\mathbf{G}}(v_1, v_2) = \det \mathbf{G}(\varphi(v_1, v_2)) \cdot (\det \mathbf{J}\varphi(v_1, v_2))^2$$

összefüggés. Az (5.8) egyenlettel megadott integrál meghatározásánál hajtsunk végre integráltranszformációt a φ függvényvel. A fenti összefüggés alkalmazásával azt nyerjük, hogy fennáll

$$\begin{aligned} \int \int_B \sqrt{\det \mathbf{G}(u_1, u_2)} du_1 du_2 &= \int \int_{\varphi^{-1}(B)} \sqrt{\det \mathbf{G}(\varphi(v_1, v_2))} \cdot |\det \mathbf{J}\varphi(v_1, v_2)| dv_1 dv_2 \\ &= \int \int_{\varphi^{-1}(B)} \sqrt{\det \tilde{\mathbf{G}}(v_1, v_2)} dv_1 dv_2. \end{aligned}$$

Ezzel az állításunk igazolást nyert. □

Az (5.7) összefüggés következtében igaz az alábbi kijelentés is.

5.22. Következmény *Az $\mathbf{r}(B)$ kompakt felületdarab felszínére teljesül*

$$F(\mathbf{r}(B)) = \int \int_B \|\partial_1 \mathbf{r}(u_1, u_2) \times \partial_2 \mathbf{r}(u_1, u_2)\| du_1 du_2.$$

A felszín értelmezésének geometriai háttere

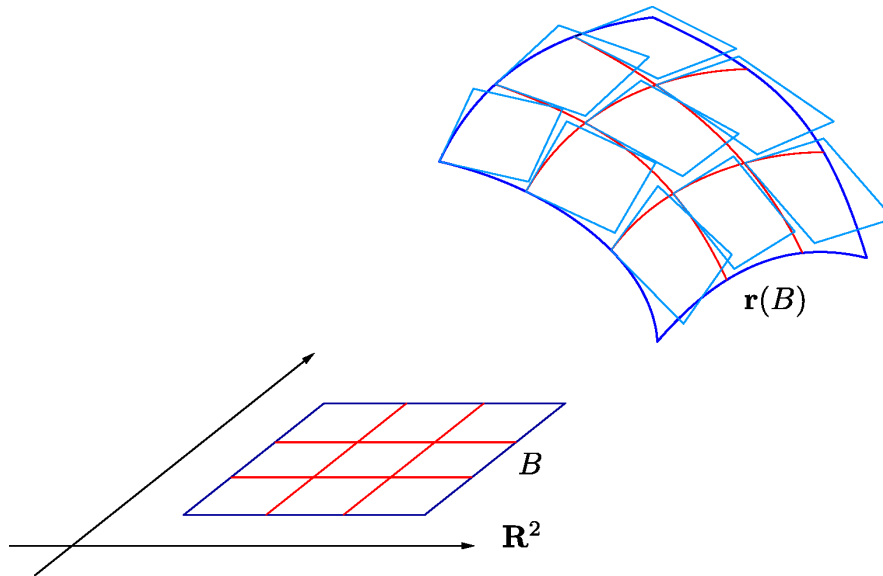
Tekintsük most azt a speciális esetet, amikor a D -beli B tartományra valamely a_k, b_k ($k = 1, 2$) valós számokkal fennáll $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, vagyis, amikor B egy zárt téglalap \mathbb{R}^2 -ben. Vegyük az intervallumok $P_1 = \{a_1 = u_0 < u_1 < \dots < u_{m-1} < u_m = b_1\}$ és $P_2 = \{a_2 = v_0 < v_1 < \dots < v_{n-1} < v_n = b_2\}$ felosztásait. Ezen felosztásoknál alkalmazzuk a $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$ és $\Delta v_j = v_{j+1} - v_j$ jelöléseket. A fenti eredmények következtében a felszín meghatározó (5.8) integrálnak a

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \|\partial_1 \mathbf{r}(u_i, v_j) \times \partial_2 \mathbf{r}(u_i, v_j)\| \cdot \Delta u_i \cdot \Delta v_j$$

összeg az egyik integrálközelítő összege. Vegyük észre, hogy ennek bármely tagja annak a felületet érintő kis paralelogrammának a területével egyenlő, amelyet a $\Delta u_i \cdot \partial_1 \mathbf{r}(u_i, v_j)$ és $\Delta v_j \cdot \partial_2 \mathbf{r}(u_i, v_j)$ érintővektorok feszítenek ki. (Lásd az 5.6 ábrát.)

Pongyolán fogalmazva szokás azt is mondani, hogy a felosztásoknak megfelelő paramétervonalak az $\mathbf{r}(B)$ felületdarabot vonalnégyszögekre osztják fel, és ezeket a vonalnégyszögeket közelítik az őket érintő paralelogrammák.

Speciális kompakt felület felszíne



5.6. ábra. Az $\mathbf{r}(B)$ felületdarab közelítése érintő paralelogrammákkal.

A felszín fogalmát ki lehet terjeszteni kompakt, összefüggő sima felületekre is az alábbi esetben.

Legyen M egy olyan kompakt, összefüggő felület \mathbb{R}^3 -ban, hogy ahhoz megadható egy \mathbb{R}^2 -beli D Jordan-mérhető zárt tartományon értelmezett olyan $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható leképezés, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:

- (1) Az \mathbf{r} vektorfüggvény értékkészlete megegyezik az M felülettel, azaz fennáll $\mathbf{r}(D) = M$.
- (2) Amennyiben az \mathbf{r} -t leszűkítjük a D zárt tartomány U belsejére, akkor az $\mathbf{r}|_U$ vektorfüggvény egy sima elemi felületnek a paraméterezése.

Könnyen belátható, hogy az $\mathbf{r}(U)$ elemi felület \mathbb{R}^3 -beli lezárása az M kompakt felületet adja. Tekintsük D -n a $g_{ij} = \langle \partial_i \mathbf{r}, \partial_j \mathbf{r} \rangle$ kifejezéssel megadott $g_{ij} : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j = 1, 2$) folytonos függvényeket, továbbá az általuk meghatározott $\mathbf{G} : D \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^2)$ leképezést. Az (5.7) összefüggésből adódik, hogy $\det \mathbf{G}(u_1, u_2) \geq 0$ teljesül bármely $(u_1, u_2) \in D$ esetén. Az alábbi definícióban szereplő mértékről is igazolható, hogy az független a felületet leíró vektorfüggvénytől.

5.23. Definíció Az M kompakt felület felszínén az $F(M) = \int \int_D \sqrt{\det \mathbf{G}(u_1, u_2)} du_1 du_2$ pozitív számot értjük.

5.7. Példa. Tekintsük az \mathbb{R}^2 -beli $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\pi, \pi]$ tartományon azt az $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható vektorfüggvényt, amelyre fennáll

$$\mathbf{r}(u_1, u_2) = a \cos u_1 \cos u_2 \mathbf{e}_1 + a \cos u_1 \sin u_2 \mathbf{e}_2 + a \sin u_1 \mathbf{e}_3$$

egy $a > 0$ számmal. Világos, hogy az $S = \mathbf{r}(D)$ alakzat megegyezik a $\mathbf{0}$ centrumú és a sugarú gömbfelülettel, továbbá az \mathbf{r} leképezés eleget tesz a fenti feltételeknek. Ekkor a

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathbf{r}(u_1, u_2) &= -a \sin u_1 (\cos u_2 \mathbf{e}_1 + \sin u_2 \mathbf{e}_2) + a \cos u_1 \mathbf{e}_3, \\ \partial_2 \mathbf{r}(u_1, u_2) &= a \cos u_1 (-\sin u_2 \mathbf{e}_1 + \cos u_2 \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

egyenletek következtében bármely $(u_1, u_2) \in D$ helyen igaz

$$g_{11}(u_1, u_2) = a^2, \quad g_{12}(u_1, u_2) = 0, \quad g_{22}(u_1, u_2) = a^2 \cos^2 u_1,$$

tehát teljesül $\sqrt{\det \mathbf{G}(u_1, u_2)} = a^2 \cos u_1$. Az 5.23. Definíció alapján az a sugarú S szféra felszínére a várt $F(S) = 4\pi a^2$ értéket kapjuk. Célszerű még megjegyezni, hogy amennyiben $u_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ és $u_2 \in (-\pi, \pi)$, akkor a normális egységvektorra az $\mathbf{N}(u_1, u_2) = -\frac{1}{a} \mathbf{r}(u_1, u_2)$ összefüggés adódik.

5.5. Sima leképezések felületek között

A sima leképezés és annak érintőleképezései

Ebben az alfejezetben elemi felületek közötti leképezéseket tárgyalunk. Először azt kell tisztáznunk, hogy egy ilyen leképezést mikor nevezünk simának.

5.24. Definíció Legyenek adva \mathbb{R}^3 -ban az M, \hat{M} elemi felületek és egy $\mu : M \rightarrow \hat{M}$ leképezés. Tekintsük ezen felületek egy-egy $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ és $\hat{\mathbf{r}} : \hat{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezését, továbbá a nekik megfelelő $\rho : M \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$, $\hat{\rho} : \hat{M} \rightarrow \hat{D} \subset \mathbb{R}^2$ koordinátázásokat. A felületek közötti μ leképezést simának mondjuk, ha a $\varphi = \hat{\rho} \circ \mu \circ \mathbf{r}$, $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezés C^∞ -osztályú.

Megjegyzés Az 5.12. Tételt alkalmazva belátható, hogy a $\mu : M \rightarrow \hat{M}$ leképezés simasága nem függ az M, \hat{M} elemi felületek $\mathbf{r}, \hat{\mathbf{r}}$ paraméterezéseinek a megválasztásától.

A továbbiakban rögzített $\mathbf{r}, \hat{\mathbf{r}}$ paraméteres előállításokat fogunk alkalmazni a μ sima leképezés vizsgálatához.

A $\varphi = \hat{\rho} \circ \mu \circ \mathbf{r}$ differenciálható függvényről azt mondjuk, hogy a felületek \mathbf{r} és $\hat{\mathbf{r}}$ paraméterezéseire nézve ez a leképezés írja le μ -t. Világos, hogy a $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény meghatározza a μ leképezést, mivel fennáll $\mu = \hat{\mathbf{r}} \circ \varphi \circ \mathbf{r}$. Az eddigi jelölésünket

követve legyenek φ_1 és φ_2 a D tartományon vett φ leképezés koordináta-függvényei. Ily módon teljesül $\varphi(u_1, u_2) = (\varphi_1(u_1, u_2), \varphi_2(u_1, u_2))$ bármely $(u_1, u_2) \in D$ esetén.

Tekintsünk egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét az M felületen. Legyen $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ az a C^∞ -osztályú leképezés D -ben, amellyel fennáll $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$. Ennek a $\sigma = \rho \circ \gamma$ kifejezéssel is leírható görbének a koordináta-függvényei legyenek $\sigma_1, \sigma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$. Vegyük az \hat{M} elemi felületen a $\mu \circ \gamma = \hat{\mathbf{r}} \circ \varphi \circ \sigma$ felületi görbét, melyet a γ görbe μ szerinti képének mondunk. Jelöljük ki egy $t_0 \in I$ helyet. Az (5.2) egyenletnek megfelelően a γ -nak a t_0 -beli sebességvektorára fennáll $\gamma'(t_0) = \sum_{i=1}^2 \sigma'_i(t_0) \cdot \partial_i \mathbf{r}(\sigma(t_0))$. Amennyiben alkalmazzuk az összetett függvény deriválására vonatkozó láncszabályt, akkor a képgörbe sebességvektorára a

$$(\mu \circ \gamma)'(t_0) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \partial_j \varphi_i(\sigma(t_0)) \cdot \sigma'_j(t_0) \cdot \partial_i \hat{\mathbf{r}}(\varphi(\sigma(t_0))) \quad (5.9)$$

összefüggést kapjuk. Eszerint a $(\mu \circ \gamma)'(t_0)$ derivált vektor kifejezhető a $\sigma'_1(t_0), \sigma'_2(t_0)$ értékekből. Ennek ismeretében be lehet vezetni a következő fogalmat.

5.25. Definíció Legyen adott egy \mathbf{w} érintővektor az M felületnek valamely \mathbf{p} pontjában. Vegyük az M -nek egy olyan γ felületi görbéjét, amelyre egy $t_0 \in I$ helyen igaz $\gamma(t_0) = \mathbf{p}$ és $\gamma'(t_0) = \mathbf{w}$. A $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ vektorhoz rendeljük hozzá az \hat{M} felület $\mu(\mathbf{p})$ pontjában a $(\mu \circ \gamma)'(t_0)$ vektort és alkalmazzuk a $(\mu \circ \gamma)'(t_0) = T_{\mathbf{p}}\mu(\mathbf{w})$ a jelölést. Ily módon egy $T_{\mathbf{p}}\mu : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{\mu(\mathbf{p})}\hat{M}$ leképezést nyerünk, melyet a μ sima leképezés \mathbf{p} pontbeli érintőleképezésének mondunk.

Tekintsük egy $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^2 w_i \cdot \partial_i \mathbf{r}(\mathbf{a})$ érintővektort a $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{a})$ pontban. Az (5.9) összefüggés alapján könnyen belátható, hogy a $T_{\mathbf{p}}\mu(\mathbf{w})$ vektor nem függ a γ felületi görbe megválasztásától és fennáll

$$T_{\mathbf{p}}\mu(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \partial_j \varphi_i(\mathbf{a}) \cdot w_j \cdot \partial_i \hat{\mathbf{r}}(\varphi(\mathbf{a})). \quad (5.10)$$

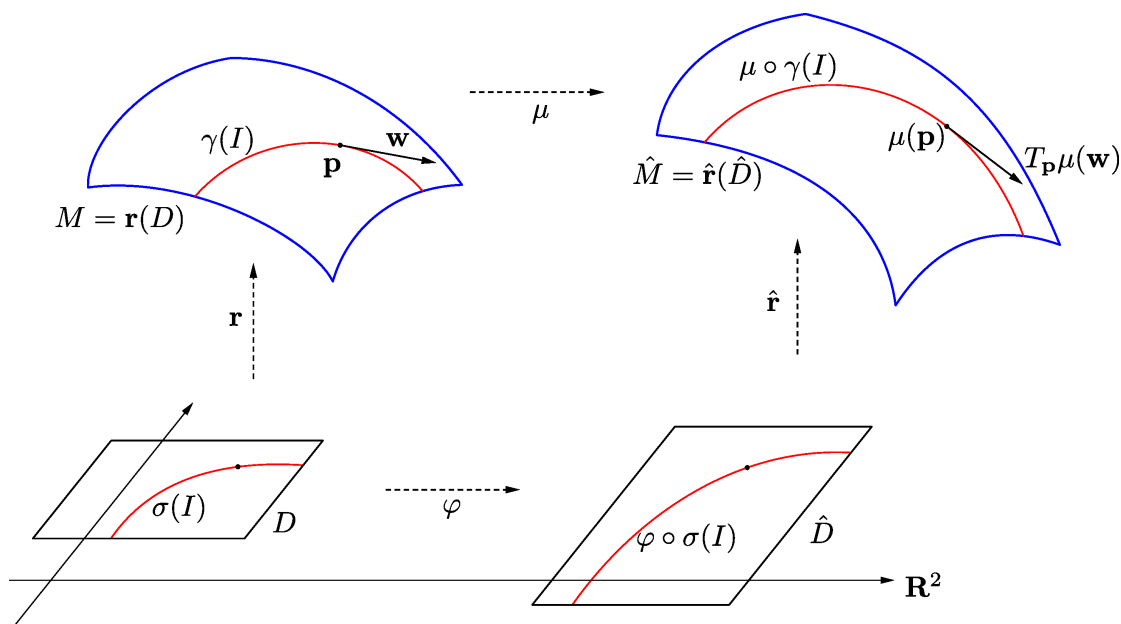
Az (5.10) egyenletből már következik, hogy a $T_{\mathbf{p}}\mu$ érintőleképezés lineáris, továbbá az érintőterek természetes bázisaira nézve a $T_{\mathbf{p}}\mu$ lineáris leképezést a $\mathbf{J}\varphi(\mathbf{a})$ Jacobi-mátrix írja le.

5.26. Definíció A $\mu : M \rightarrow \hat{M}$ sima leképezést regulárisnak mondjuk, ha a $T_{\mathbf{p}}\mu$ érintőleképezés rangjára fennáll $\text{rk } T_{\mathbf{p}}\mu = 2$ bármely $\mathbf{p} \in M$ pont esetén.

Megjegyzés Vegyük észre, hogy a μ leképezés pontosan akkor reguláris, ha a neki megfelelő C^∞ -osztályú $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény reguláris.

Izometrikus leképezés két felület között

A továbbiak során is feltesszük, hogy adva vannak az M, \hat{M} elemi felületek az $\mathbf{r}, \hat{\mathbf{r}}$ paraméterezésekkel.



5.7. ábra. A felületek közötti $\mu : M \rightarrow \hat{M}$ sima leképezés érintőleképezése.

5.27. Definíció Egy $\mu : M \rightarrow \hat{M}$ sima leképezést *izometrikusnak* nevezünk, ha bármely $\mathbf{p} \in M$ pontban vett tetszőleges \mathbf{v}, \mathbf{w} érintővektorokra fennáll $\langle T_{\mathbf{p}}\mu(\mathbf{v}), T_{\mathbf{p}}\mu(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

A μ sima leképezést *izometriának* mondjuk az M és \hat{M} felületek között, ha μ izometrikus és bijektív.

Megjegyzés Legyen a $\mu : M \rightarrow \hat{M}$ leképezés izometrikus. Világos, hogy ekkor μ reguláris. Emellett bármely $\mathbf{a} \in D$ pontnak van olyan U nyílt és összefüggő környezete, hogy a μ -nek az $\mathbf{r}(U)$ felületdarabra vett leszűkítése már egy bijekciót ad az $\mathbf{r}(U)$ és $\mu(\mathbf{r}(U))$ elemi felületek között.

Emlékezzünk rá, hogy jegyzetünkben egy $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima görbének az ívhosszát $l(\gamma)$ jelöli. Az alábbi tétel azt mondja ki, hogy a μ leképezés pontosan akkor izometrikus, ha megőrzi a felületi görbék ívhosszát.

5.28. Tétel A $\mu : M \rightarrow \hat{M}$ sima leképezés izometrikus akkor és csak akkor, ha bármely $\gamma : [a, b] \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ felületi görbe esetén a $\mu \circ \gamma$ képgörbe ívhosszára fennáll $l(\mu \circ \gamma) = l(\gamma)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a μ sima leképezés megőrzi az M felületen vett görbék ívhosszát. A 2.7. Tétel szerint ez azt jelenti, hogy tetszőleges γ felületi görbére igaz $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|(\mu \circ \gamma)'(t)\| dt$. Vegyük észre, hogy ekkor bármely $t \in I$ helyen

teljesül $\|\gamma'(t)\| = \|(\boldsymbol{\mu} \circ \gamma)'(t)\| = \|T_{\gamma(t)}\boldsymbol{\mu}(\gamma'(t))\|$. Ennek következtében tetszőleges $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ érintővektorra fennáll $\|T_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\mu}(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{w}\|$. Innen viszont már következik, hogy a $\boldsymbol{\mu}$ érintőleképezései megőrzik a skaláris szorzatot, vagyis $\boldsymbol{\mu}$ egy izometrikus leképezés.

A tétel másik irányban történő igazolása triviális. \square

Tekintsünk most egy olyan $\boldsymbol{\mu} : M \rightarrow \hat{M}$ sima reguláris leképezést, amely bijektív. Egy szükséges és elégséges feltételt fogunk adni arra vonatkozóan, hogy $\boldsymbol{\mu}$ izometria legyen.

Célszerű ez esetben kihasználni azt, hogy a $\boldsymbol{\varphi} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \circ \boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{r}$ leképezés eleget tesz a paramétertranszformációs függvényre vonatkozó feltételeknek. Ily módon most vehetjük az $\hat{\mathbf{r}}$ vektorfüggvénynek az $\tilde{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}} \circ \boldsymbol{\varphi}$ átparaméterezését. Amennyiben a felületek \mathbf{r} és $\tilde{\mathbf{r}}$ paraméteres előállításait vesszük, akkor a $\boldsymbol{\mu}$ által egymáshoz rendelt pontok koordinátái megegyeznek, azaz teljesül $\boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{r}(u_1, u_2) = \tilde{\mathbf{r}}(u_1, u_2)$ bármely $(u_1, u_2) \in D$ pontban.

5.29. Tétel *Legyen a $\boldsymbol{\mu} : M \rightarrow \hat{M}$ sima leképezés reguláris és bijektív. A $\boldsymbol{\mu}$ leképezés izometria a két felület között akkor és csak akkor, ha az \mathbf{r} és $\tilde{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}} \circ \boldsymbol{\varphi}$ paraméterezésekhez tartozó első főmennyiségek azonosak, azaz fennáll $g_{ij} = \tilde{g}_{ij}$ ($i, j = 1, 2$).*

Bizonyítás. Világos, hogy a $\boldsymbol{\mu}$ sima bijekció akkor ad izometriát, ha tetszőleges $\mathbf{u} \in D$ esetén a $T_{\mathbf{r}(\mathbf{u})}M$ érintőtér természetes bázisvektoraira teljesülnek az

$$\langle \partial_i \mathbf{r}(\mathbf{u}), \partial_j \mathbf{r}(\mathbf{u}) \rangle = \langle T_{\mathbf{r}(\mathbf{u})}\boldsymbol{\mu}(\partial_i \mathbf{r}(\mathbf{u})), T_{\mathbf{r}(\mathbf{u})}\boldsymbol{\mu}(\partial_j \mathbf{r}(\mathbf{u})) \rangle$$

($i, j = 1, 2$) egyenlőségek.

Az $\tilde{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{r}$ összefüggés következtében az érintőleképezésre most fennáll $T_{\mathbf{r}(\mathbf{u})}\boldsymbol{\mu}(\partial_i \mathbf{r}(\mathbf{u})) = \partial_i \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{u})$. Ily módon a $\boldsymbol{\mu}$ leképezés pontosan akkor izometrikus, ha igazak a $g_{ij}(\mathbf{u}) = \tilde{g}_{ij}(\mathbf{u})$ ($i, j = 1, 2$) egyenlőségek bármely $\mathbf{u} \in D$ pontban. \square

A fenti tételből már adódik a következő kijelentés.

5.30. Következmény *Legyen a $\boldsymbol{\mu} : M \rightarrow \hat{M}$ leképezés izometria az M és \hat{M} elemi felületek között. Ekkor $\boldsymbol{\mu}$ megőrzi a kompakt felületdarabok felszínét.*

Megjegyzés Elemi felületek közötti izometriákra majd a 6.6. alfejezetben adunk példákat.

Az elemi felület Gauss-leképezése

Tekintsük a $\mathbf{0}$ centrumú és 1 sugarú $S^2 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{u}\| = 1\}$ gömbfelületet, amellyel már foglalkoztunk az 5.5. Pédában. Mint ismeretes, az S^2 szféra egy olyan összefüggő sima felület, amely kompakt. Az \mathbb{R}^3 -beli koordinátasíkok az S^2 szférát 6 félgömbre osztják fel, és ezen félgömbök uniója kiadja a teljes szférát. A félgömbök már elemi felületek és előállíthatóak a $\hat{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ nyílt körlemezen vett h_1 és h_2 függvények grájként, melyekre fennáll $h_i(u, v) = (-1)^i \sqrt{1 - u^2 - v^2}$ ($i = 1, 2$).

5.31. Definíció Legyen adott egy M elemi felület az $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezéssel. Azt a $\boldsymbol{\mu} : M \rightarrow S^2$ leképezést, melyet a $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}(u_1, u_2)) = \mathbf{N}(u_1, u_2)$ egyenlet ír le tetszőleges $(u_1, u_2) \in D$ mellett, az M felület Gauss-leképezésének mondjuk.

Megjegyzés Amennyiben az \mathbf{r} előállításnak vesszük egy irányításváltó átparaméterezését, akkor a Gauss-leképezés a (-1) -szeresére változik.

Tekintsünk egy tetszőleges $(a_1, a_2) \in D$ pontot, melynek a $\mathbf{p} = \mathbf{r}(a_1, a_2)$ felületi pont felel meg. Ennek van olyan U nyílt összefüggő környezete D -ben, hogy az $\mathbf{N}(U)$ alakzat rajta van a koordinátasíkok által meghatározott félgömbök egyikén. Válasszuk ki az egyik ilyen félgömböt, melyet jelöljön most Q . Világos, hogy ekkor a $\boldsymbol{\mu}|_{\mathbf{r}(U)} : \mathbf{r}(U) \subset M \rightarrow Q$ leszűkített leképezés sima.

Vegyük a $\mathbf{p} = \mathbf{r}(a_1, a_2)$ pontot. Az 5.5. Példa során beláttuk, hogy az S^2 szféra $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{p})$ pontbeli lineáris érintőtere is merőleges az $\mathbf{N}(a_1, a_2) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{p})$ vektorra, tehát fennáll $T_{\mathbf{p}}M = T_{\boldsymbol{\mu}(\mathbf{p})}S^2$. Ennek következtében a $\boldsymbol{\mu} : M \rightarrow S^2$ Gauss-leképezésnek a \mathbf{p} -beli $T_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\mu}$ érintőleképezése egy olyan lineáris leképezést ad, amely önmagába képezi a $T_{\mathbf{p}}M$ érintőteret. A következő fejezetben majd látni fogjuk, hogy ez a tény felhasználható a felület görbületi jellemzéséhez.

5.6. Feladatok

5.1. Feladat Tekintsük az \mathbb{R}^3 térben az $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ egyenlettel leírt 1 sugarú gömbfelületet. Amennyiben ebből elhagyjuk az $\mathbf{n} = (0, 0, 2)$ pontot, akkor az M elemi felülethez jutunk. Az \mathbf{n} pontot vetítési középpontnak használva centrálisan vetítsük le az M -t a $z = 0$ egyenletű síkra. Határozzuk meg az M -nek azt az $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméteres előállítását, amelyet a fent leírt sztereografikus projekcióval nyerünk.

5.2. Feladat Az \mathbb{R}^3 térben vegyünk azt az egyenest, amely a $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2 + 2t\mathbf{e}_3$, $t \in \mathbb{R}$ egyenlettel megadott $\boldsymbol{\gamma}$ görbének a pályája. Forgassuk meg ezt az egyenest a z koordináta-tengely körül. Bizonyítsuk be, hogy a kapott felület egy egyköpenyű hiperboloid.

5.3. Feladat Tekintsük az \mathbb{R}^2 -beli $D = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ tartományon azt az $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt, melyet az $\mathbf{r}(u, v) = 2 \sin u \mathbf{e}_1 + \sin(2u) \mathbf{e}_2 + v \mathbf{e}_3$ összefüggés határozza meg. Mutassuk meg, hogy bár az \mathbf{r} vektorfüggvény reguláris és injektív, az $\mathbf{r}(D)$ alakzat nem ad sima elemi felületet.

5.4. Feladat Az \mathbb{R}^2 -beli $D = (0, \infty) \times (-\infty, 0)$ tartományon tekintsük azt az $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt, amelyre fennáll $\mathbf{r}(u, v) = (u^2 - v) \mathbf{e}_1 + (v^2 - u) \mathbf{e}_2 + uv \mathbf{e}_3$ bármely $(u, v) \in D$ esetén. Az \mathbf{r} által leírt sima felület $\mathbf{p} = (2, 0, -1)$ pontjában határozzuk meg az érintősík egyenletét.

5.5. Feladat Legyenek a és b olyan pozitív valós számok, hogy $a > b$. Tekintsük az $\mathbf{r}(u, v) = (a + b \cos u)(\sin v \mathbf{e}_1 + \cos v \mathbf{e}_2) + b \sin u \mathbf{e}_3$ összefüggéssel meghatározott $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt. Az $M = \mathbf{r}([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$ alakzatot tóruszfelületnek (röviden csak tórusznak) nevezzük. Mutassuk meg, hogy a tórusz egy sima felület, továbbá írjuk le a tóruszt egy implicit egyenlettel.

5.6. Feladat Mutassuk meg, hogy a $z^3 - xy^2 = 4$ egyenlet egy sima felületet ír le az \mathbb{R}^3 euklideszi térben. Határozzuk meg a felület $\mathbf{p} = (1, 2, p_3)$ pontbeli érintősíkjának az egyenletét.

5.7. Feladat Az \mathbb{R}^3 euklideszi térben vegyük az $\ln(x^2 + y^2 - 1) + xz - yz = 6$ egyenlettel leírt sima felületet. Határozzuk meg a felület $\mathbf{p} = (1, -1, 3)$ pontban vett érintősíkjának az egyenletét.

5.8. Feladat Adva van \mathbb{R}^3 -ban egy M elemi felület és annak egy \mathbf{p} pontja. Tegyük fel, hogy van egy olyan \mathbf{p} -t tartalmazó S sík, amelynek nincs több közös pontja az M -mel. Bizonyítsuk be, hogy ekkor S éppen az M felület \mathbf{p} -beli érintősíkja.

5.9. Feladat Igazoljuk, hogy a $z = a^2 x^2 - b^2 y^2$ ($a \neq 0, b \neq 0$) egyenlettel leírt hiperbolikus paraboloid tetszőleges érintősíkja a felületből két egyenest metsz ki.

5.10. Feladat Legyen M egy olyan összefüggő sima felület \mathbb{R}^3 -ban, amelynek bármely normális egyenese metszi a tér egy rögzített t egyenesét. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az M felület bármely pontjának van olyan nyílt környezete, hogy annak M -mel vett metszete valamely forgásfelületnek egy darabja.

5.11. Feladat Tekintsük azt az \mathbb{R}^2 -beli $D = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ tartományon értelmezett $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt, amelyet az $\mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2 + \frac{u^2}{2v} \mathbf{e}_3$ egyenlet ír le. Igazoljuk, hogy az $M = \mathbf{r}(D)$ elemi felület rajta van egy másodrendű felületen. Határozzuk meg annak az $\mathbf{r}(B)$ kompakt felületdarabnak a felszínét, ahol $B = [0, 1] \times [1, 2]$.

5.12. Feladat Tekintsük azt a sima felületet \mathbb{R}^3 -ban, amelyet az $\mathbf{r}(u, v) = (\cos u - v \sin u) \mathbf{e}_1 + (\sin u + v \cos u) \mathbf{e}_2 + (u + v) \mathbf{e}_3$ kifejezéssel meghatározott $\mathbf{r} : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvény ír le. Határozzuk meg a $B = [0, 2\pi] \times [1, 3]$ tartománynak megfelelő kompakt felületdarab felszínét.

5.13. Feladat Határozzuk meg az \mathbb{R}^3 -beli $z = xy$ egyenlettel leírt nyeregfelület (más néven hiperbolikus paraboloid) azon darabjának felszínét, amely az $x^2 + y^2 - 4 = 0$ egyenletű hengerfelület belsejébe esik.

5.14. Feladat Tekintsük \mathbb{R}^3 -ban az $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, z \geq 0$ összefüggésekkel leírt félgömbnek az $x^2 - ax + y^2 = 0$ egyenletű hengerfelület belsejébe eső darabját. Határozzuk meg ezen felületdarab (az ún. Viviani-féle levél) felszínét.

5.15. Feladat Vegyük az $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt, melyet az $\mathbf{r}(u, v) = \cos u (2 + v \sin(u/2)) \mathbf{e}_1 + \sin u (2 + v \sin(u/2)) \mathbf{e}_2 + v \cos(u/2) \mathbf{e}_3$ egyenlet ír le tetszőleges $u \in [0, 2\pi]$ és $v \in (-1, 1)$ esetén. Igazoljuk, hogy az $M = \mathbf{r}([0, 2\pi] \times (-1, 1))$ alakzat egy olyan összefüggő sima felület, amelyen nem adható meg folytonos normális egységvektormező. (Ezt az M sima felületet nevezik Möbius-szalagnak.)

6. fejezet

Az elemi felületek görbületi jellemzése

6.1. A felületi görbék görbülete

A normálgörbület értelmezése

A felületek görbületi jellemzése során alkalmazni fogjuk az előző fejezetben bevezetett fogalmakat és jelöléseket.

Legyen adott az $M \subset \mathbb{R}^3$ sima elemi felület, melyet a $D \subset \mathbb{R}^2$ nyílt tartományon értelmezett $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvény ír le. Jelöljük ki a D paramétertartomány egy $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ pontját. A $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{a})$ felületi pontban vegyünk egy $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ ($\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$) érintővektort. Tekintsük azt a \mathbf{p} ponton áthaladó \mathcal{S} síkot, amelyet a \mathbf{w} , $\mathbf{N}(\mathbf{a})$ vektorok feszítenek ki, ahol $\mathbf{N}(\mathbf{a})$ az \mathbf{r} paraméterezésnek megfelelő normális egységvektor az \mathbf{a} helyen. Az \mathcal{S} síkot az M felület egyik normálsíkjának mondjuk a \mathbf{p} pontban.

Az M felület \mathbf{p} pontbeli görbületi jellemzéséhez a normálsíkok által kimetszett görbéket fogjuk alkalmazni. Ily módon a görbületi vizsgálatok előtt igazolnunk kell az alábbi kijelentést.

6.1. Állítás *A \mathbf{p} pontnak van olyan \mathcal{K} nyílt környezete \mathbb{R}^3 -ban, amelynél a $\mathcal{G} = \mathcal{K} \cap \mathcal{S} \cap M$ alakzat egy egyszerű görbévé.*

Bizonyítás. Vezessük be a $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{N}(\mathbf{a})$ jelölést. Tekintsük azt az (1.2) egyenlettel leírt $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ irányítástartó izometriát, amelyre fennállnak a $\Psi(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$, $\Phi(\mathbf{b}_1) = \mathbf{e}_1$ és $\Phi(\mathbf{b}_2) = \mathbf{e}_2$ egyenlőségek. Látható, hogy ezen feltételek egyértelműen meghatározzák a Ψ egybevágósági transzformációt. Az pedig nyilvánvaló, hogy az \mathcal{S} sík $\Psi(\mathcal{S})$ képe megegyezik az $x_3 = 0$ egyenletű koordinátasíkkal.

Vegyük az $\hat{\mathbf{r}} = \Psi \circ \mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést és az általa paraméterezett $\hat{M} = \hat{\mathbf{r}}(D)$ elemi felületet. Világos, hogy ennek az $\mathbf{a} \in D$ pontbeli normális egységvektorára fennáll $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{a}) = \mathbf{e}_2$.

Alkalmazzuk az 5.8. Állítás bizonyításában alkalmazott eljárást. Eszerint van \mathbb{R}^2 -ben olyan ε sugarú, $(0, 0)$ centrumú B nyílt körlemez és azon olyan $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ injektív leképezés, amely reguláris és tetszőleges $(v_1, v_2) \in B$ esetén teljesül az

$$\hat{\mathbf{r}} \circ \varphi(v_1, v_2) = v_1 \mathbf{e}_1 + h(v_1, v_2) \mathbf{e}_2 + v_2 \mathbf{e}_3$$

összefüggés valamely $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ függvénnyel. Mivel az \hat{M} felület elemei, a B nyílt körlemez ε sugarának megválasztásával elérhető az is, hogy az $\hat{\mathbf{r}} \circ \varphi(B)$ felületdarabra fennálljon az $\hat{\mathbf{r}} \circ \varphi(B) = \hat{\mathcal{K}} \cap \hat{M}$ összefüggés, ahol $\hat{\mathcal{K}}$ a $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ pont egy megfelelő nyílt környezete.

Könnyű belátni, hogy a h függvény gráfjaként nyert $\hat{\mathbf{r}} \circ \varphi(B)$ felületdarabnak a $\Psi(\mathcal{S})$ síkkal vett metszete megegyezik a

$$\hat{\gamma}(t) = t \mathbf{e}_1 + h(t, 0) \mathbf{e}_2$$

egyenlőséggel értelmezett $\hat{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ egyszerű síkgörbe pályájával. Mivel az $\hat{M} = \hat{\mathbf{r}}(D)$ felület $\mathbf{0}$ -beli érintősíkja az $x_2 = 0$ egyenletű sík, a h függvényre most igaz $\partial_1 h(0, 0) = 0$ és $\partial_2 h(0, 0) = 0$. Ebből viszont adódik, hogy teljesül $\hat{\gamma}'(0) = \mathbf{e}_1$.

Tekintsük most a Ψ izometria Ψ^{-1} inverzét és \mathbf{p} -nek a $\mathcal{K} = \Psi^{-1}(\hat{\mathcal{K}})$ környezetét. A fentiek alapján azt nyerjük, hogy a $\mathcal{G} = \mathcal{K} \cap \mathcal{S} \cap M$ alakzat azonos a $\gamma = \Psi^{-1} \circ \hat{\gamma}$ görbe pályájával, tehát \mathcal{G} egy egyszerű görbeív. \square

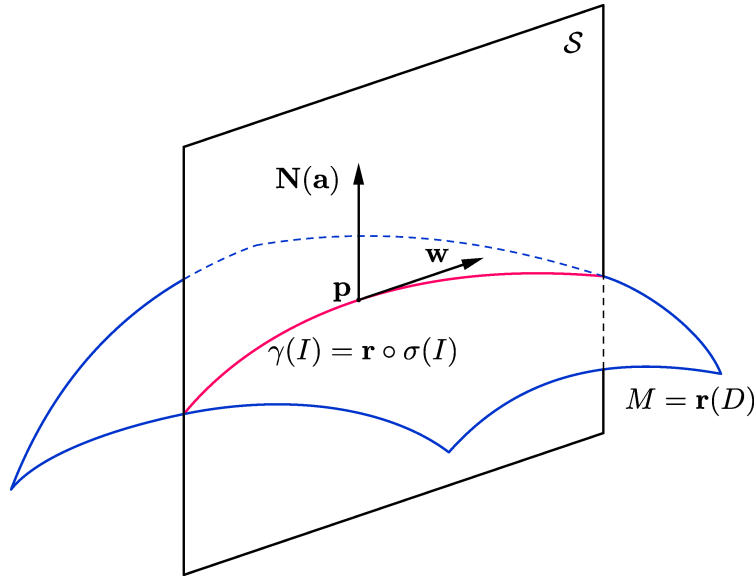
Megjegyzés A fenti bizonyításban megkonstruált $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ síkgörbére nyilván fennáll $\gamma(t) = \mathbf{r} \circ \varphi(t, 0)$ és $\gamma'(0) = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w}$.

A \mathcal{G} görbeívet az M felület \mathbf{w} érintőirányhoz tartozó normálmetszet ívének nevezzük.

A 6.1. Állítás ismeretében már be tudjuk vezetni a felület normálmetszet görbénének a fogalmát. (Lásd a 6.1. ábrát.)

6.2. Definíció Az $M = \mathbf{r}(D)$ elemei felület $\mathbf{p} = \mathbf{r}(a_1, a_2)$ pontjában legyen adva egy $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ ($\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$) érintővektor. A D paramétertartományban tekintsünk egy olyan $\sigma : I \rightarrow D$ egyszerű reguláris görbét, amelyre a $0 \in I$ helyen fennáll $\sigma(0) = \mathbf{a}$ és $(\mathbf{r} \circ \sigma)'(0) = \mathbf{w}$, továbbá a $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$ görbe pályája megegyezik egy a \mathbf{w} érintőirányhoz tartozó normálmetszet ívvel. A $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$ leképezést az M felület \mathbf{p} pontbeli, \mathbf{w} érintővektorú normálmetszet görbénének mondjuk.

Tekintsük a fenti definícióban szereplő γ normálmetszet görbét. A γ pályáját tartalmazó 2-dimenziós \mathcal{S} síknak vegyük a $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{N}(\mathbf{a})$ ortonormált vektorok által meghatározott irányítását. Célszerű itt még megjegyezni, hogy az irányított \mathcal{S} síkot azonosítani lehet \mathbb{R}^2 -vel oly módon, hogy a sík tetszőleges $\mathbf{p} + x \mathbf{b}_1 + y \mathbf{b}_2$ pontjához az $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ számpárt rendeljük.



6.1. ábra. A \mathbf{w} érintővektorhoz tartozó normálmetszet görbe a felület \mathbf{p} pontjában.

A $\gamma: I \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ leképezés egy reguláris görbe a 2-dimenziós \mathcal{S} síkban, amelyhez irányítást is rendeltünk. A γ síkgörbe kíséző Frenet-bázisát képező vektormezők legyenek $\mathbf{B}_1: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ és $\mathbf{B}_2: I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Eszerint \mathbf{B}_1 jelöli az érintő egységvektormezőt és \mathbf{B}_2 a γ síkgörbe normális egységvektormezőjét. Világos, hogy a 0 helyen vett Frenet-vektorokra fennáll $\mathbf{B}_1(0) = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w}$ és $\mathbf{B}_2(0) = \mathbf{N}(\mathbf{a})$.

A 3.2. Definíció alapján értelmezni lehet a γ síkgörbe előjeles görbületét a $t = 0$ helyen. Ennek kiszámításához szükségünk van az \mathbf{r} vektorfüggvény másodrendű parciális deriváltjaira. A továbbiakban az \mathbf{r} leképezés i -edik és j -edik változók szerinti másodrendű parciális deriváltját a $\partial_{i,j}\mathbf{r}$ ($i, j = 1, 2$) szimbólum fogja jelölni. Ez alapján tehát fennáll $\partial_{i,j}\mathbf{r} = \partial_j(\partial_i\mathbf{r})$.

Az (5.2) összefüggést alkalmazva γ második deriváltjára a

$$\gamma''(t) = \sum_{i=1}^2 \sigma_i''(t) \cdot \partial_i \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}(t)) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sigma_i'(t) \cdot \sigma_j'(t) \cdot \partial_{i,j} \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \quad (6.1)$$

kifejezést kapjuk, amelyben σ_1 és σ_2 a $\boldsymbol{\sigma}$ görbe koordináta-függvényei.

Írjuk most fel a $\gamma'(0) = \mathbf{w}$ vektort az \mathbf{r} parciális deriváltjaival a $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^2 w_i \cdot \partial_i \mathbf{r}(\mathbf{a})$ formában. Világos, hogy igaz $w_i = \sigma_i'(0)$ ($i = 1, 2$). A γ síkgörbének a 0 helyen vett előjeles görbületét számítsuk ki a (3.2) egyenlet alapján. Ily módon azt kapjuk, hogy fennáll a

$$k(0) = \frac{\langle \gamma''(0), \mathbf{B}_2(0) \rangle}{\|\gamma'(0)\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \langle \partial_{i,j} \mathbf{r}(\mathbf{a}), \mathbf{N}(\mathbf{a}) \rangle \cdot w_i \cdot w_j}{\|\mathbf{w}\|^2} \quad (6.2)$$

összefüggés. Ez indokolja az alábbi fogalom bevezetését.

6.3. Definíció Az \mathbf{r} vektorfüggvény által leírt M elemi felület $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{a})$ pontjában tekintsünk egy \mathbf{w} ($\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$) érintővektort, amelyre teljesül $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^2 w_i \cdot \partial_i \mathbf{r}(\mathbf{a})$. A

$$k_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \langle \partial_{i,j} \mathbf{r}(\mathbf{a}), \mathbf{N}(\mathbf{a}) \rangle \cdot w_i \cdot w_j}{\|\mathbf{w}\|^2} \quad (6.3)$$

számat a felület \mathbf{w} érintőirányhoz tartozó normálgörbületének mondjuk a \mathbf{p} pontban.

Megjegyzés Az (6.2) és (6.3) összefüggésekből adódóan a normálgörbület megegyezik a megfelelő normálmetszet ív előjeles görbületével. Ebből pedig az következik, hogy az \mathbf{r} vektorfüggvény irányítástartó átparaméterezése nem változtatja meg a normálgörbület értékét. Amennyiben irányításváltó átparaméterezést hajtunk végre, akkor a normálgörbület értéke a (-1) -szeresére változik.

Megjegyzés Vegyük az M elemi felület \mathbf{p} -beli érintősíkját, amely két féltérre osztja az \mathbb{R}^3 teret. Tekintsünk egy $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ érintőirányt és egy annak megfelelő \mathcal{G} normálmetszet ívet. Tegyük fel, hogy fennáll $k_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) \neq 0$. Ekkor a 3.5. Állítás következtében \mathcal{G} -nek van olyan a \mathbf{p} pontot tartalmazó szegmense, hogy annak pontjai \mathbf{p} kivételével abba a nyílt féltérbe esnek, amelyikbe a $k_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) \mathbf{N}(\mathbf{a})$ vektor mutat.

A második főmennyiségek

A felületek görbületi jellemzésében fontos szerepet játszanak majd az alábbi függvények, melyek értelmezéséhez az \mathbf{r} leképezés másodrendű parciális deriváltjait is felhasználjuk.

6.4. Definíció Vegyük azon $b_{ij} : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j = 1, 2$) differenciálható függvényeket, melyeket a

$$b_{ij}(u_1, u_2) = \langle \partial_{i,j} \mathbf{r}(u_1, u_2), \mathbf{N}(u_1, u_2) \rangle \quad (6.4)$$

egyenlet ír le bármely $(u_1, u_2) \in D$ esetén. Ezeket az M felület \mathbf{r} paraméterezéséhez tartozó második főmennyiségeknek nevezzük.

Tetszőleges $\mathbf{u} \in D$ pontnál jelölje $\mathbf{B}(\mathbf{u})$ azt a 2×2 -es négyzetes mátrixot, amely i -edik sorában a j -edik elem éppen $b_{ij}(\mathbf{u})$. Ily módon a második főmennyiségek által egy $\mathbf{B} : D \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^2)$ differenciálható leképezést nyerünk.

A felület $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{a})$ ($\mathbf{a} \in D$) pontjában vegyünk egy $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^2 w_i \cdot \partial_i \mathbf{r}(\mathbf{a})$ érintővektort. A \mathbf{w} érintőirányhoz tartozó normálgörbületet az első és második főmennyiségekből a

$$k_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij}(a_1, a_2) \cdot w_i \cdot w_j}{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij}(a_1, a_2) \cdot w_i \cdot w_j} \quad (6.5)$$

kifejezéssel lehet megadni.

Meusnier tétele

Tekintsünk a D paramétertartományban egy $\sigma: I \rightarrow D$ reguláris görbét és az általa meghatározott $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$ felületi görbét. Az alábbi eredményt Meusnier tételeként tartjuk számon.

6.5. Tétel *Legyen $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$ egy olyan reguláris felületi görbe, amelynél valamely $t_0 \in I$ helyen a $\gamma'(t_0)$ irányú normálgörbületre $k_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0)) \neq 0$ teljesül. Ekkor γ -nak a t_0 -beli görbületére fennáll $\kappa(t_0) > 0$ és*

$$\kappa(t_0) = \frac{1}{\langle \mathbf{F}(t_0), \mathbf{N}(\sigma(t_0)) \rangle} k_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0)),$$

ahol $\mathbf{F}(t_0)$ a γ görbe főnormális egységvektora.

Bizonyítás. A (6.1) egyenlet szerint a $\gamma''(t_0)$ és az $\mathbf{N}(\sigma(t_0))$ vektorok skaláris szorzatára igaz

$$\langle \gamma''(t_0), \mathbf{N}(\sigma(t_0)) \rangle = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \langle \partial_{i,j} \mathbf{r}(\sigma(t_0)), \mathbf{N}(\sigma(t_0)) \rangle \cdot \sigma'_i(t_0) \cdot \sigma'_j(t_0).$$

Alkalmazva a (6.3) kifejezést azt nyerjük, hogy fennáll

$$\langle \gamma''(t_0), \mathbf{N}(\sigma(t_0)) \rangle = k_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0)) \cdot \|\gamma'(t_0)\|^2.$$

Mivel feltevésünk szerint a $k_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0))$ normálgörbület nem 0, a fenti egyenlőségből adódik, hogy a $\gamma''(t_0)$ vektor nem eleme a $T_{\gamma(t_0)}M$ érintőtérnek. Ennek következtében $\gamma'(t_0)$ és $\gamma''(t_0)$ lineárisan függetlenek, tehát fennáll $\kappa(t_0) > 0$ a (2.4) egyenlet szerint. Ily módon γ -nak a t_0 helyen értelmezni lehet az $\mathbf{F}(t_0)$ főnormális egységvektorát. Vegyük észre azt, hogy mivel igaz $\gamma''(t_0) \notin T_{\gamma(t_0)}M$, az $\mathbf{F}(t_0)$ nem merőleges a felület $\mathbf{N}(\sigma(t_0))$ normális egységvektorára, vagyis $\langle \mathbf{F}(t_0), \mathbf{N}(\sigma(t_0)) \rangle \neq 0$.

Tekintsük most a t_0 helyen a (2.6) összefüggést. Eszerint teljesül

$$\gamma''(t_0) = v'(t_0) \mathbf{T}(t_0) + v(t_0)^2 \kappa(t_0) \mathbf{F}(t_0).$$

Ha a fenti egyenlet mindkét oldalát skalárisan szorozzuk az $\mathbf{N}(\sigma(t_0))$ vektorral, akkor a

$$\langle \gamma''(t_0), \mathbf{N}(\sigma(t_0)) \rangle = \|\gamma'(t_0)\|^2 \kappa(t_0) \langle \mathbf{F}(t_0), \mathbf{N}(\sigma(t_0)) \rangle$$

egyenlőséget nyerjük. Látható, hogy a fenti összefüggések következtében fennáll

$$k_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0)) = \kappa(t_0) \langle \mathbf{F}(t_0), \mathbf{N}(\sigma(t_0)) \rangle,$$

ami már igazolja a tételt. □

Megjegyzés A 6.5. Tétel alapján már belátható, hogy igaz az alábbi kijelentés, amely már konkrét geometriai tartalmat is hordoz.

Tekintsük \mathbb{R}^3 -ban azt az S gömbfelületet, amelynek sugara $R = \frac{1}{|k_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0))|}$, centruma pedig a $\mathbf{c} = \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}(t_0)) + \frac{1}{k_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0))} \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}(t_0))$ pont. A γ felületi görbének a t_0 -beli simulósíkja által az S szférából kimetszett kör megegyezik γ -nak a t_0 helyen vett simulókörével.

6.2. Az érintőtéren vett Weingarten-leképezés

A felületi vektormező iránymenti deriváltja

Ebben az alfejezetben is abból a feltevésből indulunk ki, hogy adva van egy $M \subset \mathbb{R}^3$ elemi felület, melyet a $D \subset \mathbb{R}^2$ nyílt tartományon értelmezett $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvény ír le.

Legyen adott egy $\mathbf{Y} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható leképezés. Amennyiben tetszőleges $\mathbf{u} \in D$ esetén az $\mathbf{Y}(\mathbf{u})$ vektort úgy tekintjük, mint egy $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ kezdőpontú irányított szakaszt, akkor az \mathbf{Y} függvényt az \mathbf{r} paraméterezéssel megadott M felület egyik felületi vektormezőjének nevezzük.

A továbbiakban az \mathbf{r} paraméterezés $\partial_1 \mathbf{r}$, $\partial_2 \mathbf{r}$ parciális derivált leképezéseit is felületi vektormezőknak tekintjük. Mint ismeretes, ezek a felület tetszőleges pontjában generálják a lineáris érintőteret.

6.6. Definíció Az $M = \mathbf{r}(D)$ felületen legyen adott egy $\mathbf{Y} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ felületi vektormező, továbbá egy $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{a})$ pontban egy $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ érintővektor. A D paramétertartományban vegyünk egy olyan $\boldsymbol{\sigma} : I \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ sima görbét, hogy valamely $t_0 \in I$ -re teljesüljön $\boldsymbol{\sigma}(t_0) = \mathbf{a}$ és $(\mathbf{r} \circ \boldsymbol{\sigma})'(t_0) = \mathbf{w}$. Az $(\mathbf{Y} \circ \boldsymbol{\sigma})'(t_0)$ derivált vektort az \mathbf{Y} felületi vektormező \mathbf{w} szerinti iránymenti deriváltjának mondjuk és erre a $D_{\mathbf{w}}\mathbf{Y}$ jelölést alkalmazzuk.

Megjegyzés A $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^2 w_j \cdot \partial_j \mathbf{r}(\mathbf{a})$ vektor szerinti $D_{\mathbf{w}}\mathbf{Y}$ iránymenti derivált nem függ a paramétertartományban vett $\boldsymbol{\sigma}$ görbe megválasztásától, mivel a fenti definíció alapján teljesül a

$$D_{\mathbf{w}}\mathbf{Y} = w_1 \cdot \partial_1 \mathbf{Y}(\mathbf{a}) + w_2 \cdot \partial_2 \mathbf{Y}(\mathbf{a}) \quad (6.6)$$

összefüggés. Ebből az következik, hogy bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ szám és \mathbf{v} , $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ vektorok mellett fennáll

$$D_{\lambda \mathbf{v}}\mathbf{Y} = \lambda \cdot D_{\mathbf{v}}\mathbf{Y}, \quad D_{\mathbf{v}+\mathbf{w}}\mathbf{Y} = D_{\mathbf{v}}\mathbf{Y} + D_{\mathbf{w}}\mathbf{Y}.$$

A Weingarten-leképezés értelmezése

Tekintsük az $\mathbf{N}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ normális egységvektormezőt, mint az \mathbf{r} vektorfüggvénnyel paraméterezett M felület egy kitüntetett felületi vektormezőjét. Ennek a $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{a})$ pontban vett iránymenti deriváltjaival kapcsolatban igaz az alábbi kijelentés.

6.7. Állítás *Tetszőleges $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ érintővektor esetén a $D_{\mathbf{w}}\mathbf{N}$ iránymenti derivált benne van a $T_{\mathbf{p}}M$ érintőtérben.*

Bizonyítás. Vegyük az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyet az $f(u_1, u_2) = \langle \mathbf{N}(u_1, u_2), \mathbf{N}(u_1, u_2) \rangle$ egyenlőség ad meg tetszőleges $(u_1, u_2) \in D$ helyen. Mivel az f függvény konstans, azaz $f(u_1, u_2) = 1$, az 1.28. Állítást alkalmazva azt nyerjük, hogy fennáll a

$$0 = \partial_i f(u_1, u_2) = 2 \langle \partial_i \mathbf{N}(u_1, u_2), \mathbf{N}(u_1, u_2) \rangle$$

összefüggés, amelyben az i index az 1, 2 értékeket veszi fel. Eszerint az \mathbf{a} pontbeli $\partial_i \mathbf{N}(\mathbf{a})$ vektor merőleges az $\mathbf{N}(\mathbf{a})$ vektorra, vagyis $\partial_i \mathbf{N}(\mathbf{a})$ eleme a $T_{\mathbf{p}}M$ lineáris érintőtérnek. Ily módon a (6.6) egyenletből már adódik, hogy bármely $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ vektorra teljesül $D_{\mathbf{w}}\mathbf{N} \in T_{\mathbf{p}}M$. \square

A 6.7. Állítás ismeretében már be lehet vezetni az alábbi fogalmat.

6.8. Definíció *Azt az $\mathcal{A}_{\mathbf{p}}: T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{\mathbf{p}}M$ lineáris leképezést, amelynél tetszőleges $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ vektor esetén teljesül $\mathcal{A}_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = -D_{\mathbf{w}}\mathbf{N}$, az \mathbf{r} vektorfüggvénnyel paraméterezett M felület \mathbf{p} -beli Weingarten-leképezésének mondjuk.*

Megjegyzés A előbbi definíció és (6.6) szerint a Weingarten-leképezésre tetszőleges $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^2 w_j \cdot \partial_j \mathbf{r}(\mathbf{a})$ érintővektor esetén teljesül az

$$\mathcal{A}_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = -w_1 \cdot \partial_1 \mathbf{N}(\mathbf{a}) - w_2 \cdot \partial_2 \mathbf{N}(\mathbf{a}) \quad (6.7)$$

egyenlőség.

A Weingarten-leképezés és a Gauss-leképezés kapcsolata

Az M elemi felületnek az \mathbf{r} paraméterezés szerinti Gauss-leképezését az 5.5. alfejezetben értelmeztük. Eszerint a Gauss-leképezésen azt a $\boldsymbol{\mu}: M \rightarrow S^2$ függvényt értjük, amelyre teljesül $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}(u_1, u_2)) = \mathbf{N}(u_1, u_2)$ bármely $(u_1, u_2) \in D$ esetén. Ily módon igaz $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{N} \circ \boldsymbol{\rho}$, ahol $\boldsymbol{\rho}$ az \mathbf{r} paraméterezéshez tartozó koordinátázást jelöli.

Vegyük egy $\mathbf{p} \in M$ pontot. Az 5.25. Definíció alapján értelmezni lehet a $\boldsymbol{\mu}$ sima leképezés $T_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\mu}$ érintőleképezését \mathbf{p} -ben. Legyen $\boldsymbol{\gamma}$ egy olyan felületi görbe, amelynél fennáll $\boldsymbol{\gamma}(t_0) = \mathbf{p}$ valamely $t_0 \in I$ mellett. Mint ismeretes, a $\boldsymbol{\gamma}'(t_0) \in T_{\mathbf{p}}M$ érintővektor képét a $T_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\gamma}'(t_0)) = (\boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\gamma})'(t_0)$ egyenlettel definiáltuk.

Mivel igaz $\boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{N} \circ \boldsymbol{\sigma}$, az érintő leképezésre vonatkozóan a

$$T_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\gamma}'(t_0)) = (\boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\gamma})'(t_0) = (\mathbf{N} \circ \boldsymbol{\sigma})'(t_0) = D_{\boldsymbol{\gamma}'(t_0)}\mathbf{N}$$

összefüggést nyerjük. Ebből már következik az alábbi kijelentés.

6.9. Következmény Tetszőleges $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ érintővektorra fennáll az $\mathcal{A}_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = -T_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\mu}(\mathbf{w})$ egyenlőség.

A Weingarten-leképezés átparaméterezéssel szembeni invarianciája

Eddig az M elemi felületnek egy rögzített $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméteres előállítását alkalmaztuk. Tekintsük most az \mathbf{r} vektorfüggvénynek az 5.6. Definícióban leírt $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\varphi}$ átparaméterezését a $\boldsymbol{\varphi} : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvénnyel.

Az ε szimbólum vegye fel az 1, -1 értékeket aszerint, hogy az átparaméterezés irányítástartó vagy irányításváltó. Ismeretes, hogy az $\tilde{\mathbf{r}}$ és \mathbf{r} paraméterezésekhez rendelt normális egységvektormezőkre $\tilde{\mathbf{N}} = \varepsilon \cdot \mathbf{N} \circ \boldsymbol{\varphi}$ teljesül. Ennek következtében a megfelelő $\boldsymbol{\mu}$, $\tilde{\boldsymbol{\mu}} : M \rightarrow S^2$ Gauss-leképezéseknél bármely $\mathbf{p} \in M$ pontban fennáll $\tilde{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{p}) = \varepsilon \cdot \boldsymbol{\mu}(\mathbf{p})$.

Vegyük az M felület $\tilde{\mathbf{r}}$ paraméterezésének megfelelő $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{\mathbf{p}}M$ Weingarten-leképezést a $\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \in D$) pontban. A 6.9. Következmény alapján az alábbi kijelentést tehetjük.

6.10. Állítás Az M elemi felület \mathbf{r} és $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\varphi}$ paraméterezéseinél a $T_{\mathbf{p}}M$ érintőtéren vett Weingarten-leképezésekre igaz $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{p}} = \varepsilon \cdot \mathcal{A}_{\mathbf{p}}$.

A fenti 6.10. Állítást a Gauss-leképezés alkalmazása nélkül is be lehet bizonyítani. Ugyanis az $\tilde{\mathbf{N}} = \varepsilon \cdot \mathbf{N} \circ \boldsymbol{\varphi}$ függvény parciális deriváltjára a láncszabály alapján fennállnak a

$$\partial_i \tilde{\mathbf{N}}(v_1, v_2) = \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^2 \partial_i \varphi_j(v_1, v_2) \cdot \partial_j \mathbf{N}(\boldsymbol{\varphi}(v_1, v_2))$$

($i = 1, 2$) összefüggések tetszőleges $(v_1, v_2) \in V$ helyen. Ebből pedig a (6.7) egyenlőség alapján belátható, hogy

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{p}}(\partial_i \tilde{\mathbf{r}}(v_1, v_2)) = \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^2 \partial_i \varphi_j(v_1, v_2) \cdot \mathcal{A}_{\mathbf{p}}(\partial_j \mathbf{r}(\boldsymbol{\varphi}((v_1, v_2)))) = \varepsilon \cdot \mathcal{A}_{\mathbf{p}}(\partial_i \tilde{\mathbf{r}}((v_1, v_2)))$$

teljesül, ami már igazolja a 6.10. Állítást, hiszen a $\partial_1 \tilde{\mathbf{r}}(v_1, v_2)$, $\partial_2 \tilde{\mathbf{r}}(v_1, v_2)$ vektorok generálják a $T_{\tilde{\mathbf{r}}(v_1, v_2)}M$ érintőtérét.

A második alapforma

A továbbiakban az M elemi felület egy rögzített \mathbf{r} paraméteres előállítását alkalmazzuk a görbületi vizsgálatokhoz.

6.11. Definíció Az \mathbf{r} által paraméterezett M felület \mathbf{p} pontbeli második alapformájának nevezzük azt a $II_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \times T_{\mathbf{p}}M \rightarrow \mathbb{R}$ bilineáris formát, melyet a

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathcal{A}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle \quad (6.8)$$

összefüggés ad meg tetszőleges $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ vektorokra.

A fent bevezetett fogalommal kapcsolatban igaz az alábbi kijelentés.

6.12. Állítás *A $T_{\mathbf{p}}M$ érintőtéren értelmezett $II_{\mathbf{p}}$ második alapforma egy szimmetrikus bilineáris forma.*

Bizonyítás. Rögzített $j \in \{1, 2\}$ index mellett a D paramétertartományon vegyük a $h(u_1, u_2) = \langle \mathbf{N}(u_1, u_2), \partial_j \mathbf{r}(u_1, u_2) \rangle$ összefüggéssel leírt $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt. Mivel a h függvény eltűnik D -n, azaz tetszőleges $(u_1, u_2) \in D$ helyen $h(u_1, u_2) = 0$, h -nak a i -edik ($i = 1, 2$) változó szerinti parciális deriváltjára igaz $\partial_i h(u_1, u_2) = 0$. Ily módon az 1.28. Állítás következtében fennáll

$$\langle \partial_i \mathbf{N}(u_1, u_2), \partial_j \mathbf{r}(u_1, u_2) \rangle + \langle \mathbf{N}(u_1, u_2), \partial_{j,i} \mathbf{r}(u_1, u_2) \rangle = 0. \quad (6.9)$$

Vegyük észre, hogy a $\mathbf{p} \in M$ pontnak megfelelő $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ helyen eszerint teljesül a

$$\langle -\partial_i \mathbf{N}(a_1, a_2), \partial_j \mathbf{r}(a_1, a_2) \rangle = \langle \partial_{j,i} \mathbf{r}(a_1, a_2), \mathbf{N}(a_1, a_2) \rangle = b_{ji}(a_1, a_2)$$

összefüggés. Ebből viszont (6.7) szerint az következik, hogy az $\mathcal{A}_{\mathbf{p}}$ Weingarten-leképezésre igaz

$$\langle \mathcal{A}_{\mathbf{p}}(\partial_i \mathbf{r}(a_1, a_2)), \partial_j \mathbf{r}(a_1, a_2) \rangle = b_{ij}(a_1, a_2).$$

Ily módon (6.8) alapján azt kapjuk, hogy a $II_{\mathbf{p}}$ második alapformát a $T_{\mathbf{p}}M$ -beli $\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{a})$, $\partial_2 \mathbf{r}(\mathbf{a})$ bázisra vonatkozóan a második főmennyiségekből képzett $\mathbf{B}(\mathbf{a})$ mátrix írja le. Mivel $\mathbf{B}(\mathbf{a})$ egy szimmetrikus 2×2 -es mátrix, a $II_{\mathbf{p}}$ bilineáris forma is szimmetrikus. \square

Megjegyzés Az előző bizonyítással beláttuk, hogy a $T_{\mathbf{p}}M$ lineáris érintőtér tetszőleges $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^2 v_i \cdot \partial_i \mathbf{r}(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^2 w_j \cdot \partial_j \mathbf{r}(\mathbf{a})$ vektoraira teljesül

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij}(\mathbf{a}) \cdot v_i \cdot w_j. \quad (6.10)$$

Vegyük észre azt is, hogy a (6.3), (6.10) egyenlőségek szerint fennáll a

$$II_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{w}\|^2 \cdot k_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) \quad (6.11)$$

összefüggés, ahol $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ és $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Eszerint a második alapformát a felület \mathbf{p} pontbeli előjeles normálgörbületei már meghatározzák.

Mivel a $II_{\mathbf{p}}$ alapforma szimmetrikus, az alapformát definiáló (6.8) összefüggésből adódik az alábbi eredmény.

6.13. Következmény *Az $\mathcal{A}_{\mathbf{p}}$ Weingarten-leképezés önadjungált.*

Főgörbületek és főirányok. Euler tétele a normálgörbületekről

A lineáris algebrából ismeretes, hogy amennyiben egy skaláris szorzással ellátott vektortéren adva van egy önadjungált lineáris leképezés, akkor a vektortérben megadható olyan ortonormált bázis, amelynek elemei a lineáris leképezésnek sajátvektorai.

6.14. Definíció Az $\mathcal{A}_{\mathbf{p}}: T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{\mathbf{p}}M$ önadjungált Weingarten-leképezés sajátértékeit az $M = \mathbf{r}(D)$ elemi felület \mathbf{p} pontbeli főgörbületeinek mondjuk. Az $\mathcal{A}_{\mathbf{p}}$ sajátvektorainak megfelelő $T_{\mathbf{p}}M$ -beli irányokat a felület \mathbf{p} -beli főirányainak nevezzük.

Legyenek \mathbf{v}_1 és \mathbf{v}_2 olyan ortogonális egységvektorok a $T_{\mathbf{p}}M$ lineáris érintőtérben, melyekre teljesül $\mathcal{A}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}_1) = \kappa_1 \mathbf{v}_1$ és $\mathcal{A}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}_2) = \kappa_2 \mathbf{v}_2$ valamely κ_1, κ_2 számokkal. Eszerint κ_1 és κ_2 adják a \mathbf{p} pontbeli főgörbületeket, továbbá a \mathbf{v}_1 és \mathbf{v}_2 vektorokkal meghatározott irányok az M felületnek főirányai \mathbf{p} -ben.

A (6.11) összefüggés miatt ezekkel teljesül $k_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}_i) = \kappa_i$ ($i = 1, 2$), tehát a főgörbületek megegyeznek a főirányokhoz tartozó normálgörbületekkel.

Az alábbi összefüggés alapján, melyet Euler tételeként szoktak említeni, a két főgörbületből már az összes normálgörbület értéke kifejezhető.

6.15. Tétel A $T_{\mathbf{p}}M$ érintőtérben legyen adott egy $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ egységvektor, amelyre fennáll $\mathbf{w} = \cos \vartheta \mathbf{v}_1 + \sin \vartheta \mathbf{v}_2$ a megfelelő ϑ szöggel. Ekkor teljesül

$$k_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = \kappa_1 \cos^2 \vartheta + \kappa_2 \sin^2 \vartheta. \quad (6.12)$$

Bizonyítás. Valójában a tétel egy következménye a korábbi eredményeknek. Ezekből ugyanis adódik, hogy teljesül

$$\begin{aligned} k_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) &= II_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \langle \mathcal{A}_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle \\ &= \langle \kappa_1 \cos \vartheta \mathbf{v}_1 + \kappa_2 \sin \vartheta \mathbf{v}_2, \cos \vartheta \mathbf{v}_1 + \sin \vartheta \mathbf{v}_2 \rangle \\ &= \kappa_1 \cos^2 \vartheta + \kappa_2 \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \quad \square$$

Megjegyzés Tegyük fel, hogy a $\mathbf{p} \in M$ pontbeli főgörbületekre igaz $\kappa_1 \leq \kappa_2$. Ekkor a 6.15. Tételből következik, hogy bármely $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ érintővektor esetén a normálgörbületre teljesül a $\kappa_1 \leq k_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) \leq \kappa_2$ egyenlőtlenség.

Az alábbi fogalom fontos szerepet játszik a felületek geometriai jellemzésében. A fentieknek megfelelően a κ_1, κ_2 számok az $M = \mathbf{r}(D)$ felület főgörbületeit jelölik a $\mathbf{p} \in M$ pontban.

6.16. Definíció A $K_{\mathbf{p}} = \kappa_1 \cdot \kappa_2$ számot az M sima felület \mathbf{p} pontbeli szorzatgörbületének (illetve Gauss-görbületének) nevezzük. Az M felület \mathbf{p} -beli középgörbületén a $H_{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ számot értjük.

Megjegyzés A 6.10. Állításból következik, hogy a pontbeli szorzatgörbület az átparaméterezéssel szemben invariáns. Azonban a két főgörbület és a középgörbület értéke a felület irányításváltó átparaméterezése esetén előjelet vált.

6.1. Példa Az $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezéssel leírt M elemi felület legyen a $\mathbf{0}$ centrumú és a ($a > 0$) sugarú $S = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{p}\| = a\}$ gömbfelületnek egy darabja. Vegyük észre,

hogy ekkor a normális egységvektormezőre fennáll $\mathbf{N}(u_1, u_2) = \pm \frac{1}{a} \mathbf{r}(u_1, u_2)$ bármely $(u_1, u_2) \in D$ mellett, és az egyenlőségben szereplő előjel függ a felületet paraméterező \mathbf{r} vektorfüggvény megválasztásától.

Az \mathbf{N} parciális deriváltjaira teljesül $\partial_i \mathbf{N}(u_1, u_2) = \pm \frac{1}{a} \partial_i \mathbf{r}(u_1, u_2)$, tehát (6.7) szerint igaz $\mathcal{A}_{\mathbf{r}(\mathbf{u})}(\partial_i \mathbf{r}(\mathbf{u})) = \mp \frac{1}{a} \partial_i \mathbf{r}(\mathbf{u})$. Ebből viszont az következik, hogy tetszőleges $\mathbf{p} \in M$ pontban a Weingarten-leképezésre fennáll $\mathcal{A}_{\mathbf{p}} = \mp \frac{1}{a} id$, ahol id most a $T_{\mathbf{p}}M$ érintőtéren vett identikus leképezést jelöli. A fentiek alapján minden érintőirány főirány, továbbá a főgörbületekre bármely pontban igaz $\kappa_1 = \kappa_2 = \mp \frac{1}{a}$. Eszerint az M gömbi felületen a Gauss-görbület értéke $K = \frac{1}{a^2}$, a középgörbület értéke pedig $H = \mp \frac{1}{a}$.

Megjegyzés Tegyük fel, hogy az $M = \mathbf{r}(D)$ elemi felület rajta van a tér egy síkján. Nyilvánvaló, hogy ekkor az \mathbf{N} vektormező konstans, és ennek következtében a Weingarten-leképezés az összes pontban eltűnik. Ily módon a síkbeli M felületre fennáll $K = 0$ és $H = 0$.

A Weingarten-leképezés mátrixa

Vegyük az $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvénnyel paraméterezett M elemi felület egy $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{u})$ pontját, ahol $\mathbf{u} \in D$. Tekintsük ebben a pontban az $\mathcal{A}_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{\mathbf{p}}M$ Weingarten-leképezést, melyet a $T_{\mathbf{p}}M$ lineáris érintőtér $\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{u})$, $\partial_2 \mathbf{r}(\mathbf{u})$ bázisára nézve írja le a 2×2 -es $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ mátrix. Eszerint fennáll az

$$\mathcal{A}_{\mathbf{p}}(\partial_i \mathbf{r}(\mathbf{u})) = \sum_{l=1}^2 A_{li}(\mathbf{u}) \cdot \partial_l \mathbf{r}(\mathbf{u})$$

összefüggés, ahol $A_{li}(\mathbf{u})$ az $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ mátrix l -edik sorának az i -edik elemét jelöli ($l, i = 1, 2$). A fenti egyenlet mindkét oldalát skalárisan szorozzuk meg a $\partial_j \mathbf{r}(\mathbf{u})$ vektorral. Ekkor $II_{\mathbf{p}}(\partial_i \mathbf{r}(\mathbf{u}), \partial_j \mathbf{r}(\mathbf{u})) = \langle \mathcal{A}_{\mathbf{p}}(\partial_i \mathbf{r}(\mathbf{u})), \partial_j \mathbf{r}(\mathbf{u}) \rangle$ következtében a

$$b_{ij}(\mathbf{u}) = \sum_{l=1}^2 A_{li}(\mathbf{u}) \cdot g_{lj}(\mathbf{u})$$

($i, j = 1, 2$) egyenlőséget kapjuk. Amennyiben kihasználjuk még azt is, hogy igaz $b_{ij} = b_{ji}$ és $g_{lj} = g_{jl}$, akkor ebből a $\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \mathbf{G}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{u})$ mátrixegyenletet nyerjük. Innen már következik, hogy a Weingarten-leképezés $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ mátrixa kifejezhető az

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{G}(\mathbf{u})^{-1} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{u}) \tag{6.13}$$

egyenlettel, ahol $\mathbf{G}(\mathbf{u})^{-1}$ az első főmennyiségekből képzett $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ mátrix inverzét jelöli.

A (6.13) kifejezésnek megfelelően vegyük azt az $\mathbf{A} : D \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^2)$ leképezést, amelyre $\mathbf{A}(u, v) = \mathbf{G}(u, v)^{-1} \cdot \mathbf{B}(u, v)$ teljesül tetszőleges $(u, v) \in D$ mellett. Ha alkalmazzuk

a $\mathbf{G}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{G}} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}$ kifejezést, akkor azt nyerjük, hogy fennáll az

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\det \mathbf{G}} \begin{pmatrix} g_{22} b_{11} - g_{12} b_{12} & g_{22} b_{12} - g_{12} b_{22} \\ g_{11} b_{12} - g_{12} b_{11} & g_{11} b_{22} - g_{12} b_{12} \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

összefüggés.

A görbületi jellemzők kiszámítása

Legyenek $K : D \rightarrow \mathbb{R}$ és $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ azok a függvények, ahol tetszőleges $(u, v) \in D$ esetén $K(u, v)$ megegyezik az \mathbf{r} paraméterezéssel leírt M elemi felület szorzatgörbületével az $\mathbf{r}(u, v)$ pontban, továbbá $H(u, v)$ éppen a felület $\mathbf{r}(u, v)$ -beli középgörbülete.

Lineáris algebrából ismeretes, hogy az $\mathcal{A}_{\mathbf{r}(\mathbf{u})}$ leképezés κ_1 , κ_2 sajátértékeinek $\kappa_1 \kappa_2$ szorzata megegyezik az őt leíró $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ mátrix determinánsával. (6.13) szerint a Gauss-görbületet megadó $K : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre fennáll a

$$K = \frac{\det \mathbf{B}}{\det \mathbf{G}} = \frac{b_{11} b_{22} - (b_{12})^2}{g_{11} g_{22} - (g_{12})^2} \quad (6.15)$$

egyenlőség.

A középgörbület esetében azt használjuk ki, hogy az $\mathcal{A}_{\mathbf{r}(\mathbf{u})}$ Weingarten-leképezés sajátértékeinek $\kappa_1 + \kappa_2$ összege megegyezik az $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ mátrix főátlójában szereplő elemek összegével, azaz teljesül $\kappa_1 + \kappa_2 = A_{11}(\mathbf{u}) + A_{22}(\mathbf{u})$. Ily módon a (6.14) egyenletből következik, hogy a H függvényre igaz

$$H = \frac{g_{11} b_{22} - 2 g_{12} b_{12} + g_{22} b_{11}}{2 (g_{11} g_{22} - (g_{12})^2)}. \quad (6.16)$$

Eszerint a középgörbületet is lehet kifejezni a főmennyiségekből.

Megjegyzés Vegyük az $M = \mathbf{r}(D)$ elemi felület egy $\mathbf{p} = \mathbf{r}(a_1, a_2)$ pontját. A felület \mathbf{p} -beli κ_1 , κ_2 főgörbületeit úgy is meg lehet határozni, hogy előbb a (6.15) és (6.16) összefüggéseket alkalmazva kiszámítjuk a $K_{\mathbf{p}}$, $H_{\mathbf{p}}$ értékeket, majd ezt követően a $\kappa_1 \cdot \kappa_2 = K_{\mathbf{p}}$ és $\kappa_1 + \kappa_2 = 2H_{\mathbf{p}}$ egyenletek megoldásával megkapjuk a két főgörbületet.

A főirányokat az alábbi állítás alkalmazásával lehet meghatározni.

6.17. Állítás A $\mathbf{p} = \mathbf{r}(a_1, a_2)$ pontbeli $\mathbf{w} = w_1 \cdot \partial_1 \mathbf{r}(a_1, a_2) + w_2 \cdot \partial_2 \mathbf{r}(a_1, a_2)$ érintővektor az $\mathcal{A}_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{\mathbf{p}}M$ Weingarten-leképezésnek sajátvektora akkor és csak akkor, ha a w_1 , w_2 együtthatókra fennáll

$$\begin{vmatrix} (w_2)^2 & -w_1 w_2 & (w_1)^2 \\ g_{11}(a_1, a_2) & g_{12}(a_1, a_2) & g_{22}(a_1, a_2) \\ b_{11}(a_1, a_2) & b_{12}(a_1, a_2) & b_{22}(a_1, a_2) \end{vmatrix} = 0. \quad (6.17)$$

Bizonyítás. Az egyszerűsítés érdekében vezessük itt be a $\hat{g}_{ij} = g_{ij}(a_1, a_2)$, $\hat{b}_{ij} = b_{ij}(a_1, a_2)$ és $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(a_1, a_2)$, $\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{G}(a_1, a_2)$ jelöléseket. Mivel a \mathbf{p} pontbeli Weingarten-leképezést az $\hat{\mathbf{A}}$ mátrix írja le, a \mathbf{w} érintővektor pontosan akkor lesz sajátvektor, ha a $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ és a $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ oszlopmátrixok lineárisan összefüggőek. Ez pedig akkor teljesül, ha a két oszlopból képzett 2×2 -es mátrix determinánusa eltűnik, vagyis ha fennáll $w_1 v_2 - w_2 v_1 = 0$.

A (6.14) összefüggés alapján a v_1 , v_2 értékekre vonatkozóan a

$$\begin{aligned} \det \hat{\mathbf{G}} \cdot v_1 &= w_1(\hat{g}_{22} \hat{b}_{11} - \hat{g}_{12} \hat{b}_{12}) + w_2(\hat{g}_{22} \hat{b}_{12} - \hat{g}_{12} \hat{b}_{22}), \\ \det \hat{\mathbf{G}} \cdot v_2 &= w_1(\hat{g}_{11} \hat{b}_{12} - \hat{g}_{12} \hat{b}_{11}) + w_2(\hat{g}_{11} \hat{b}_{22} - \hat{g}_{12} \hat{b}_{12}) \end{aligned}$$

egyenlőségeket kapjuk. Ezekből pedig következik, hogy teljesül

$$\begin{aligned} \det \hat{\mathbf{G}} \cdot (w_1 v_2 - w_2 v_1) &= w_1^2(\hat{g}_{11} \hat{b}_{12} - \hat{g}_{12} \hat{b}_{11}) + w_1 w_2(\hat{g}_{11} \hat{b}_{22} - \hat{g}_{22} \hat{b}_{11}) \\ &\quad + w_2^2(\hat{g}_{12} \hat{b}_{22} - \hat{g}_{22} \hat{b}_{12}). \end{aligned}$$

Amennyiben a (6.17) egyenletben szereplő determinánst az első sora alapján kifejtjük, akkor éppen a fenti összefüggés jobb oldalán található kifejezést nyerjük. Ezek szerint (6.17) fennállása szükséges és elégséges feltétele annak, hogy \mathbf{w} sajátvektora legyen a Weingarten-leképezésnek. Ezzel az állítás igazolását elvégeztük. \square

A Gauss-görbület előjelének geometriai jelentése

A szorzatgörbület előjele alapján a felületi pontokat három osztályba lehet sorolni. A következő definíció valójában csak elnevezéseket tartalmaz.

6.18. Definíció *Tekintsük az M elemi felület egy \mathbf{p} pontját és a pontbeli $K_{\mathbf{p}}$ Gauss-görbületet. A \mathbf{p} felületi pontot $K_{\mathbf{p}} > 0$ esetén elliptikus pontnak, $K_{\mathbf{p}} < 0$ esetén hiperbolikus pontnak, $K_{\mathbf{p}} = 0$ esetén pedig parabolikus pontnak mondjuk.*

Megjegyzés Mint ismeretes, tetszőleges $\mathbf{a} \in D$ esetén az első főmennyiségekből képzett $\mathbf{G}(\mathbf{a})$ mátrixra fennáll $\det \mathbf{G}(\mathbf{a}) > 0$. A (6.15) összefüggés következtében a $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{a})$ felületi pont típusa csakis a $\det \mathbf{B}(\mathbf{a})$ determináns előjelétől függ.

Az alábbi kijelentés arra mutat rá, hogy a felület pontbeli alakját nézve már következtetni lehet a felületi pont típusára.

6.19. Állítás *Legyen adva az $M = \mathbf{r}(D)$ elemi felület egy $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{a})$ pontja. Vegyük azt a két nyílt félteret, melyeket a felület \mathbf{p} -beli érintősíkja határol.*

- (1) *Amennyiben $K_{\mathbf{p}} > 0$, akkor \mathbf{a} -nak van olyan U nyílt környezete D -ben, hogy az $\mathbf{r}(U \setminus \{\mathbf{a}\})$ felületdarab benne van az egyik nyílt féltérben.*
- (2) *Ha igaz $K_{\mathbf{p}} < 0$, akkor az \mathbf{a} -nak bármely U nyílt környezetét is vesszük D -ben, mindkét nyílt féltérben vannak pontjai az $\mathbf{r}(U)$ felületdarabnak.*

Bizonyítás. A két kijelentést külön-külön igazoljuk.

(1) Tegyük fel, hogy a \mathbf{p} felületi pont elliptikus. A (6.15) kifejezés következtében fennáll

$$b_{11}(\mathbf{a}) \cdot b_{22}(\mathbf{a}) - (b_{12}(\mathbf{a}))^2 > 0,$$

és emiatt a $b_{11}(\mathbf{a})$ és $b_{22}(\mathbf{a})$ második főmennyiségek előjele megegyezik. Vezessük most be az $\varepsilon = \frac{b_{11}(\mathbf{a})}{|b_{11}(\mathbf{a})|}$ jelölést. Lineáris algebrai ismeretek alapján könnyű belátni, hogy ekkor teljesül az

$$\varepsilon \cdot \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij}(\mathbf{a}) \cdot v_i \cdot v_j > 0$$

egyenlőtlenség minden olyan $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ valós számpárra, ahol $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$.

Jelölje \mathcal{P} az M felület \mathbf{p} -beli érintősíkját, amely két féltérre osztja az \mathbb{R}^3 teret. Tekintsük azt a $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyet a

$$h(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{r}(\mathbf{a}), \varepsilon \mathbf{N}(\mathbf{a}) \rangle$$

összefüggés ír le. Világos, hogy ez a h függvény a felület pontjainak az előjeles távolságát méri a \mathcal{P} érintősíktól. A h függvény az \mathbf{a} helyen eltűnik, és könnyű belátni, hogy az első- és másodrendű parciális deriváltakra fennállnak a

$$\partial_i h(\mathbf{a}) = 0, \quad \partial_{i,j} h(\mathbf{a}) = \varepsilon \cdot b_{ij}(\mathbf{a})$$

($i, j = 1, 2$) összefüggések. A $\partial_{i,j} h$ függvények folytonossága miatt az \mathbf{a} pontnak létezik olyan U nyílt gömbkörnyezete D -ben, hogy bármely $\mathbf{u} \in U$ és $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ számpár esetén igaz a

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \partial_{i,j} h(\mathbf{u}) \cdot v_i \cdot v_j > 0$$

összefüggés feltéve, hogy $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$. Taylor tételét alkalmazva ebből már következik, hogy amennyiben $\mathbf{u} \in U \setminus \{\mathbf{a}\}$, akkor teljesül $h(\mathbf{u}) > 0$. Ez pedig azt igazolja, hogy az $\mathbf{r}(U \setminus \{\mathbf{a}\})$ felületdarab abba a \mathcal{P} által határolt nyílt féltérbe esik, amelyikbe az $\varepsilon \mathbf{N}(\mathbf{a})$ vektor mutat.

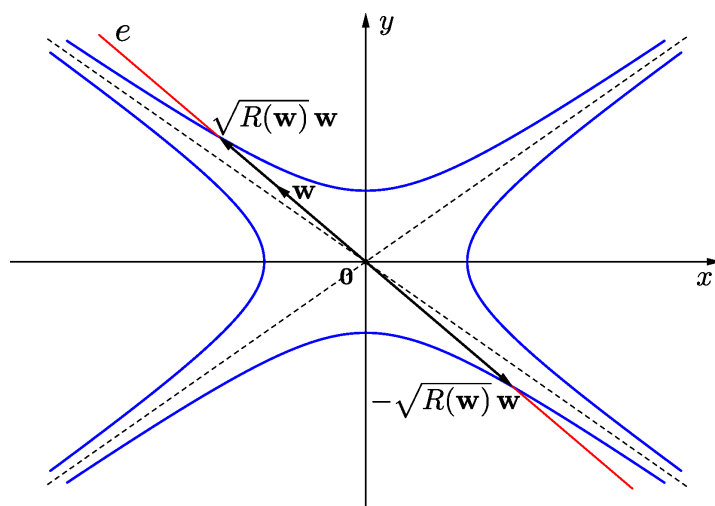
(2) Legyen a \mathbf{p} felületi pont hiperbolikus. Vegyük a \mathbf{p} -beli κ_1 és κ_2 főgörbületeket, továbbá a főirányokat megadó $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ortonormált vektorokat $T_{\mathbf{p}}M$ -ben. A $\kappa_1 \cdot \kappa_2 < 0$ egyenlőtlenség miatt ez esetben κ_1 és κ_2 előjele ellentétes.

Tekintsünk egy a \mathbf{v}_i ($i = 1, 2$) érintőiránynak megfelelő \mathcal{G}_i normálmetszet ívet. Emlékezzünk rá, hogy fennáll $\kappa_i = k_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}_i)$. A 3.5. Állítás következtében \mathcal{G}_i -nek van olyan a \mathbf{p} pontot tartalmazó szegmense, hogy annak pontjai \mathbf{p} kivételével abban a nyílt féltérben vannak, amelyikbe a \mathcal{P} érintősíkra merőleges $\kappa_i \mathbf{N}(\mathbf{a})$ vektor mutat. A $\kappa_1 \mathbf{N}(\mathbf{a})$ és $\kappa_2 \mathbf{N}(\mathbf{a})$ vektorok iránya ellentétes, tehát ezek a feltérek különbözőek. Innen már adódik, hogy igaz a fenti állításban szereplő (2) kijelentés is. \square

A Dupin-féle indikátrix

Az alábbiakban megadjuk a felületi pontok osztályozásánál alkalmazott elnevezések egyik motivációját. Rögzítsük az $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezéssel paraméterezett M elemi felület egy \mathbf{p} pontját. Tegyük fel, hogy \mathbf{p} -ben a Weingarten-leképezés nem tűnik el, vagyis $\mathcal{A}_{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$. A 2-dimenziós $T_{\mathbf{p}}M$ lineáris érintőteret tekintsük most egyúttal egy euklideszi síknak is.

Amennyiben valamely $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ ($\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$) vektorra igaz $k_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) \neq 0$, akkor alkalmazzuk az $R(\mathbf{w}) = \frac{1}{|k_{\mathbf{p}}(\mathbf{w})|}$ jelölést. Vegyük észre, hogy az $R(\mathbf{w})$ megegyezik a \mathbf{w} irányhoz tartozó normálmetszet ív \mathbf{p} -beli simulókörének a sugarával. A $\mathbf{0}$ -n áthaladó \mathbf{w} irányú e egyenesen jelöljük ki azt a két pontot, amelyek $\mathbf{0}$ -tól $\sqrt{R(\mathbf{w})}$ távolságra vannak. (Lásd a 6.2. ábrát.) Az összes $\mathbf{0}$ -n áthaladó egyenesen végezzük el ezt a kijelölést. Amennyiben valamely \mathbf{w} vektorra fennáll $k_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = 0$, akkor a \mathbf{w} irányú egyenesen nem adunk meg pontot. Az így nyert centrálszimmetrikus alakzatot az M felület \mathbf{p} pontbeli Dupin-indikátrixának nevezzük.



6.2. ábra. Egy hiperbolikus felületi pont Dupin-indikátrixa.

A $T_{\mathbf{p}}M$ síkon vegyük azt a Descartes-féle koordináta-rendszert, ahol a kezdőpont $\mathbf{0}$, az élvektorok pedig olyan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ortogonális egységvektorok, amelyek sajátvektorai az $\mathcal{A}_{\mathbf{p}}$ Weingarten-leképezésnek. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ főirányoknak megfelelő főgörbületek a \mathbf{p} pontban legyenek κ_1 és κ_2 .

Legyen \mathbf{w} egy olyan egységvektor $T_{\mathbf{p}}M$ -ben, amelyre fennáll $\mathbf{w} = \cos \vartheta \mathbf{v}_1 + \sin \vartheta \mathbf{v}_2$ valamely ϑ szöggel. A $\mathbf{0}$ -n áthaladó \mathbf{w} irányú e egyenesen a két kijelölt pont egyike legyen q . A fentiek alapján q -nak a $T_{\mathbf{p}}M$ síkbeli koordinátáira igaz

$$x_q = \pm \sqrt{R(\mathbf{w})} \cos \vartheta \quad \text{és} \quad y_q = \pm \sqrt{R(\mathbf{w})} \sin \vartheta.$$

Ily módon alkalmazva a (6.12) összefüggést azt kapjuk, hogy teljesül

$$\kappa_1 x_q^2 + \kappa_2 y_q^2 = R(\mathbf{w})(\kappa_1 \cos^2 \vartheta + \kappa_2 \sin^2 \vartheta) = R(\mathbf{w}) \cdot k_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = \pm 1.$$

A fenti összefüggés alapján már látható, hogy a $T_{\mathbf{p}}M$ síkbeli Dupin-féle induktrixot a

$$\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2 = \pm 1$$

másodrendű egyenlet írja le. Ennek következtében ha a \mathbf{p} felületi pont elliptikus, akkor a Dupin-induktrix egy ellipszis. Amennyiben a \mathbf{p} felületi pont hiperbolikus, akkor a Dupin-induktrix két olyan hiperbola uniója, amelyek aszimptotái közösek. Ha pedig a \mathbf{p} felületi pont parabolikus, akkor a Dupin-induktrix két párhuzamos egyenes uniója.

6.3. Speciális felületek és felületi görbék

Umbilikus pontok, umbilikus felületek

6.20. Definíció *Az M elemi felület egy \mathbf{p} pontját umbilikus pontnak nevezzük, ha valamely κ számmal a \mathbf{p} -beli Weingarten-leképezésre fennáll $\mathcal{A}_{\mathbf{p}} = \kappa \cdot id$, ahol id a $T_{\mathbf{p}}M$ érintőtér identikus leképezését jelöli.*

A \mathbf{p} umbilikus pontot a $\kappa \neq 0$ esetben szférikus pontnak, $\kappa = 0$ esetén pedig planáris pontnak mondjuk.

A továbbiakban ha veszünk egy M elemi felületet, akkor mindig feltesszük, hogy adva van M -nek egy $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezése.

Egy felületet akkor mondunk umbilikusnak, ha az összes pontja umbilikus. Az alábbi állítás szerint az ilyen felületek könnyen osztályozhatóak.

6.21. Állítás *Ha az $M \subset \mathbb{R}^3$ elemi felület umbilikus, akkor az M vagy egy gömbfelületnek, vagy pedig egy síknak a felületdarabja.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az M felület minden pontja umbilikus. A Weingarten-leképezés definíciójából adódóan ekkor van olyan $\kappa : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy fennáll

$$\partial_i \mathbf{N}(u, v) = -\kappa(u, v) \partial_i \mathbf{r}(u, v) \quad (6.18)$$

($i = 1, 2$) bármely $(u, v) \in D$ esetén. Az \mathbf{N} másodrendű vegyes parciális deriváltjára eszerint igazak az

$$\begin{aligned} \partial_{1,2} \mathbf{N}(u, v) &= -\partial_2 \kappa(u, v) \partial_1 \mathbf{r}(u, v) - \kappa(u, v) \partial_{1,2} \mathbf{r}(u, v), \\ \partial_{2,1} \mathbf{N}(u, v) &= -\partial_1 \kappa(u, v) \partial_2 \mathbf{r}(u, v) - \kappa(u, v) \partial_{2,1} \mathbf{r}(u, v) \end{aligned}$$

összefüggések. Vegyük most a fenti két egyenlet különbségét és használjuk ki a vegyes parciális deriváltakra vonatkozó Young-tételt. Ezzel az eljárással a

$$\partial_1 \kappa(u, v) \partial_2 \mathbf{r}(u, v) - \partial_2 \kappa(u, v) \partial_1 \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{0}$$

összefüggést kapjuk. A $\partial_1 \mathbf{r}(u, v)$, $\partial_2 \mathbf{r}(u, v)$ vektorok lineárisan függetlenek, emiatt fennáll $\partial_i \kappa(u, v) = 0$ ($i = 1, 2$). Mivel a D paramétertartomány összefüggő, ennek következtében a κ függvény konstans az 1.26. Állítás szerint.

Tekintsük előbb azt az esetet, amikor $\kappa \neq 0$. Vegyük azt a $\mathbf{q} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést, melyet a $\mathbf{q}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{N}(u, v)$ egyenlet ír le tetszőleges $(u, v) \in D$ helyen. Ekkor (6.18) következtében azt nyerjük, hogy igaz $\partial_i \mathbf{q}(u, v) = \mathbf{0}$ ($i = 1, 2$). Ily módon az 1.26. Állításból adódik, hogy a \mathbf{q} függvény konstans. Jelöljük ez esetben a konstans függvényértéket is \mathbf{q} -val. Az $\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{q} = -\frac{1}{\kappa} \mathbf{N}(u, v)$ egyenlőségből adódik, hogy $\|\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{q}\| = \frac{1}{|\kappa|}$. Eszerint az $M = \mathbf{r}(D)$ felület rajta van a \mathbf{q} centrumú és $a = \frac{1}{|\kappa|}$ sugarú gömbfelületen.

Végül tegyük fel, hogy $\kappa = 0$ teljesül. Ekkor (6.18) alapján igaz $\partial_i \mathbf{N}(u, v) = \mathbf{0}$ bármely $(u, v) \in D$ helyen. Ennek következtében az \mathbf{N} leképezés konstans, azaz van olyan \mathbf{n} egységvektor, hogy $\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{n}$. Vegyünk egy rögzített (u_0, v_0) helyet D -ben, majd ezt követően azon \mathcal{S} síkot, amely áthalad az $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ ponton és merőleges \mathbf{n} -re. Tekintsük azt a $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyet a $h(u, v) = \langle \mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u_0, v_0), \mathbf{n} \rangle$ összefüggés ír le. Világos, hogy a $|h(u, v)|$ érték adja az $\mathbf{r}(u, v)$ felületi pontnak az \mathcal{S} síktól mért távolságát. A $\partial_1 \mathbf{r}(u, v)$, $\partial_2 \mathbf{r}(u, v)$ vektorok merőlegesek az $\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{n}$ vektorra, és emiatt teljesül $\partial h_i(u, v) = \langle \partial_i \mathbf{r}(u, v), \mathbf{n} \rangle = 0$. Mivel $h(u_0, v_0) = 0$, a h függvény eltűnik, tehát az M elemi felület rajta van az \mathcal{S} síkon. \square

Egy felület normális variációi. Minimálfelületek

Legyen adott az M elemi felület az $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezéssel. Vegyünk egy C^∞ -osztályú $d : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt. Egy kis $\varepsilon > 0$ szám mellett tekintsük azt a $\mathbf{q} : D \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést, melyet a

$$\mathbf{q}(u, v, t) = \mathbf{r}(u, v) + t d(u, v) \mathbf{N}(u, v) \tag{6.19}$$

egyenlőség ad meg tetszőleges $(u, v) \in D$ és $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ esetén. Ez alapján a $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ értékekre értelmezzük az $\mathbf{r}_t : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezéseket is, melyeket az $\mathbf{r}_t(u, v) = \mathbf{q}(u, v, t)$ egyenlet ír le.

6.22. Definíció A (6.19) összefüggéssel értelmezett \mathbf{q} vektorfüggvényt az $M = \mathbf{r}(D)$ felület egy normális variációjának mondjuk.

Amennyiben a \mathbf{q} leképezésnek vesszük az első két változó szerinti parciális deriváltjait, akkor a

$$\partial_i \mathbf{q}(u, v, t) = \partial_i \mathbf{r}(u, v) + t (\partial_i d(u, v) \mathbf{N}(u, v) + d(u, v) \partial_i \mathbf{N}(u, v))$$

($i = 1, 2$) összefüggéseket nyerjük. Vezessük most be $G_{ij} = \langle \partial_i \mathbf{q}, \partial_j \mathbf{q} \rangle$ egyenlőségekkel a $G_{ij} : D \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j = 1, 2$) háromváltozós valós függvényeket. Ezek függvényértékeiből tetszőleges $(u, v, t) \in D \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ helyen egy 2×2 -es mátrixot nyerünk, melyet $\mathbf{Q}(u, v, t)$ fog jelölni.

A G_{ij} függvények leírásánál használjuk ki, hogy a (6.9) egyenlet következtében igaz $\langle \partial_i \mathbf{N}, \partial_j \mathbf{r} \rangle = -b_{ij}$. Ezt és a 6.7. Állítást alkalmazva azt kapjuk, hogy teljesül

$$G_{ij}(u, v, t) = g_{ij}(u, v) - 2t d(u, v) b_{ij}(u, v) + t^2 (\partial_i d(u, v) \cdot \partial_j d(u, v) + d(u, v)^2 \cdot \langle \partial_i \mathbf{N}(u, v), \partial_j \mathbf{N}(u, v) \rangle).$$

Vegyünk most a $\mathbf{Q}(u, v, t)$ mátrix determinánsát, és a kapott kifejezésben jelölje $R(u, v, t)$ azon tagok összegét, amelyekben a t változó legalább másodfokú hatványa szerepel tényezőként. Közvetlen számolással igazolható, hogy ekkor fennáll

$$\det \mathbf{Q}(u, v, t) = \det \mathbf{G}(u, v) (1 - 4t d(u, v) H(u, v)) + R(u, v, t), \quad (6.20)$$

ahol H az \mathbf{r} paraméteres előállításnak megfelelő középgörbületi függvény, melyet a (6.16) kifejezéssel nyerünk a főmennyiségekből.

Vegyünk most D -ben egy Jordan-mérhető zárt B tartományt. A fenti (6.20) egyenlet szerint az ε alkalmas megválasztásával elérhető, hogy teljesüljön $\det \mathbf{Q}(u, v, t) > 0$ bármely $(u, v) \in B$ és $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ esetén. Ekkor az $\mathbf{r}_t(B)$ kompakt felületdarab felszínét az

$$F(\mathbf{r}_t(B)) = \int \int_D \sqrt{\det \mathbf{Q}(u, v, t)} du dv$$

összefüggés adja meg. Ennek alapján értelmezni tudjuk az $f_d : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényt az $f_d(t) = F(\mathbf{r}_t(B))$ egyenlettel. A d index itt arra utal, hogy az $\mathbf{r}_t(B)$ felületdarabok felszínei függenek a (6.19) normális variációban szereplő d függvénytől is. Az f_d függvény 0 helyen vett deriváltjával kapcsolatosan igaz az alábbi tétel.

6.23. Tétel *Tetszőleges d függvény mellett fennáll $f'_d(0) = 0$ akkor és csak akkor, ha az M felület H középgörbületi függvénye eltűnik a B tartományon.*

Bizonyítás. Vegyük az \mathbb{R}^3 -beli $D \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ tartományon az $m(u, v, t) = \frac{R(u, v, t)}{\det \mathbf{G}(u, v)}$ kifejezéssel meghatározott m függvényt. Könnyű belátni, hogy erre bármely $(u, v) \in D$ mellett teljesül $m(u, v, 0) = 0$ és $\partial_3 m(u, v, t) = 0$.

A (6.20) kifejezést alkalmazva a az $f_d(t)$ függvényérték felírható az

$$f_d(t) = \int \int_B \sqrt{\det \mathbf{G}(u, v)} (1 - 4t d(u, v) H(u, v) + m(u, v, t))^{1/2} du dv$$

alakban. Innen az 1.33. Tételben szereplő (1.9) összefüggés alapján azt kapjuk, hogy fennáll

$$f'_d(0) = -2 \cdot \int \int_B d(u, v) H(u, v) \sqrt{\det \mathbf{G}(u, v)} du dv. \quad (6.21)$$

Az (6.21) összefüggésből már következik, hogy tetszőleges d függvény mellett akkor igaz $f'_d(0) = 0$, ha teljesül $H(u, v) = 0$ bármely $(u, v) \in D$ helyen. \square

Megjegyzés Legyen a \mathcal{G} alakzat egy egyszerű zárt görbének a pályája. A továbbiakban a \mathcal{G} -t is egyszerű zárt görbének mondjuk. Tekintsük azokat a peremes sima felületeket, amelyeket a \mathcal{G} görbe határol. Amennyiben ezek között vesszük a minimális felszínnel bíró felületet és abból elhagyjuk annak peremét, akkor a fenti tétel következtében a kapott elemi felületnek a középgörbülete eltűnik.

Az előbbi megjegyzés indokolja az alábbi fogalom bevezetését.

6.24. Definíció Az M sima felületet *minimálfelületnek* nevezzük, ha a H középgörbülete az M összes pontjában eltűnik.

A felület görbületi vonalai

A továbbiakban is feltesszük, hogy adva van egy M elemi felület az $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezéssel.

6.25. Definíció Az M -nek egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris felületi görbét az M görbületi vonalának mondjuk, ha tetszőleges $t \in I$ esetén $\gamma'(t)$ sajátvektora az $\mathcal{A}_{\gamma(t)}$ Weingarten-leképezésnek.

Világos, hogy amennyiben az M egy gömbnek a felületdarabja, akkor az összes felületi görbe görbületi vonal.

Az alábbi állítás egy elégséges feltételt ad arra nézve, hogy az \mathbf{r} paraméterezéshez tartozó paramétervonalak görbületi vonalak legyenek.

6.26. Állítás Az \mathbf{r} legyen egy olyan paraméterezése az M elemi felületnek, amelynél a g_{12} és b_{12} főmennyiségek eltűnnek. Ekkor a paramétervonalak az M -nek görbületi vonalai.

Bizonyítás. Mivel fennáll $g_{12} = 0$ és $b_{12} = 0$, a (6.13) összefüggésből adódik, hogy tetszőleges $\mathbf{u} \in D$ esetén a Weingarten-leképezést az $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ pontban leíró $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ mátrix diagonális. Ennek következtében $\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{u})$ és $\partial_2 \mathbf{r}(\mathbf{u})$ sajátvektorai az $\mathcal{A}_{\mathbf{r}(\mathbf{u})}$ leképezésnek, ami már igazolja az állítást. \square

Vegyük észre, hogy egy $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ felületi pont pontosan akkor umbilikus, ha a szorzatgörbületre és a középgörbületre fennáll a $K(\mathbf{u}) = H(\mathbf{u})^2$ egyenlőség.

Tegyük fel, hogy a $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{a})$ ($\mathbf{a} \in D$) pont nem umbilikus. A fenti észrevétel és a K , H függvények folytonossága következtében az \mathbf{a} -nak van olyan U nyílt környezete D -ben, hogy bármely $\mathbf{u} \in U$ esetén az $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ pont ugyancsak nem umbilikus. Világos, hogy ekkor az $\mathbf{r}(U)$ felületdarab bármely pontjában pontosan két főirány van.

Legyenek $\kappa_1, \kappa_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ a felületdarab pontjaiban a főgörbületeket megadó függvények. Tekintsünk egy $\sigma : I \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ reguláris görbét, amelynek koordináta-függvényei σ_1 és σ_2 . Belátható, hogy a $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$ felületi görbe a κ_i ($i = 1, 2$) főgörbület-függvényhez tartozó görbületi vonal akkor és csak akkor, ha a Weingarten-leképezések mátrixát leíró A_{jl} ($j, l = 1, 2$) függvényekkel fennállnak az

$$\begin{aligned} (A_{11}(\sigma(t)) - \kappa_i(\sigma(t))) \cdot \sigma'_1(t) + A_{12}(\sigma(t)) \cdot \sigma'_2(t) &= 0, \\ A_{21}(\sigma(t)) \cdot \sigma'_1(t) + (A_{22}(\sigma(t)) - \kappa_i(\sigma(t))) \cdot \sigma'_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

egyenletek. Ily módon a differenciál-egyenletek elméletét alkalmazva igazolható, hogy az $\mathbf{r}(U)$ felületdarab minden pontján áthalad két olyan görbületi vonal, melyek derékszögben metszik egymást.

Az alábbi tételt, amely a felületdarabnak a görbületi vonalakkhoz illesztett paraméterezéséről szól, most igazolás nélkül közöljük. A bizonyítás fellelhető a [doCa] könyv 3.4. alfejezetében.

6.27. Tétel *Ha az $M = \mathbf{r}(D)$ elemi felület $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{a})$ pontja nem umbilikus, akkor \mathbf{a} -nak van olyan U összefüggő nyílt környezete D -ben és az $\mathbf{r}|U$ leképezésnek van olyan $\tilde{\mathbf{r}}$ átparaméterezése, hogy az $\tilde{\mathbf{r}}$ vektorfüggvény paramétervonalai az $\mathbf{r}(U)$ felületdarabnak görbületi vonalai.*

Aszimptotavonalak nem pozitív Gauss-görbületű felületen

Tegyük fel, hogy az $M = \mathbf{r}(D)$ elemi felület \mathbf{p} pontja hiperbolikus, azaz fennáll $K_{\mathbf{p}} < 0$. Ekkor a \mathbf{p} -beli Dupin-indikátrix két olyan hiperbola uniója, melyeknek az aszimptotái közösek. A normálgörbület az aszimptotáknak megfelelő irányokban tűnik el. Ez motiválja az alábbi elnevezést.

Legyen \mathbf{p} egy olyan pontja az M elemi felületnek, ahol fennáll $K_{\mathbf{p}} \leq 0$, de \mathbf{p} nem planáris pont. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ ($\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$) érintővektor aszimptotikus irányt ad meg az érintőtérben, ha a normálgörbületre fennáll $k_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = 0$.

A továbbiakban a tekintett M felületről feltesszük, hogy nem tartalmaz planáris pontokat. Világos, hogy a hiperbolikus pont érintőterében két aszimptotikus irány van, a parabolikus (de nem planáris) pont érintőterében pedig egy. Ezek alapján a hiperbolikus vagy parabolikus felületen egy újabb speciális felületi görbét lehet értelmezni.

6.28. Definíció *Legyen a $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbe az M -nek egy felületi görbéje. A γ görbét az M felület aszimptotavonalának nevezzük, ha tetszőleges $t \in I$ helyen $k_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0$ teljesül.*

Világos, hogy a felületre eső egyenesek vagy szakaszok aszimptotavonalaknak a pályái. A (6.5) összefüggés miatt igaz a következő állítás.

6.29. Állítás *A $D \subset \mathbb{R}^2$ paramétertartományban legyen adva egy $\sigma: I \rightarrow D$ reguláris görbe. A $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$ felületi görbe az M -nek aszimptotavonala akkor és csak akkor, ha tetszőleges $t \in I$ helyen fennáll*

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij}(\sigma(t)) \sigma'_i(t) \sigma'_j(t) = 0.$$

A fenti egyenlet alapján már könnyű belátni, hogy igaz az alábbi kijelentés is.

6.30. Következmény *Az \mathbf{r} paraméterezéshez tartozó paramétervonalak az $M = \mathbf{r}(D)$ felületnek aszimptotavonalai akkor és csak akkor, ha a b_{11} és b_{22} második főmennyiségek eltűnnek.*

Az \mathbb{R}^3 -beli valódi görbék simulósíkjaikat a 2.2. alfejezetben értelmeztük. Ezzel a fogalommal kapcsolatos az alábbi állítás.

6.31. Állítás *Legyen $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ olyan reguláris felületi görbe az M felületen, amelynek görbülete sehol sem tűnik el. A γ egy aszimptotavonal akkor és csak akkor, ha tetszőleges $t \in I$ helyen a γ görbe simulósíkja egybeesik a felület $\gamma(t)$ pontbeli érintősíkjával.*

Bizonyítás. Mint ismeretes, γ -nak a $t \in I$ helyen vett simulósíkja áthalad a $\gamma(t)$ ponton és párhuzamos a $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$ vektorokkal.

Mivel γ egy felületi görbe, a $\gamma'(t)$ sebességvektor benne van a $T_{\gamma(t)}M$ érintőtérben. Vegyük a $\gamma''(t)$ másodrendű deriváltvektorra vonatkozó (6.1) egyenlőséget. Amennyiben ennek mindkét oldalát skalárisan megszorozzuk az $\mathbf{N}(\sigma(t))$ normálvektorral, akkor a

$$\langle \gamma''(t), \mathbf{N}(\sigma(t)) \rangle = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \langle \partial_{i,j} \mathbf{r}(\sigma(t)), \mathbf{N}(\sigma(t)) \rangle \cdot \sigma'_i(t) \cdot \sigma'_j(t)$$

összefüggést kapjuk. Ily módon (6.3) következtében bármely $t \in I$ helyen fennáll

$$\langle \gamma''(t), \mathbf{N}(\sigma(t)) \rangle = k_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|^2.$$

A fenti egyenlet szerint a $\gamma''(t)$ vektor pontosan akkor eleme a $T_{\gamma(t)}M$ érintőtérnek, ha a $k_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$ normálgörbület eltűnik. Ebből már adódik, hogy igaz a kimondott állítás. \square

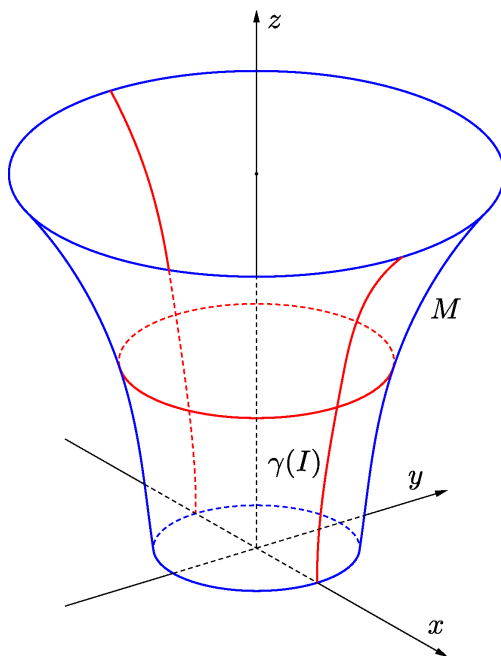
A forgásfelületek

Célszerűnek látszik egzaktnak megadni, hogy mit értünk forgásfelületen.

6.32. Definíció *Egy M sima felületet forgásfelületnek mondunk, ha van egy olyan t egyenes \mathbb{R}^3 -ban, hogy a t körüli tetszőleges szögű elforgatás a felületet önmagába viszi. A t egyenest a forgásfelület tengelyének nevezzük.*

Megjegyzés Tekintsünk egy M forgásfelületet a t tengellyel. Ha vesszük a felület egy pontját, akkor az a t tengely körüli forgatás során egy körvonalat ír le, melynek síkja merőleges a t tengelyre. Az így nyert köröket az M forgásfelület parallel köreinek mondjuk. Amennyiben egy a t tengelyt tartalmazó síkkal metszük el a felületet, akkor a metszetet a forgásfelület egyik meridián görbéjének hívjuk.

Legyenek $\varrho, \zeta : I \rightarrow \mathbb{R}$ olyan valós függvények egy I nyílt intervallumon, ahol bármely $u \in I$ -re igaz $\varrho(u) > 0$, $\zeta'(u) > 0$ és $\varrho'(u)^2 + \zeta'(u)^2 = 1$. Tekintsük \mathbb{R}^3 -ban azt az ívhossz szerint paraméterezett $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ síkgörbét, melyet a $\gamma(u) = \varrho(u) \mathbf{e}_1 + \zeta(u) \mathbf{e}_3$ egyenlet ír le. Vegyük észre, hogy a $\zeta' > 0$ feltétel következtében a $\gamma(I)$ alakzat egy egyszerű görbeívet ad. A görbe pályájának a z tengely körüli megforgatásával nyert forgásfelületet jelölje M . Igazolható, hogy M egy elemi felület. (Lásd a 6.3. ábrát.)



6.3. ábra. Egy z tengelyű forgásfelület a $\gamma(I)$ meridián görbeívvvel.

Vegyük az \mathbb{R}^2 -beli $D = I \times (-\pi, \pi)$ tartományt és azon azt a C^∞ -osztályú $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést, amelyre igaz

$$\mathbf{r}(u, v) = \varrho(u) (\cos v \mathbf{e}_1 + \sin v \mathbf{e}_2) + \zeta(u) \mathbf{e}_3. \quad (6.22)$$

Látható, hogy az $\mathbf{r}(D)$ elemi felület \mathbb{R}^3 -beli lezárása megegyezik az M forgásfelülettel. Az \mathbf{r} vektorfüggvény parciális deriváltjait a

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathbf{r}(u, v) &= \varrho'(u) (\cos v \mathbf{e}_1 + \sin v \mathbf{e}_2) + \zeta'(u) \mathbf{e}_3, \\ \partial_2 \mathbf{r}(u, v) &= \varrho(u) (-\sin v \mathbf{e}_1 + \cos v \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

kifejezések adják meg. Ennek következtében az \mathbf{r} paraméterezéshez tartozó első főmennyiségekre teljesül

$$g_{11}(u, v) = 1, \quad g_{12}(u, v) = 0, \quad g_{22}(u, v) = \varrho(u)^2$$

tetszőleges $(u, v) \in D$ esetén. Az \mathbf{N} normális egységvektormezőt az

$$\mathbf{N}(u, v) = -\zeta'(u) (\cos v \mathbf{e}_1 + \sin v \mathbf{e}_2) + \varrho'(u) \mathbf{e}_3$$

összefüggés írja le. Amennyiben vesszük az \mathbf{r} függvény másodrendű parciális deriváltjait, akkor azokra igaz

$$\begin{aligned} \partial_{1,1}\mathbf{r}(u, v) &= \varrho''(u) (\cos v \mathbf{e}_1 + \sin v \mathbf{e}_2) + \zeta''(u) \mathbf{e}_3, \\ \partial_{1,2}\mathbf{r}(u, v) &= \varrho'(u) (-\sin v \mathbf{e}_1 + \cos v \mathbf{e}_2), \\ \partial_{2,2}\mathbf{r}(u, v) &= -\varrho(u) (\cos v \mathbf{e}_1 + \sin v \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

tetszőleges $(u, v) \in D$ helyen. Ezek alapján a második főmennyiségekre a

$$b_{11}(u, v) = \varrho'(u)\zeta''(u) - \varrho''(u)\zeta'(u), \quad b_{12}(u, v) = 0, \quad b_{22}(u, v) = \varrho(u)\zeta'(u)$$

kifejezéseket kapjuk. Eszerint a második főmennyiségek csak az első változótól függenek.

Megjegyzés Mivel a g_{12} és b_{12} főmennyiségek eltűnnek, a 6.26. Állításból következik, hogy a (6.22) egyenlettel leírt \mathbf{r} leképezés paramétervonalai görbületi vonalai az $\mathbf{r}(D)$ elemi felületnek.

A forgásfelület Gauss-görbületére vonatkozóan igaz az alábbi kijelentés.

6.33. Állítás Az \mathbf{r} paraméterezéssel megadott elemi felület szorzatgörbületi függvényére fennáll a $K(u, v) = -\frac{\varrho''(u)}{\varrho(u)}$ összefüggés.

Bizonyítás. A fentiek alapján a második főmennyiségekből képzett mátrix determinánsára teljesül

$$\det \mathbf{B}(u, v) = \varrho(u) \zeta'(u) (\varrho'(u) \zeta''(u) - \varrho''(u) \zeta'(u)).$$

A $\varrho'(u)^2 + \zeta'(u)^2 = 1$ összefüggésből deriválással a

$$2 (\varrho'(u) \varrho''(u) + \zeta'(u) \zeta''(u)) = 0$$

egyenlőséget nyerjük. Ezek alapján már belátható, hogy fennáll

$$\det \mathbf{B}(u, v) = \varrho(u) (-(\varrho'(u))^2 \varrho''(u) - (\zeta'(u))^2 \varrho''(u)) = -\varrho(u) \varrho''(u).$$

Mivel az első főmennyiségek mátrixára igaz $\det \mathbf{G}(u, v) = \varrho(u)^2$, a Gauss-görbületre vonatkozó (6.15) egyenlet következtében fennáll a $K(u, v) = -\frac{\varrho''(u)}{\varrho(u)}$ összefüggés. \square

6.4. A Gauss-görbület felszín szerinti integrálja

Tekintsünk egy M elemi felületet és annak egy $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméteres előállítását.

6.34. Definíció Legyen B egy olyan Jordan-mérhető zárt tartomány \mathbb{R}^2 -ben, amely részhalma a D paramétertartománynak. A Gauss-görbületnek az $\mathbf{r}(B)$ kompakt felületdarabon vett felszín szerinti integrálján a

$$K(\mathbf{r}(B)) = \int \int_B K(u, v) \cdot \sqrt{\det \mathbf{G}(u, v)} \, du \, dv$$

számot értjük.

Megjegyzés Könnyen ellenőrizhető, hogy a Gauss-görbület egy adott felületdarabon vett felszín szerinti integrálja nem függ a felület paraméterezésének megválasztásától.

Az \mathbf{r} paraméterezéshez tartozó $\mathbf{N} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ normális egységvektormezőre a Weingarten-leképezés definíciójából adódóan teljesül

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathbf{N}(u, v) &= -A_{11}(u, v) \cdot \partial_1 \mathbf{r}(u, v) - A_{21}(u, v) \cdot \partial_2 \mathbf{r}(u, v), \\ \partial_2 \mathbf{N}(u, v) &= -A_{12}(u, v) \cdot \partial_1 \mathbf{r}(u, v) - A_{22}(u, v) \cdot \partial_2 \mathbf{r}(u, v) \end{aligned}$$

tetszőleges $(u, v) \in D$ helyen. Ennek és a $\det \mathbf{A}(u, v) = K(u, v)$ egyenlőségnek a következtében fennáll

$$\partial_1 \mathbf{N}(u, v) \times \partial_2 \mathbf{N}(u, v) = K(u, v) \cdot \partial_1 \mathbf{r}(u, v) \times \partial_2 \mathbf{r}(u, v). \quad (6.23)$$

A fenti összefüggés viszont azt mutatja, hogy amennyiben az M elemi felületnek nincs parabolikus pontja, azaz a K Gauss-görbület sehol sem tűnik el, akkor az $\mathbf{N} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható leképezés reguláris.

Tekintsük az \mathbb{R}^3 -beli egységvektorok által alkotott $S^2 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{u}\| = 1\}$ szférát, amely nyilván tartalmazza az $\mathbf{N} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvény képét, azaz az $\mathbf{N}(D)$ alakzatot.

Egy sima felületet akkor mondunk elliptikusnak (illetve hiperbolikusnak), ha az összes pontja elliptikus (illetve hiperbolikus). Vegyük észre, hogy amennyiben az \mathbf{N} leképezés egy elemi felületet ír le az S^2 gömbfelületen, azaz eleget tesz az 5.1. Definícióban szereplő feltételeknek, akkor (6.23) következtében az M felület vagy elliptikus, vagy pedig hiperbolikus.

Az alábbi állítás szerint a Gauss-görbületnek a kompakt felületdarabon vett felszín szerinti integrálját bizonyos esetekben meg lehet határozni oly módon is, hogy kiszámítjuk egy gömbi felületdarab felszínét.

6.35. Állítás Legyen az M egy olyan elemi felület, amelynél az \mathbf{r} paraméterezésnek megfelelő $\mathbf{N} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ normális egységvektormező is egy elemi felületet ír le. Vegyünk a D paramétertartományban egy B Jordan-mérhető zárt tartományt. Ekkor igazak az alábbi kijelentések.

(1) Amennyiben az M felület elliptikus, akkor fennáll $K(\mathbf{r}(B)) = F(\mathbf{N}(B))$, ahol $F(\mathbf{N}(B))$ az $\mathbf{N}(B)$ gömbi felületdarab felszínét jelöli.

(2) Ha az M felület hiperbolikus, akkor $K(\mathbf{r}(B)) = -F(\mathbf{N}(B))$ teljesül.

Bizonyítás. Vegyük most azt az esetet, amikor az M felület hiperbolikus, azaz a Gauss-görbületet leíró $K : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény negatív. Ekkor a (6.23) és (5.7) egyenletek szerint fennáll

$$\begin{aligned} \|\partial_1 \mathbf{N}(u, v) \times \partial_2 \mathbf{N}(u, v)\| &= -K(u, v) \cdot \|\partial_1 \mathbf{r}(u, v) \times \partial_2 \mathbf{r}(u, v)\| \\ &= -K(u, v) \cdot \sqrt{\det \mathbf{G}(u, v)}. \end{aligned}$$

Alkalmazzuk még a felszín számításával kapcsolatos 5.22. Következményt. A fenti összefüggés alapján teljesül

$$\begin{aligned} K(\mathbf{r}(B)) &= \int \int_B K(u, v) \cdot \sqrt{\det \mathbf{G}(u, v)} \, du \, dv \\ &= - \int \int_B \|\partial_1 \mathbf{N}(u, v) \times \partial_2 \mathbf{N}(u, v)\| \, du \, dv = -F(\mathbf{N}(B)). \end{aligned}$$

Világos, hogy a leírt bizonyítási eljárás az elliptikus felületre is érvényes. □

6.5. Az egyszerű zárt görbe tubusfelülete

Ebben az alfejezetben előbb egy speciális sima felület görbületi jellemzését végezzük el. Ezt követően megmutatjuk, hogy felületelméleti módszerekkel az egyszerű zárt görbék teljes görbületével kapcsolatos állításokat is lehet igazolni.

Legyen adott egy olyan ívhossz szerint paraméterezett $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ egyszerű zárt görbe, amelynek görbülete sehol sem tűnik el. A $\kappa : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ görbületi függvény maximuma legyen κ_0 . Válasszunk egy olyan a pozitív számot, amelyre fennáll $a < \frac{1}{\kappa_0}$.

Tekintsük γ mentén a kísérő Frenet-bázis $\mathbf{B}_1 = \gamma'$, $\mathbf{B}_2 = \frac{1}{\|\gamma''\|} \gamma''$, $\mathbf{B}_3 = \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$ vektormezőit. Vegyük az \mathbb{R}^2 -beli $D = [0, b] \times [0, 2\pi]$ zárt téglalapon azt az $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt, amelyre fennáll

$$\mathbf{r}(u, v) = \gamma(u) + a (\sin v \mathbf{B}_2(u) + \cos v \mathbf{B}_3(u)) \quad (6.24)$$

tetszőleges $(u, v) \in D$ esetén. A Frenet-formulák alapján az \mathbf{r} parciális deriváltjait a

$$\begin{aligned}\partial_1 \mathbf{r}(u, v) &= (1 - a \kappa(u) \sin v) \mathbf{B}_1(u) - a \tau(u) \cos v \mathbf{B}_2(u) + a \tau(u) \sin v \mathbf{B}_3(u), \\ \partial_2 \mathbf{r}(u, v) &= a (\cos v \mathbf{B}_2(u) - \sin v \mathbf{B}_3(u))\end{aligned}$$

összefüggések adják meg. Ezek vektoriális szorzatára a

$$\partial_1 \mathbf{r}(u, v) \times \partial_2 \mathbf{r}(u, v) = a (1 - a \kappa(u) \sin v) \cdot (\sin v \mathbf{B}_2(u) + \cos v \mathbf{B}_3(u)) \quad (6.25)$$

kifejezést nyerjük. Mivel bármely $(u, v) \in D$ mellett igaz $1 - a \kappa(u) \sin v > 0$, ez azt mutatja, hogy az \mathbf{r} differenciálható leképezés reguláris.

Topológiai eszközöket is felhasználva igazolható, hogy amennyiben az a pozitív számot elegendően kicsinek választjuk, akkor az $\mathbf{r}|[0, b] \times [0, 2\pi)$ vektorfüggvény injektív és az $M = \mathbf{r}(D)$ alakzat egy olyan sima felületet ad \mathbb{R}^3 -ban, amely homeomorf a tóruszfelülettel. A továbbiakban végig feltesszük, hogy az a ($a > 0$) szám értéke olyan kicsi, amellyel ezek a tulajdonságok teljesülnek.

6.36. Definíció Vegyük a (6.24) egyenlettel értelmezett $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést. Az $M = \mathbf{r}(D)$ sima felületet a $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ egyszerű zárt görbéhez tartozó a sugarú tubusfelületnek mondjuk.

Ha vesszük az \mathbf{r} "paraméterezéséhez" tartozó első főmennyiségek mátrixát, akkor annak determinánsára az (5.7) és (6.25) összefüggések alapján fennáll

$$\det \mathbf{G}(u, v) = \|\partial_1 \mathbf{r}(u, v) \times \partial_2 \mathbf{r}(u, v)\|^2 = a^2 (1 - a \kappa(u) \sin v)^2 \quad (6.26)$$

tetszőleges $(u, v) \in D$ esetén.

Amennyiben az 5.23. Definíció alapján meghatározzuk a tubusfelület felszínét, akkor (6.26) ismeretében azt kapjuk, hogy igaz

$$\begin{aligned}F(M) &= \int_0^b \int_0^{2\pi} a (1 - a \kappa(u) \sin v) dv du \\ &= \int_0^b a [v + a \kappa(u) \cos v]_0^{2\pi} du = 2\pi a b.\end{aligned}$$

Az M sima felület normális egységvektormezejére a (6.25) egyenlet szerint teljesül

$$\mathbf{N}(u, v) = \sin v \mathbf{B}_2(u) + \cos v \mathbf{B}_3(u).$$

Ebből a kifejezésből a Gauss-görbületet leíró $K : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a második főmennyiségek alkalmazása nélkül is ki tudjuk számítani. Ismét felhasználva a valódi görbékre vonatkozó Frenet-formulákat, közvetlen számolással kapjuk, hogy igaz

$$\partial_1 \mathbf{N}(u, v) \times \partial_2 \mathbf{N}(u, v) = -\kappa(u) \sin v \cdot \mathbf{N}(u, v).$$

Ebból az összefüggésből és a (6.23), (6.25) egyenlőségekből már következik, hogy a tubusfelület K szorzatgörbületi függvényére bármely $(u, v) \in D$ helyen teljesül

$$K(u, v) = \frac{-\kappa(u) \sin v}{a(1 - a\kappa(u) \sin v)}. \quad (6.27)$$

A fenti (6.27) kifejezés szerint a tubusfelület $\mathbf{r}(u, v)$ pontja elliptikus, ha fennáll $\pi < v < 2\pi$. Amennyiben igaz $0 < v < \pi$, akkor az $\mathbf{r}(u, v)$ pont hiperbolikus. Ha pedig $v = 0$ vagy $v = \pi$ teljesül, akkor az $\mathbf{r}(u, v)$ pont parabolikus.

Tekintsük \mathbb{R}^2 -ben a $B = [0, b] \times [\pi, 2\pi]$ zárt téglalapot. Az $M = \mathbf{r}(D)$ tubusfelület külső felének nevezzük az $\mathbf{r}(B)$ kompakt felületdarabot. A tubusfelület külső fele tehát az M azon pontjaiból áll, melyekben a Gauss-görbület nem negatív.

Emlékezzünk rá, hogy a γ ívhossz szerint van paraméterezve. A zárt intervallumon értelmezett görbe teljes görbületének fogalmát a 2.16. Definícióban adtuk meg. Az alábbi állítás a γ görbe $\kappa(\gamma)$ teljes görbületével kapcsolatos és a fentiek során levezetett összefüggések alapján látható be.

6.37. Állítás *A Gauss-görbületnek a tubusfelület külső felén vett felszín szerinti integráljára fennáll $K(\mathbf{r}(B)) = 2\kappa(\gamma)$.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a (6.26) és (6.27) összefüggések következtében igaz

$$K(u, v) \cdot \sqrt{\det \mathbf{G}(u, v)} = -\kappa(u) \sin v.$$

Ennek ismeretében a Gauss-görbületnek az $\mathbf{r}(B)$ felületdarabon vett felszín szerinti integráljára teljesül

$$K(\mathbf{r}(B)) = - \int_0^b \int_{\pi}^{2\pi} \kappa(u) \sin v \, dv \, du = 2 \cdot \int_0^b \kappa(u) \, du = 2\kappa(\gamma). \quad \square$$

Az egyszerű zárt görbék teljes görbületével kapcsolatos eredmények

A továbbiakban is feltesszük, hogy adva van egy olyan ívhossz szerint paraméterezett $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ egyszerű zárt görbe, melynek görbülete sehol sem tűnik el. A γ -hoz rendelt tubusfelület alkalmazásával bizonyítani lehet a γ teljes görbületére vonatkozó egyenlőtlenségeket is. Az a sugarú tubusfelületnek továbbiak során is a (6.24) összefüggéssel leírt paraméterezését fogjuk alkalmazni.

Világos, hogy a γ görbe \mathbf{B}_3 binormális vektormezőjének pályája rajta van az S^2 szférán. Válasszunk most egy olyan \mathbf{w} egységvektort, melyet a \mathbf{B}_3 , $-\mathbf{B}_3$ görbék pályája nem tartalmaz, vagyis amelyre bármely $u \in [0, b]$ esetén igaz $\mathbf{w} \neq \mathbf{B}_3(u)$ és $\mathbf{w} \neq -\mathbf{B}_3(u)$. Tekintsük azt a \mathbf{w} -hez rendelt $h_{\mathbf{w}} : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyet a

$$h_{\mathbf{w}}(u) = \langle \gamma(u) - \gamma(0), \mathbf{w} \rangle \quad (6.28)$$

összefüggés ír le. Vegyük észre, hogy a \mathbf{w} egységvektorra kiszabott feltétel miatt a $h_{\mathbf{w}}$ függvény nem lehet konstans, vagyis $h_{\mathbf{w}} \neq 0$. Emellett kimondható vele kapcsolatban az alábbi segédteétel.

6.38. Lemma *Legyen $u_0 \in [0, b]$ egy olyan hely, amelyre fennáll $h'_{\mathbf{w}}(u_0) = 0$. Ekkor igazak az alábbi kijelentések.*

(1) *Ha vesszük a $\mathbf{p} = \boldsymbol{\gamma}(u_0) + a\mathbf{w}$ pontot, akkor van olyan $v_0 \in [0, 2\pi]$ érték, amelyre teljesül*

$$\mathbf{r}(u_0, v_0) = \mathbf{p} \quad \text{és} \quad \mathbf{N}(u_0, v_0) = \mathbf{w}.$$

(2) *A $h_{\mathbf{w}}$ függvény másodrendű deriváltjára fennáll $h''_{\mathbf{w}}(u_0) \neq 0$.*

Bizonyítás. A (6.28) kifejezésből adódó $0 = h'_{\mathbf{w}}(u_0) = \langle \boldsymbol{\gamma}'(u_0), \mathbf{w} \rangle$ egyenlőség szerint a \mathbf{w} vektor merőleges a $\boldsymbol{\gamma}'(u_0) = \mathbf{T}(u_0)$ tangenciális egységvektorra, és emiatt párhuzamos a $\boldsymbol{\gamma}$ görbe u_0 -beli normálsíkjával. Eszerint \mathbf{w} előáll a $\mathbf{B}_2(u_0) = \mathbf{F}(u_0)$ és $\mathbf{B}_3(u_0) = \mathbf{B}(u_0)$ vektorok lineáris kombinációjaként a

$$\mathbf{w} = \sin v_0 \mathbf{B}_2(u_0) + \cos v_0 \mathbf{B}_3(u_0)$$

alakban valamely $v_0 \in [0, 2\pi]$ érték mellett. Ennek következtében teljesül

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\gamma}(u_0) + a\mathbf{w} = \mathbf{r}(u_0, v_0),$$

tehát \mathbf{p} az $M = \mathbf{r}(D)$ tubusfelületnek egy pontja. Az \mathbf{N} normális egységvektorra korábban kapott $\mathbf{N}(u, v) = \sin v \mathbf{B}_2(u) + \cos v \mathbf{B}_3(u)$ összefüggésből pedig adódik, hogy igaz $\mathbf{N}(u_0, v_0) = \mathbf{w}$.

Rátérünk a (2) kijelentés igazolására. A valódi görbékre vonatkozó első Frenet-formulából és a (6.28) egyenletből következik, hogy fennáll

$$h''_{\mathbf{w}}(u_0) = \langle \boldsymbol{\gamma}''(u_0), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{T}'(u_0), \mathbf{w} \rangle = \kappa(u_0) \cdot \langle \mathbf{F}(u_0), \mathbf{w} \rangle.$$

Mivel \mathbf{w} egy normálvektor a $\boldsymbol{\gamma}(u_0)$ pontban és nem párhuzamos a $\mathbf{B}(u_0)$ binormálissal, $\langle \mathbf{F}(u_0), \mathbf{w} \rangle \neq 0$ teljesül. A fenti összefüggésből emiatt azt nyerjük, hogy $h''_{\mathbf{w}}(u_0) \neq 0$. \square

A 6.38. Lemmából nyilván következik, hogy a $h_{\mathbf{w}}$ függvénynek az u_0 helyen vagy lokális maximuma vagy pedig lokális minimuma van.

Alkalmazni fogjuk majd az alábbi segédteételt is.

6.39. Lemma *Legyen az $u_0 \in (0, b)$ egy olyan hely, ahol a $h_{\mathbf{w}}$ függvénynek lokális maximuma van. Ekkor $\mathbf{p} = \boldsymbol{\gamma}(u_0) + a\mathbf{w}$ a tubusfelületnek egy elliptikus pontja, vagyis a $\mathbf{p} = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ egyenlőségben szereplő v_0 paraméterre igaz $\pi < v_0 < 2\pi$.*

Bizonyítás. Mivel u_0 egy lokális maximumhely, így fennáll $h'_{\mathbf{w}}(u_0) = 0$. A 6.38. Lemma szerint ekkor van olyan $v_0 \in [0, 2\pi]$ érték, hogy igaz $\mathbf{p} = \mathbf{r}(u_0, v_0)$. Ugyancsak az előző segédteletből adódik, hogy a második deriváltra ez esetben fennáll a $h''_{\mathbf{w}}(u_0) < 0$ egyenlőtlenség. Ily módon a Taylor-tétel következtében van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy $(u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon) \subset (0, b)$ és teljesül $h_{\mathbf{w}}(u) < h_{\mathbf{w}}(u_0)$ bármely olyan u -ra, ahol $0 < |u - u_0| < \varepsilon$. Könnyű belátni, hogy ennek következtében fennáll az

$$\langle \mathbf{r}(u, v) - \mathbf{p}, \mathbf{w} \rangle < 0$$

egyenlőtlenség, amennyiben $u \in (u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon)$, $v \in [0, 2\pi]$ és $(u, v) \neq (u_0, v_0)$.

Tekintsük most a tubusfelület P érintősíkját a $\mathbf{p} = \boldsymbol{\gamma}(u_0) + a \mathbf{w}$ pontban. Mivel a felület \mathbf{p} -beli normálvektorára fennáll $\mathbf{N}(u_0, v_0) = \mathbf{w}$, a P érintősíkot az \mathbb{R}^3 tér azon \mathbf{q} pontjai alkotják, amelyek kielégítik a $\langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{w} \rangle = 0$ egyenletet.

A fenti egyenlőtlenség szerint az $\mathbf{r}((u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon) \times [0, 2\pi])$ felületdarab a \mathbf{p} -beli P érintősík egyazon oldalára esik. A 6.19. Állítás következtében a \mathbf{p} pont nem lehet hiperbolikus. Mivel a \mathbf{w} egységvektor nincs rajta a $\mathbf{B}_3, -\mathbf{B}_3$ görbék pályáján, vagyis igaz $v_0 \neq \pi$ és $v_0 \neq 2\pi$, \mathbf{p} parabolikus pont sem lehet. Ily módon \mathbf{p} egy elliptikus pont a tubusfelületen, és ebből már adódik $\pi < v_0 < 2\pi$ teljesülése. \square

Az előző segédtelemek alkalmazásával a $\boldsymbol{\gamma}$ görbe teljes görbületével kapcsolatosan bizonyítani lehet az alábbi állítást.

6.40. Állítás *Legyen $\boldsymbol{\gamma} : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ egy olyan egyszerű zárt görbe, melynek görbülete sehol sem tűnik el. Ekkor a $\boldsymbol{\gamma}$ teljes görbületére fennáll $\kappa(\boldsymbol{\gamma}) \geq 2\pi$.*

Bizonyítás. Vegyünk egy olyan $\mathbf{w} \in S^2$ egységvektort, amelyre igaz $\mathbf{w} \neq \pm \mathbf{B}_3(u)$ bármely $u \in [0, b]$ -ra. Tekintsük a (6.28) egyenlettel leírt $h_{\mathbf{w}}$ függvényt. Legyen u_0 az a hely, ahol $h_{\mathbf{w}}$ felveszi maximumát. Mivel $\boldsymbol{\gamma}$ egy egyszerű zárt görbe, így teljesül $h'_{\mathbf{w}}(u_0) = 0$. A 6.38. és 6.39. Lemmák szerint van olyan $v_0 \in (\pi, 2\pi)$ érték, amelyre igaz $\mathbf{N}(u_0, v_0) = \mathbf{w}$.

Tekintsük most az \mathbf{N} normális egységvektormező leszűkítését a $B = [0, b] \times [\pi, 2\pi]$ zárt téglalagra. Az $\mathbf{N}(B)$ alakzat kompakt, mert az \mathbf{N} leképezés folytonos. Emiatt az $\mathbf{N}(B)$ ponthalmaz tartalmazza az $\mathbf{N}([0, b] \times (\pi, 2\pi))$ alakzatnak a gömbfelületre eső torlódási pontjait. Ebből a tényből és a fenti eredményből már következik az $\mathbf{N}(B) = S^2$ egyenlőség. Az $\mathbf{N} : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvény tehát leírja a teljes S^2 egységgömböt, amelynek felszínére igaz $F(S^2) = 4\pi$. Innen a Gauss-görbület $\mathbf{r}(B)$ felületdarabon vett felszín szerinti integráljára (6.23) alkalmazásával a

$$\begin{aligned} K(\mathbf{r}(B)) &= \int \int_B K(u, v) \sqrt{\det \mathbf{G}(u, v)} \, du \, dv \\ &= \int \int_B \|\partial_1 \mathbf{N}(u, v) \times \partial_2 \mathbf{N}(u, v)\| \, du \, dv \geq 4\pi \end{aligned}$$

összefüggést nyerjük. Ily módon a 6.37. Állításból már adódik, hogy fennáll $\kappa(\boldsymbol{\gamma}) \geq 2\pi$. \square

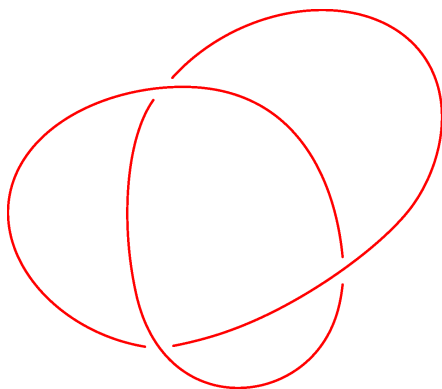
A fentiek során igazolt állításnál egy erősebb tétel is kimondható. Az alábbi eredményt, amelyet bizonyítás nélkül közlünk, Fenchel tételeként szokás említeni.

6.41. Tétel *Tetszőleges \mathbb{R}^3 -beli γ egyszerű zárt görbe teljes görbületére teljesül a $\kappa(\gamma) \geq 2\pi$ egyenlőtlenség.*

Egy γ egyszerű zárt görbére fennáll a $\kappa(\gamma) = 2\pi$ összefüggés akkor és csak akkor, ha a γ egy konvex zárt síkgörbe.

A nem kibontható csomót leíró zárt görbe teljes görbülete

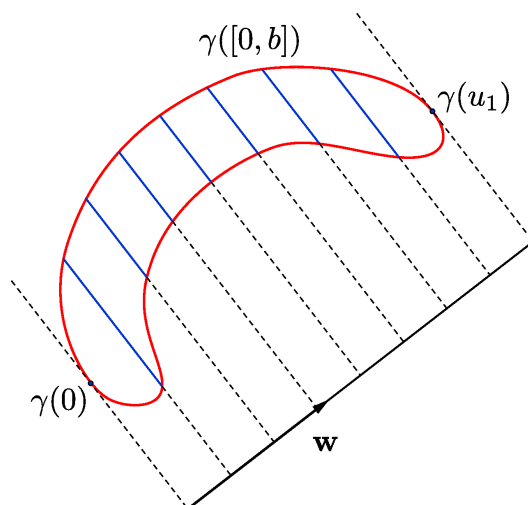
Ha az olvasó korábban még nem folytatott komolyabb topológiai tanulmányokat, a szemlélet alapján akkor is van egy képe arról, hogy egy egyszerű zárt görbe pályája mikor ad kibontható csomót az \mathbb{R}^3 euklideszi térben. Pongyolán fogalmazva a pálya akkor képez egy kibontható csomót, ha előáll egy a zárt körlemezzel homeomorf felület peremeként. A 6.4. ábrán egy nem kibontható csomó látható.



6.4. ábra. Egy nem kibontható térbeli csomó.

6.42. Állítás *Legyen $\gamma : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ olyan egyszerű zárt görbe, amelynek görbülete nem tűnik el és a teljes görbületére fennáll a $\kappa(\gamma) < 4\pi$ egyenlőtlenség. Ekkor a γ által leírt csomó kibontható.*

Bizonyítás. A 6.40. Állítás bizonyításában alkalmazott eljárást alkalmazzuk. Ez alapján a $\kappa(\gamma) < 4\pi$ összefüggés következtében az $\mathbf{N} : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvény nem írja le kétszeresen az S^2 egységgömböt. Korábbi eredményeink szerint ekkor van olyan $\mathbf{w} \in S^2$ egységvektor, hogy a (6.28) egyenlettel leírt a $h_{\mathbf{w}}$ függvénynek egyetlen pontban van lokális maximuma. Jelölje most u_1 ezt a helyet, és evidens, hogy $h_{\mathbf{w}}$ az u_1 pontban veszi fel a maximumát. Vegyük észre, hogy a $h_{\mathbf{w}}$ függvénynek egyetlen helyen van lokális minimuma, tehát csak abban a pontban, ahol a $h_{\mathbf{w}}$ felveszi minimumát.



6.5. ábra. A körlemezrel homeomorf alakzat konstrukciója.

Az általánosság elvének megsértése nélkül feltehetjük, hogy a $h_{\mathbf{w}}$ függvénynek a 0 helyen van minimuma, hiszen ez mindig elérhető az egyszerű zárt görbe átparaméterezésével. Ekkor a $h_{\mathbf{w}}$ függvény szigorúan monoton növekvő a $[0, u_1]$ intervallumon, és szigorúan monoton csökkenő az $[u_1, b]$ intervallumon. (Lásd a 6.5. ábrát.)

Tekintsük most azokat a síkokat \mathbb{R}^3 -ban, amelyek merőlegesek a \mathbf{w} egységvektorra és van közös pontjuk a γ görbe pályájával. Ha ezek közül elhagyjuk a $\gamma(0)$ és $\gamma(u_1)$ pontokon átmenő síkokat, akkor ezek a síkok a térben elválasztják egymástól a két pontot. A fentiek alapján már adódik, hogy egy ilyen sík pontosan egy pontban metszi el a $\mathcal{G}_1 = \gamma([0, u_1])$, $\mathcal{G}_2 = \gamma([u_1, b])$ görbéveket. Tehát ezeknek a \mathbf{w} -re merőleges síkoknak pontosan két metszéspontjuk van a $\gamma([0, 2\pi])$ pályával. A kapott metszéspontokat összekötő szakaszok uniójaként pedig egy olyan alakzatot nyerünk, amely homeomorf a zárt körlappal. A kapott alakzat pereme viszont megegyezik a γ görbe pályájával, és ebből már adódik, hogy a γ által leírt csomó kibontható. \square

Az előbbi állítás miatt igaz az alábbi kijelentés.

6.43. Következmény *Legyen γ olyan egyszerű zárt görbe, amelynek görbülete nem tűnik el és egy nem kibontható csomót ír le. Ekkor teljesül $\kappa(\gamma) \geq 4\pi$.*

A következő bizonyítás nélkül közölt eredményt, amely valamelyest erősebb a fenti következménynél, a Fáry-Milnor-tételként tartják számon a szakirodalomban.

6.44. Tétel *Ha az \mathbb{R}^3 -beli γ egyszerű zárt görbe által adott csomó nem kibontható, akkor a γ teljes görbületére fennáll $\kappa(\gamma) > 4\pi$.*

6.6. Lefejthető vonalfelületek

Ebben az alfejezetben olyan elemi felületeket tárgyalunk, amelyek lokálisan izometrikusan leképezhetőek a síkra.

6.45. Definíció Egy \mathbb{R}^3 -beli M sima felületet vonalfelületnek mondunk, ha az M bármely pontján áthalad egy olyan reguláris felületi görbe, amelynek pályája egy egyenesszakasz.

Vonalfelületet az alábbi eljárással nyerhetünk. Vegyünk egy olyan $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris görbét, ahol az I intervallum nyílt. Legyen $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ egy olyan C^∞ -osztályú leképezés, amelyre bármely $u \in I$ esetén igaz $\|\beta(u)\| = 1$. Valamely $J \subset \mathbb{R}$ intervallumot véve tekintsük azt a C^∞ -osztályú $\mathbf{r} : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt, melyet az

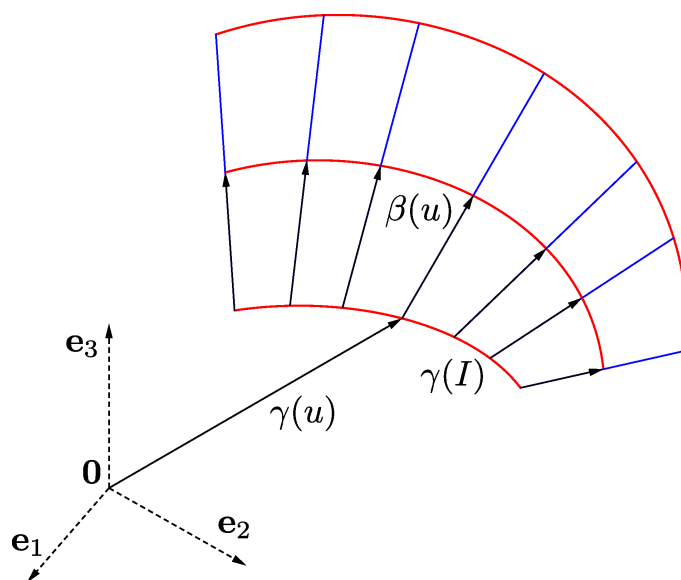
$$\mathbf{r}(u, v) = \gamma(u) + v\beta(u) \quad (6.29)$$

összefüggés ír le tetszőleges $u \in I$ és $v \in J$ mellett. Az első parciális deriváltak

$$\partial_1 \mathbf{r}(u, v) = \gamma'(u) + v\beta'(u), \quad \partial_2 \mathbf{r}(u, v) = \beta(u)$$

kifejezései alapján tehát fennáll

$$\partial_1 \mathbf{r}(u, v) \times \partial_2 \mathbf{r}(u, v) = \gamma'(u) \times \beta(u) + v \cdot \beta'(u) \times \beta(u). \quad (6.30)$$



6.6. ábra. A γ görbével és a β leképezéssel meghatározott vonalfelület.

A továbbiakban feltesszük, hogy az \mathbf{r} leképezés eleget tesz az 5.1. Definícióban szereplő feltételeknek, vagyis egy elemi felületnek a paraméteres előállítására. Tekintsük az $M = \mathbf{r}(I \times J)$ elemi felületet. Világos, hogy ekkor \mathbf{r} második paramétervonalai felületre eső szakaszokat (vagy egyeneseket) adnak. Ezeket nevezzük az M vonalfelület alkotóinak. (Lásd a 6.6. ábrát.)

Vegyük észre, hogy a $\partial_{2,2}\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{0}$ egyenlőség következtében a b_{22} második főmennyiség eltűnik. Ily módon a (6.15) összefüggésből már adódik, hogy a K szorzatgörbület függvényre igaz $K \leq 0$, vagyis a vonalfelületnek nem lehet elliptikus pontja.

6.46. Definíció A (6.29) egyenlettel leírt $M = \mathbf{r}(I \times J)$ vonalfelületet lefejthetőnek mondjuk, ha az alkotói mentén az \mathbf{N} normális egységvektor állandó.

Megjegyzés Célszerűnek látszik itt részletesebben leírni az előbbi definíció tartalmát. Valamely $u \in I$ mellett vegyük az $\mathbf{n}_u : J \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést, amelyre igaz $\mathbf{n}_u(v) = \mathbf{N}(u, v)$. Az M vonalfelületet akkor hívjuk lefejthetőnek, ha bármely $u \in I$ esetén az \mathbf{n}_u leképezés konstans.

6.47. Állítás Az $M = \mathbf{r}(I \times J)$ vonalfelület lefejthető akkor és csak akkor, ha a felület Gauss-görbületét leíró $K : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ függvény eltűnik.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy az M lefejthető. Az előbbi definícióból adódik, hogy ekkor tetszőleges $(u, v) \in I \times J$ helyen teljesül $\partial_2\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{0}$. Ebből az következik, hogy a Weingarten-leképezésekre fennáll $\mathcal{A}_{\mathbf{r}(u,v)}(\partial_2\mathbf{r}(u, v)) = \mathbf{0}$. Mivel az $\mathcal{A}_{\mathbf{r}(u,v)}$ Weingarten-leképezésnek 0 egy sajátértéke, a sajátértékek szorzata is 0, vagyis $K(u, v) = 0$.

Induljunk most ki abból a feltevésből, hogy a K függvény eltűnik az $I \times J$ tartományon. Ekkor a $b_{22} = 0$ összefüggésből és a (6.15) kifejezésből adódik, hogy $b_{12} = 0$ is teljesül. Mint ismeretes, a második főmennyiségek a pontbeli érintőtereken vett második alapformákat határozzák meg. A fentiek következtében tehát fennállnak az

$$\langle \mathcal{A}_{\mathbf{r}(u,v)}(\partial_2\mathbf{r}(u, v)), \partial_i\mathbf{r}(u, v) \rangle = 0$$

($i = 1, 2$) egyenlőségek. Mivel a $\partial_1\mathbf{r}(u, v)$ és $\partial_2\mathbf{r}(u, v)$ vektorok lineárisan függetlenek, ezekből már következik, hogy igaz $\mathcal{A}_{\mathbf{r}(u,v)}(\partial_2\mathbf{r}(u, v)) = \mathbf{0}$. Ily módon fennáll $\partial_2\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{0}$, tehát az \mathbf{N} normális egységvektormező konstans a második paramétervonalak (vagyis az alkotók) mentén. \square

A vonalfelület lefejthetőségére megadható egy másik kritérium is.

6.48. Állítás Az $M = \mathbf{r}(I \times J)$ vonalfelület lefejthető akkor és csak akkor, ha tetszőleges $u \in I$ helyen a $\gamma'(u)$, $\beta(u)$, $\beta'(u)$ vektorok lineárisan összefüggőek.

Bizonyítás. Az előző állítás szerint M pontosan akkor lefejthető, ha a K függvény eltűnik. Mivel mindig fennáll $b_{22} = 0$, az M lefejthetősége egyenértékű azzal, hogy a b_{12} második főmennyiség eltűnik. Ez viszont akkor teljesül, ha bármely $(u, v) \in I \times J$ esetén a $\partial_{1,2}\mathbf{r}(u, v) = \boldsymbol{\beta}'(u)$ vektor merőleges az $\mathbf{N}(u, v)$ egységvektor irányát megadó $\partial_1\mathbf{r}(u, v) \times \partial_2\mathbf{r}(u, v)$ szorzatra. Ily módon a (6.30) összefüggésből már következik, hogy az M vonalfelület akkor és csak akkor lefejthető, ha igaz $\langle \boldsymbol{\gamma}'(u) \times \boldsymbol{\beta}(u), \boldsymbol{\beta}'(u) \rangle = 0$. \square

A hengerfelület lefejtséje a síkra

A hengerfelület fogalmával már találkoztunk az 5.1. Példában. Legyen adott egy olyan $\boldsymbol{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris egyszerű görbe, melynek pályája benne van egy síkban, továbbá egy olyan \mathbf{w} egységvektor, amely nem párhuzamos a síkkal. Tekintsük az $\mathbf{r}(u_1, u_2) = \boldsymbol{\gamma}(u_1) + u_2 \mathbf{w}$ egyenlettel leírt $\mathbf{r} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést. Az \mathbf{r} által leírt vonalfelületet (általános) hengerfelületnek mondjuk.

A parciális deriváltak $\partial_1\mathbf{r}(u_1, u_2) = \boldsymbol{\gamma}'(u_1)$ és $\partial_2\mathbf{r}(u_1, u_2) = \mathbf{w}$ kifejezéseiből adódik, hogy a normális egységvektormezőre fennáll $\mathbf{N}(u_1, u_2) = \frac{\boldsymbol{\gamma}'(u_1) \times \mathbf{w}}{\|\boldsymbol{\gamma}'(u_1) \times \mathbf{w}\|}$ bármely $u_1 \in I$ és $u_2 \in \mathbb{R}$ esetén. Ily módon teljesül $\partial_2\mathbf{N}(u_1, u_2) = \mathbf{0}$. Eszerint az \mathbf{N} vektormező az alkotók mentén állandó, tehát az $M = \mathbf{r}(I \times \mathbb{R})$ hengerfelület egy lefejthető vonalfelület.

Legyen S egy olyan sík, amely merőleges az alkotók irányát megadó \mathbf{w} egységvektorra. Ha vesszük ezen S sík metszetét az M hengerfelülettel, akkor egy \mathcal{G} egyszerű görbeívet nyerünk. Egy megfelelő J intervallumon vegyünk egy olyan ívhossz szerint paraméterezett $\hat{\boldsymbol{\gamma}} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét, amelynek pályája éppen \mathcal{G} . (Az S sík által kimetszett \mathcal{G} egyszerű görbeívet a hengerfelület normálmetszetének mondjuk.)

Könnyű belátni, hogy ekkor az $\hat{\mathbf{r}}(u, v) = \hat{\boldsymbol{\gamma}}(u) + v \mathbf{w}$ egyenlettel leírt $\hat{\mathbf{r}} : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvény ugyancsak egy paraméteres előállítás az M hengerfelületnek. Mivel a $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ görbe sebességvektorai merőlegesek \mathbf{w} -re, azt kapjuk, hogy az $\hat{\mathbf{r}}$ paraméterezés első főmennyiségeire teljesül

$$\hat{g}_{11}(u, v) = 1, \quad \hat{g}_{12}(u, v) = 0, \quad \hat{g}_{22}(u, v) = 1$$

bármely $(u, v) \in J \times \mathbb{R}$ esetén.

Vegyünk a $z = 0$ egyenletű \mathcal{P} koordinátasíknak az $\tilde{\mathbf{r}}(u, v) = u \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2$ egyenlettel leírt $\tilde{\mathbf{r}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ természetes paraméterezését. Világos, hogy ekkor is a fenti összefüggések igazak az első főmennyiségekre. Tekintsük azt a $\boldsymbol{\mu} : M \rightarrow \mathcal{P}$ sima leképezést, amelyet a $\boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{r}}(u, v)) = \tilde{\mathbf{r}}(u, v)$ egyenlet ír le. Az 5.29. Tételből már következik, hogy a $\boldsymbol{\mu}$ leképezés izometrikus. Ezek alapján igaz az alábbi kijelentés.

6.49. Állítás *A hengerfelület izometrikusan leképezhető egy síkbeli tartományra.*

A kúpfelület lefejtése a síkra

Legyen adott egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ egyszerű síkgörbe, amelynek pályája benne van a tér egy S síkjában, továbbá egy \mathbf{c} pont, amelyet S nem tartalmaz. Tekintsük az $\mathbf{r}(u_1, u_2) = \mathbf{c} + u_2(\gamma(u_1) - \mathbf{c})$ összefüggéssel meghatározott $\mathbf{r} : I \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt, amely egy elemi felületet ír le. Az $M = \mathbf{r}(I \times (0, \infty))$ vonalfelületet kúpfelületnek mondjuk.

Könnyű belátni, hogy a normális egységvektormezőre fennáll

$$\mathbf{N}(u_1, u_2) = \frac{\gamma'(u_1) \times (\gamma(u_1) - \mathbf{c})}{\|\gamma'(u_1) \times (\gamma(u_1) - \mathbf{c})\|}$$

tetszőleges $u_1 \in I$ és $u_2 \in (0, \infty)$ esetén. Ebből már látszik, hogy az alkotók mentén az \mathbf{N} állandó, tehát az M kúpfelület lefejthető.

Az alábbi állítás szerint a kúpfelület lokálisan izometrikus a síkkal.

6.50. Állítás *A kúpfelület az alkotói mentén felosztható olyan felületdarabokra, hogy azok izometrikusan leképezhetőek egy síkbeli tartományra.*

Bizonyítás. Az állítást úgy igazoljuk, hogy a kúpfelületet leíró \mathbf{r} leképezésnek vesszük egy alkalmas átparaméterezését.

Legyen $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ az a leképezés, melyet az $\alpha(t) = \frac{\gamma(t) - \mathbf{c}}{\|\gamma(t) - \mathbf{c}\|}$, $t \in I$, egyenlet ad meg. Látható, hogy fennáll $\|\alpha(t)\| = 1$ és $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$. Tekintsük az α görbének egy olyan $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ ívhossz szerinti átparaméterezését, amelynél teljesül $0 \in J$.

Vegyünk az $\hat{\mathbf{r}} : J \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést, amelyre fennáll $\hat{\mathbf{r}}(u, v) = \mathbf{c} + v\beta(u)$. Nyilvánvaló, hogy $\hat{\mathbf{r}}$ ugyancsak az M kúpfelületnek egy paraméterezése. Ennek parciális deriváltjaira a

$$\partial_1 \hat{\mathbf{r}}(u, v) = v\beta'(u), \quad \partial_2 \hat{\mathbf{r}}(u, v) = \beta(u)$$

kifejezések adódnak. Ily módon az első főmennyiségekre teljesül

$$\hat{g}_{11}(u, v) = v^2, \quad \hat{g}_{12}(u, v) = 0, \quad \hat{g}_{22}(u, v) = 1.$$

Legyen $\tilde{\mathbf{r}} : (-\pi/2, \pi/2) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ az a leképezés, amelyre igaz $\tilde{\mathbf{r}}(u, v) = v(\sin u \mathbf{e}_1 + \cos u \mathbf{e}_2)$. Világos, hogy $\tilde{\mathbf{r}}$ egy félsíkot ír le az \mathbb{R}^3 tér $z = 0$ egyenletű síkjában. Közvetlen számolással azonnak adódik, hogy az $\tilde{\mathbf{r}}$ paraméterezés első főmennyiségeire fennáll

$$\tilde{g}_{11}(u, v) = v^2, \quad \tilde{g}_{12}(u, v) = 0, \quad \tilde{g}_{22}(u, v) = 1.$$

Vegyünk egy olyan $\hat{J} \subset J$ intervallumot, amelyre igaz $\hat{J} \subset (-\pi/2, \pi/2)$, továbbá vegyünk az M kúpfelület $\hat{M} = \mathbf{r}(\hat{J} \times (0, \infty))$ darabját. Tekintsük most azt a $\mu : \hat{M} \rightarrow \hat{M}$ sima leképezést, amelyre fennáll $\mu(\hat{\mathbf{r}}(u, v)) = \tilde{\mathbf{r}}(u, v)$ bármely $u \in \hat{J}$ és $v \in (0, \infty)$ esetén. Ekkor az 5.29. Tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy μ egy izometriát ad meg a kúpfelületre eső \hat{M} elemi felület és a $\mu(\hat{M})$ síkbeli tartomány között. \square

A valódi görbe érintőfelülete, mint lefejthető vonalfelület

Legyen adva egy ívhossz szerint paraméterezett $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbe. Mint ismeretes, ekkor a γ görbe kísérő Frenet-bázisának \mathbf{T} , \mathbf{F} , \mathbf{B} vektormezőire teljesül $\mathbf{T}(u) = \gamma'(u)$, $\mathbf{F}(u) = \frac{1}{\|\gamma''(u)\|} \gamma''(u)$ és $\mathbf{B}(u) = \mathbf{T}(u) \times \mathbf{F}(u)$.

A $D = I \times (0, \infty)$ tartományon vegyük az

$$\mathbf{r}(u, v) = \gamma(u) + v \gamma'(u) \quad (6.31)$$

egyenlettel leírt $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt. Ennek parciális deriváltjaira a

$$\partial_1 \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{T}(u) + v \kappa(u) \mathbf{F}(u), \quad \partial_2 \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{T}(u)$$

egyenlőségek adódnak, ahol κ a γ görbe görbületi függvénye. Ezek alapján teljesül

$$\partial_1 \mathbf{r}(u, v) \times \partial_2 \mathbf{r}(u, v) = -v \kappa(u) \mathbf{B}(u) \quad (6.32)$$

bármely $(u, v) \in D$ esetén. A fenti összefüggés azt mutatja, hogy a C^∞ -osztályú \mathbf{r} leképezés reguláris. A továbbiakban feltesszük, hogy az \mathbf{r} vektorfüggvény egy elemi felületnek a paraméterezését adja.

6.51. Definíció A (6.31) egyenlettel leírt $M = \mathbf{r}(D)$ sima felületet a γ valódi görbe érintőfelületének mondjuk.

A (6.32) kifejezésből adódik, hogy a normális egységvektormezőre igaz $\mathbf{N}(u, v) = -\mathbf{B}(u)$. Ebből már következik, hogy az M érintőfelület egy lefejthető vonalfelület. Az alábbi állítás szerint az érintőfelületre is igaz az, hogy lokálisan izometrikus a síkkal.

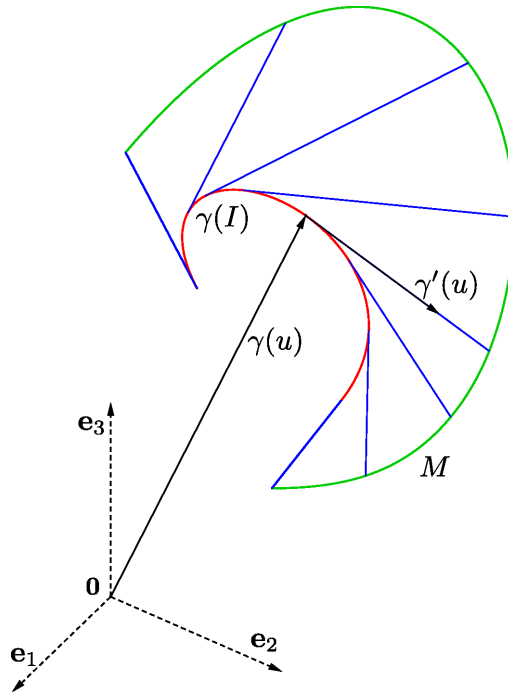
6.52. Állítás Az érintőfelület az alkotói mentén felosztható olyan felületdarabokra, hogy azok izometrikusan leképezhetőek egy síkbeli tartományra.

Bizonyítás. Könnyű belátni a parciális deriváltak kifejezései alapján, hogy az \mathbf{r} paraméterezés első főmennyiségeire fennáll

$$g_{11}(u, v) = 1 + v^2 \kappa(u)^2, \quad g_{12}(u, v) = 1, \quad g_{22}(u, v) = 1.$$

Alkalmazzuk most a görbeelmélet alaptételét, a 2.39. Tételt. Eszerint van olyan ívhossz szerint paraméterezett $\tilde{\gamma}$ görbe, amelynek $\tilde{\kappa}$ görbületére és $\tilde{\tau}$ torziójára fennáll $\tilde{\kappa} = \kappa$ és $\tilde{\tau} = 0$. A torzió eltűnése miatt $\tilde{\gamma}$ egy síkgörbe. Mint ismeretes, a $\tilde{\gamma}$ görbe csak izometria erejéig meghatározott. Emiatt feltehetjük, hogy az általunk kiválasztott és rögzített $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe pályája benne van az \mathbb{R}^3 tér $z = 0$ egyenletű koordinátságában.

Tekintsük most azt az $\tilde{\mathbf{r}} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést, amelyre igaz $\tilde{\mathbf{r}}(u, v) = \tilde{\gamma}(u) + v \tilde{\gamma}'(u)$ bármely $u \in I$ és $v \in (0, \infty)$ esetén. Legyen J egy olyan részintervalluma I -nek,



6.7. ábra. A $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi görbe érintőfelülete.

amelyre igaz az, hogy az $\tilde{\mathbf{r}}|_{J \times (0, \infty)}$ leszűkített leképezés eleget tesz az 5.1. Definíció feltételeinek, vagyis egy elemi felületnek a paraméterezése. Mivel $\tilde{\gamma}$ pályája benne van a $z = 0$ egyenletű síkban, az $\tilde{M} = \tilde{\mathbf{r}}(J \times (0, \infty))$ felület ennek a síknak egy darabja. Az pedig könnyen belátható, hogy az $\tilde{\mathbf{r}}$ paraméterezéshez tartozó első főmennyiségekre is éppen a fenti kifejezések adódnak.

Tekintsük most a γ érintőfelületén az $\hat{M} = \mathbf{r}(J \times (0, \infty))$ felületdarabot, továbbá azt a $\boldsymbol{\mu} : \hat{M} \rightarrow \tilde{M}$ sima bijekciót, amelyet a $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}(u, v)) = \tilde{\mathbf{r}}(u, v)$ egyenlet ír le az $u \in J$ és $v \in (0, \infty)$ értékekre. Ekkor az 5.29. Tételből már következik, hogy $\boldsymbol{\mu}$ egy izometriát ad a két elemi felület között. \square

A lefejthető vonalfelületek jellemzése

Az előzőek során beláttuk, hogy a hengerfelületek, a kúpfelületek és az érintőfelületek lokálisan lefejthetőek a síkra, azaz feloszthatóak olyan felületdarabokra, amelyek már izometrikusan leképezhetőek a síkba.

Az alábbi tétel szerint a hengerfelületeket, a kúpfelületeket és az érintőfelületeket tekinthetjük a lefejthető vonalfelületek alaptípusainak, mivel egy vonalfelület mindig felosztható olyan darabokra, amelyek rendre a három felület egyikének felelnek meg.

6.53. Tétel *Legyen adva a (6.29) összefüggéssel leírt $\mathbf{r} : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés, amely egy M lefejthető vonalfelületnek a paraméteres előállítását. Az I nyílt intervallum felbontható*

olyan diszjunkt nyílt L_n ($n \in A$) részintervallumokra, hogy az A index halmaz megszámlálható és bármely $n \in A$ esetén az $\mathbf{r}(L_n \times J)$ elemi felület vagy egy hengerfelületnek, vagy egy kúpfelületnek, vagy pedig egy érintőfelületnek a darabja.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 6.48. Állítást, amely egy kritériumot ad a lefejthetőségre. Eszerint tetszőleges $u \in I$ helyen a $\boldsymbol{\gamma}'(u)$, $\boldsymbol{\beta}(u)$, $\boldsymbol{\beta}'(u)$ vektorok lineárisan összefüggőek.

Legyen L olyan nyílt részintervallum I -ben, amelyen a $\boldsymbol{\beta}'$ függvény eltűnik. Ekkor a $\boldsymbol{\beta} : L \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés konstans, vagyis valamely \mathbf{w} egységvektorra igaz $\boldsymbol{\beta}(u) = \mathbf{w}$, $u \in L$. Világos, hogy ekkor az $\mathbf{r}(L \times J)$ elemi felület rajta van azon a hengerfelületen, melyet azon egyenesek alkotnak, melyek párhuzamosak a \mathbf{w} -vel és metszik a $\boldsymbol{\gamma}|L$ görbe pályáját.

Tekintsünk most egy olyan $N \subset I$ intervallumot, amelyen a $\boldsymbol{\beta}'$ függvény sehol sem tűnik el. Mivel a $\boldsymbol{\beta}'(u)$ vektor merőleges a $\boldsymbol{\beta}(u)$ egységvektorra, ez a két vektor lineárisan független. Emiatt bármely $u \in N$ esetén a $\boldsymbol{\gamma}'(u)$ egységvektor előáll ezek lineáris kombinációjaként. Eszerint egyértelműen léteznek olyan $f, h : N \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvények, hogy teljesül

$$\boldsymbol{\gamma}'(u) = f(u)\boldsymbol{\beta}(u) + h(u)\boldsymbol{\beta}'(u) \quad (6.33)$$

bármely $u \in N$ esetén.

Vegyük azt a $\boldsymbol{\delta} : N \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést, melyet a $\boldsymbol{\delta}(u) = \boldsymbol{\gamma}(u) - h(u)\boldsymbol{\beta}(u)$ egyenlet ad meg. Közvetlen számolással adódik, hogy a (6.33) kifejezés miatt ennek deriváltjára igaz

$$\boldsymbol{\delta}'(u) = (f(u) - h'(u))\boldsymbol{\beta}(u). \quad (6.34)$$

Tegyük fel, hogy az $f - h'$ függvény eltűnik az $L \subset N$ intervallumon. Ekkor a $\boldsymbol{\delta}$ vektorfüggvény konstans az L -en, vagyis valamely \mathbf{c} pontra fennáll $\boldsymbol{\gamma}(u) - h(u)\boldsymbol{\beta}(u) = \mathbf{c}$ bármely $u \in L$ -re. Ily módon a $\boldsymbol{\gamma}(u) = \mathbf{c} + h(u)\boldsymbol{\beta}(u)$ egyenlőség alapján azt kapjuk, hogy teljesül

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{c} + (v + h(u))\boldsymbol{\beta}(u)$$

bármely $u \in L$ és $v \in J$ esetén. A fenti összefüggés alapján már belátható, hogy az $\mathbf{r}(L \times J)$ felület rajta van azon az alakzaton, amelyet azok az egyenesek alkotnak, melyek áthaladnak a \mathbf{c} ponton és párhuzamosak valamelyik $\boldsymbol{\beta}(u)$ ($u \in L$) egységvektorral. Ebből már következik az, hogy az $\mathbf{r}(L \times J)$ elemi felület rajta van egy \mathbf{c} csúcspontú kúpfelületen.

Végül tegyük fel, hogy L egy olyan részintervallum N -ben, amelyen az $f - h'$ függvény sehol sem tűnik el. Ekkor nyilván teljesül a $\boldsymbol{\beta}(u) = \frac{1}{f(u) - h'(u)}\boldsymbol{\delta}'(u)$, $u \in L$, egyenlőség. Mivel $\boldsymbol{\beta}'(u) \neq \mathbf{0}$ igaz bármely $u \in L$ -re, a (6.34) kifejezés alapján könnyen igazolható, hogy a $\boldsymbol{\delta}'(u)$ és $\boldsymbol{\delta}''(u)$ vektorok lineárisan függetlenek. Emiatt a $\boldsymbol{\delta}|L$ görbe valódi, vagyis a görbülete sehol sem tűnik el.

Az előbbi összefüggések alapján fennáll

$$\mathbf{r}(u, v) = \boldsymbol{\delta}(u) + \frac{v + h(u)}{f(u) - h'(u)} \boldsymbol{\delta}'(u) \quad (6.35)$$

tetszőleges $u \in L$ és $v \in J$ értékek mellett. A (6.35) egyenlőség szerint az $\mathbf{r}(L \times J)$ felületet tartalmazza az az alakzat, melyet a $\boldsymbol{\delta}|L$ görbe érintőegyenesei alkotnak. Ennek következtében az $\mathbf{r}(L \times J)$ elemi felület rajta van egy érintőfelületen.

Az I intervallum felosztását részintervallumokra az alábbi módon végezhetjük el. Az I -n először vegyük azon tovább már nem bővíthető részintervallumokat, melyeken a $\boldsymbol{\beta}'$ függvény eltűnik. Ezeknek az M vonalfelületre eső hengerfelület-darabok felelnek meg az \mathbf{r} paraméterezés szerint. Amennyiben egy olyan N maximális részintervallumot veszünk I -ben, amelyen a $\boldsymbol{\beta}'$ sehol sem tűnik el, akkor a (6.33) egyenlettel megadott f , h függvényeket kell tekintenünk. Ezek alapján az N -ben jelöljük ki azon maximális részintervallumokat, melyeken az $f - h'$ függvény vagy eltűnik, vagy pedig sehol sem tűnik el. A fent leírtak alapján ezeknek a részintervallumoknak az M -re eső kúpfelület-darabok, illetve érintőfelület-darabok felelnek meg.

Belátható, hogy a kapott nyílt részintervallumok és azok határpontjai kiadják a teljes I intervallumot. Mint ismeretes, egy intervallum mindig tartalmaz racionális számokat. Mivel a racionális számok megszámlálhatóak, a felbontással nyert részintervallumok is megszámlálhatóak. Ezzel a tétel igazolást nyert. \square

Egy sima felületet akkor mondunk parabolikusnak, ha a Gauss-görbület az összes pontjában eltűnik. Az alábbi tétel bizonyítása azon alapul, hogy a nem umbilikus hely egy megfelelő környezetén meg lehet adni egy olyan átparaméterezést, amelynél a paramétervonalak görbületi vonalakat képeznek.

6.54. Tétel *Legyen adott egy M parabolikus elemi felület az $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezéssel. Ha a $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{a})$ felületi pont nem planáris, akkor \mathbf{a} -nak van olyan U összefüggő nyílt környezete D -ben, hogy az $\mathbf{r}(U)$ felületdarab egy lefejthető vonalfelület.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a \mathbf{p} pont nem planáris. Ez nyilván azt jelenti, hogy az egyik \mathbf{p} -beli főgörbület nem 0. Emiatt \mathbf{a} -nak van olyan V ($V \subset D$) környezete \mathbb{R}^2 -ben, hogy az $\mathbf{r}(V)$ felületdarab egyik pontja sem planáris.

A 6.27. Tétel következtében az $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ pontnak megadható egy olyan U összefüggő nyílt környezete, hogy $U \subset V$ és az $\mathbf{r}|U$ leképezés átparaméterezhető az alábbi módon:

Az átparaméterezést leíró $\boldsymbol{\varphi}$ függvény egy \mathbb{R}^2 -beli $I \times J$ nyílt téglalapon van értelmezve, vagyis teljesül $\boldsymbol{\varphi}(I \times J) = U$, továbbá az $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\varphi}$ vektorfüggvény paramétervonalai görbületi vonalak.

Az $\tilde{\mathbf{r}} : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezéshez tartozó főgörbületi függvények legyenek $\tilde{\kappa}_1$ és $\tilde{\kappa}_2$. Mivel az $\tilde{\mathbf{r}}(I \times J)$ felületdarab egyik pontja sem planáris, az egyik főgörbületi függvény sehol sem tűnik el. Tegyük fel, hogy jelen esetben fennáll $\tilde{\kappa}_1(u, v) \neq 0$ és $\tilde{\kappa}_2(u, v) = 0$

bármely $(u, v) \in I \times J$ helyen. Az alábbiak során be fogjuk látni, hogy ekkor az $\tilde{\mathbf{r}}$ vektorfüggvény második paramétervonalai nyílt egyenesszakaszok vagy egyenesek.

Mivel a paramétervonalak most görbületi vonalak és a főgörbületek az összes pontban különbözőek, a $\partial_1 \tilde{\mathbf{r}}(u, v)$, $\partial_2 \tilde{\mathbf{r}}(u, v)$, $\tilde{\mathbf{N}}(u, v)$ vektorok páronként merőlegesek egymásra tetszőleges $u \in I$ és $v \in J$ esetén. Emiatt teljesül $\tilde{g}_{12} = 0$. Vegyük észre azt is, hogy a Weingarten-leképezés értelmezése alapján fennáll a $\partial_i \tilde{\mathbf{N}}(u, v) = -\tilde{\kappa}_i(u, v) \partial_i \tilde{\mathbf{r}}(u, v)$ egyenlet ($i = 1, 2$). Ily módon a $\partial_2 \tilde{\mathbf{N}}$ függvény eltűnik.

Tekintsük a $\langle \partial_2 \tilde{\mathbf{r}}(u, v), \tilde{\mathbf{N}}(u, v) \rangle = 0$ összefüggést. Ha vesszük ennek a második változó szerinti parciális deriváltját, akkor azt nyerjük, hogy igaz

$$\langle \partial_{2,2} \tilde{\mathbf{r}}(u, v), \tilde{\mathbf{N}}(u, v) \rangle = -\langle \partial_2 \tilde{\mathbf{r}}(u, v), \partial_2 \tilde{\mathbf{N}}(u, v) \rangle = 0. \quad (6.36)$$

Ismét kihasználva a $\partial_2 \tilde{\mathbf{N}} = 0$ egyenlőséget, az $\tilde{\mathbf{r}}$ vegyes másodrendű parciális deriváltjára a

$$\partial_{1,2} \tilde{\mathbf{r}} = \partial_2(\partial_1 \tilde{\mathbf{r}}) = \partial_2 \left(-\frac{1}{\tilde{\kappa}_1} \partial_1 \tilde{\mathbf{N}} \right) = \frac{\partial_2 \tilde{\kappa}_1}{(\tilde{\kappa}_1)^2} \partial_1 \tilde{\mathbf{N}} = -\frac{\partial_2 \tilde{\kappa}_1}{\tilde{\kappa}_1} \partial_1 \tilde{\mathbf{r}}$$

egyenlőség adódik. Ennek következtében teljesül $\langle \partial_{1,2} \tilde{\mathbf{r}}(u, v), \partial_2 \tilde{\mathbf{r}}(u, v) \rangle = 0$.

Mint arra már utaltunk a fentiek során, a \tilde{g}_{12} első főmennyiség eltűnik. Ha vesszük a \tilde{g}_{12} függvénynek a második változó szerinti parciális deriváltját, akkor a

$$0 = \partial_2 \tilde{g}_{12} = \partial_2(\langle \partial_1 \tilde{\mathbf{r}}, \partial_2 \tilde{\mathbf{r}} \rangle) = \langle \partial_{1,2} \tilde{\mathbf{r}}, \partial_2 \tilde{\mathbf{r}} \rangle + \langle \partial_1 \tilde{\mathbf{r}}, \partial_{2,2} \tilde{\mathbf{r}} \rangle$$

összefüggéshez jutunk. A fenti eredményekből már adódik, hogy

$$\langle \partial_{2,2} \tilde{\mathbf{r}}(u, v), \partial_1 \tilde{\mathbf{r}}(u, v) \rangle = 0 \quad (6.37)$$

teljesül tetszőleges $(u, v) \in I \times J$ esetén.

A (6.36) és (6.37) összefüggések következtében a $\partial_{2,2} \tilde{\mathbf{r}}(u, v)$ vektor párhuzamos a $\partial_2 \tilde{\mathbf{r}}(u, v)$ vektorral. Ily módon (2.4) alapján azt kapjuk, hogy a második paramétervonalak görbülete eltűnik. Ezt felhasználva a 2.12. Állításból következik, hogy a második paramétervonalak pályái egyenesekre esnek, ami már igazolja a tételt. \square

6.7. Feladatok

6.1. Feladat Tekintsük az $\mathbf{r}(u, v) = \sin(u - 1) \mathbf{e}_1 + 2 \exp(1 - v) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \mathbf{e}_3$ egyenlettel megadott $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt és az általa leírt sima elemi felületet. Ezen felület $\mathbf{p} = (0, 2, 1)$ pontjában határozzuk meg a $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1 + 4 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ érintőirányhoz tartozó normálgörbületet (azaz a normálmetszet görbe előjeles görbületét).

6.2. Feladat Tekintsük az $\mathbf{r}(u, v) = \exp(2u) \mathbf{e}_1 + \exp(-2v) \mathbf{e}_2 + (2u + v - 3) \mathbf{e}_3$ egyenlettel megadott $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt és az általa leírt $M = \mathbf{r}(\mathbb{R}^2)$ sima elemi felületet. Ezen felület $\mathbf{p} = (1, 1, -3)$ pontjában határozzuk meg a $\mathbf{w} = \mathbf{e}_1 + 2 \mathbf{e}_2$ érintőirányhoz tartozó normálgörbületet.

6.3. Feladat Vegyük az előző 6.2. Feladatban szereplő M elemi felületet a megadott \mathbf{r} paraméterezéssel. A $\sigma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezés, ahol $\sigma(t) = \ln t \mathbf{e}_1 + (t - 1) \mathbf{e}_2$ igaz bármely $t \in \mathbb{R}$ -re, egy sima görbét ír le a $D = \mathbb{R}^2$ paramétertartományban. Tekintsük a $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$ felületi görbét. Határozzuk meg γ görbületét a $t = 1$ helyen.

6.4. Feladat Legyen \mathbf{p} egy szférikus pontja az \mathbb{R}^3 -beli M elemi felületnek. Tekintsük a \mathbf{p} -n áthaladó felületi görbék \mathbf{p} -hez tartozó görbületi középpontjait (azaz a görbék simulóköröknek a középpontjait). Bizonyítsuk be, hogy ezek a pontok egy gömbfelületre esnek.

6.5. Feladat Tekintsük az $\mathbf{r}(u, v) = (u + v) \mathbf{e}_1 + (u - v) \mathbf{e}_2 + uv \mathbf{e}_3$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ vektorfüggvény által leírt hiperbolikus paraboloidot. Ennek $\mathbf{p} = (2, 0, 1)$ pontjában határozzuk meg a Gauss-görbületet, a középgörbületet, a két főgörbületet és a főirányokat.

6.6. Feladat Tekintsük a $\gamma(u) = a (\ln(\operatorname{tg} \frac{u}{2}) + \cos u) \mathbf{e}_1 + a \sin u \mathbf{e}_2$ összefüggés által leírt $\gamma : (0, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét, melyet traktrixnak mondanak. Ezen görbének az x tengely körüli forgatásával nyert forgásfelületet nevezik pszeudoszférának. Bizonyítsuk be, hogy a pszeudoszféra mentén a Gauss-görbület állandó.

6.7. Feladat Vegyük a $\gamma(u) = u \mathbf{e}_1 + \operatorname{ch} u \mathbf{e}_2$ egyenlettel leírt $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ egyszerű síkgörbét. Forgassuk meg a γ görbe pályáját az x tengely körül. Az így nyert forgásfelületet paraméterezzük az $\mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{e}_1 + \operatorname{ch} u (\cos v \mathbf{e}_2 + \sin v \mathbf{e}_3)$ összefüggés szerinti \mathbf{r} vektorfüggvénnyel. Igazoljuk, hogy ez a forgásfelület egy minimálfelület.

6.8. Feladat Vegyük az $\mathbf{r}(u, v) = (u - \frac{1}{3} u^3 + uv^2) \mathbf{e}_1 + (v - \frac{1}{3} v^3 + vu^2) \mathbf{e}_2 + (u^2 - v^2) \mathbf{e}_3$ összefüggéssel megadott vektorfüggvényt és az általa leírt ún. Enneper-féle felületet. Határozzuk meg a felület Gauss-féle görbületét, középgörbületét és főgörbületeit.

6.9. Feladat Vegyünk a térben egy $p = 1$ paraméterű parabolát és forgassuk meg a vezéregyenese körül. Bizonyítsuk be, hogy az így nyert forgásfelület pontjaiban a két főgörbület hányadosa állandó.

6.10. Feladat Legyen adott egy $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvény, amely az M sima elemi felületet írja le. Vegyük a felület \mathbf{r} paraméteres előállításának megfelelő $\mathbf{N} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ normális egységvektormezőt és a felület főgörbületeit adó $\kappa_1, \kappa_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényeket. Legyen d egy olyan valós szám, amelyre fennáll $d \cdot \kappa_1(u, v) < 1$ és $d \cdot \kappa_2(u, v) < 1$ tetszőleges $(u, v) \in D$ esetén. Az $\hat{\mathbf{r}}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + d \mathbf{N}(u, v)$ formula által nyert $\hat{\mathbf{r}}$ vektorfüggvény egy másik \hat{M} felületet ír le, amelyet az M egyik parallel felületének nevezünk. Igazoljuk, hogy az \hat{M} felület főgörbületi függvényeire fennáll

$$\hat{\kappa}_i(u, v) = \frac{\kappa_i(u, v)}{1 - d \cdot \kappa_i(u, v)} \quad (i = 1, 2).$$

6.11. Feladat Tekintsük az \mathbb{R}^3 euklideszi térben a $z = ax^2 + by^2$ ($a > b$) implicit egyenlettel meghatározott elliptikus paraboloidot. Határozzuk meg ezen felület umbilikus pontjait.

6.12. Feladat Egy M elemi felület $T_p M$ érintőterében a főirányokat a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ egységvektorok adják meg. Tekintsünk az érintőtérben olyan $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ ($n \geq 2$) egységvektorokat, melyeknek a \mathbf{v}_1 -gyel bezárt (előjeles) szöge $\alpha_r = \varphi + \frac{r-1}{n}\pi$ ($r = 1, \dots, n$). Jelölje H_p a p -beli középgörbületet és $k_p(\mathbf{w}_r)$ a \mathbf{w}_r irányhoz tartozó normálgörbületet. Bizonyítsuk be, hogy fennáll $n H_p = \sum_{r=1}^n k_p(\mathbf{w}_r)$.

6.13. Feladat Tegyük fel, hogy az \mathbb{R}^3 -beli M_1, M_2 sima elemi felületek metszete egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ általános térgörbének a pályájával esik egybe. A $\mathbf{p} = \gamma(t)$ ($t \in I$) pontban a felületek normális egységvektorainak hajlásszöge legyen α ($\alpha \neq 0, \alpha \neq \pi$), a felületek $\mathbf{w} = \gamma'(t)$ irányú normálgörbületeit pedig jelölje $k_1(\mathbf{w})$ és $k_2(\mathbf{w})$. Igazoljuk, hogy a γ -nak a t helyen vett $\kappa(t)$ görbületére fennáll a $(\kappa(t) \sin \alpha)^2 = (k_1(\mathbf{w}))^2 + (k_2(\mathbf{w}))^2 - 2k_1(\mathbf{w})k_2(\mathbf{w}) \cos \alpha$ összefüggés.

6.14. Feladat Az $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvény olyan elemi felületet ír le, amelynek a $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ valódi felületi görbe aszimptotavonala. Legyen $K : D \rightarrow \mathbb{R}$ a felület pontjaiban a Gauss-görbületet megadó függvény. Bizonyítsuk be, hogy a γ görbe torziójára fennáll $\tau(t)^2 = -K \circ \sigma(t)$ tetszőleges $t \in I$ helyen.

6.15. Feladat Legyen $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ egy olyan vektorfüggvény, amely egy M elemi felületet ír le és az első főmennyiségeire fennállnak a $g_{11}(u, v) = g_{22}(u, v)$, $g_{12}(u, v) = 0$ egyenlőségek. Bizonyítsuk be, hogy ez esetben M egy minimálfelület akkor és csak akkor, ha az \mathbf{r} koordináta-függvényei harmonikusak.

6.16. Feladat Az \mathbb{R}^3 térben legyen adott egy M összefüggő kompakt sima felület. Mutassuk meg, hogy az M felületnek van elliptikus pontja.

6.17. Feladat Legyen M egy olyan kompakt sima felület, amely egy térbeli konvex tartományt határol. Bizonyítsuk be, hogy az M felületnél a szorzatgörbület felszín szerinti integráljára fennáll $K(M) = 4\pi$.

6.18. Feladat Tekintsük az $\mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \mathbf{e}_3$ összefüggéssel meghatározott $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt, továbbá az általa leírt $M = \mathbf{r}(\mathbb{R}^2)$ forgásparaboloidot. Vegyük az \mathbb{R}^2 síkban a $B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$ körlemez. Határozzuk meg a Gauss-görbület felszín szerinti integrálját az $\mathbf{r}(B)$ felületdarabon.

7. fejezet

Az elemi felületre vonatkozó derivációs egyenletek

7.1. A Christoffel-féle szimbólumok

Tekintsünk egy M elemi felületet és annak egy rögzített $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméteres előállítását. A továbbiakban alkalmazni fogjuk az előző két fejezetben bevezetett fogalmakat és jelöléseket.

A D paramétertartomány egy $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ pontjában vegyünk az első főmennyiségekből képzett $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ mátrixot. Ennek inverzét ezt követően $\mathbf{H}(\mathbf{u})$ -val jelöljük. Legyen a $h^{ij}(\mathbf{u})$ ($i, j = 1, 2$) szám a $\mathbf{H}(\mathbf{u})$ szimmetrikus mátrix i -edik sorának j -edik eleme. Ily módon a $h^{ij} : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényekhez jutunk, melyekkel fennáll $\sum_{k=1}^2 h^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$, ahol δ_j^i a jól ismert Kronecker-szimbólum.

7.1. Definíció A $\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}, \mathbf{N} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ felületi vektormezők hármását az M felület \mathbf{r} paraméterezéséhez tartozó kísérő Gauss-bázisának mondjuk.

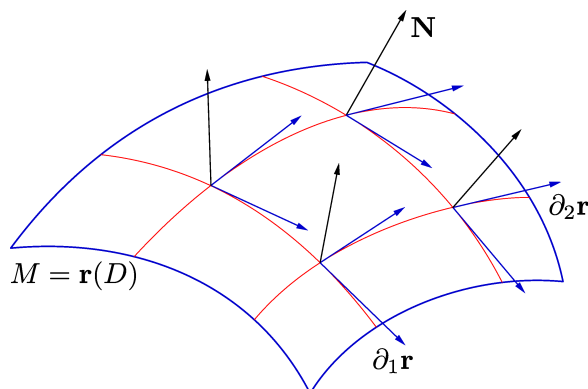
Vegyünk az \mathbf{r} függvény másodrendű parciális deriváltjait. Világos, hogy tetszőleges $\mathbf{u} \in D$ esetén a $\partial_{i,j} \mathbf{r}(\mathbf{u})$ vektor felbontható egy a $T_{\mathbf{r}(\mathbf{u})}M$ érintőtérbe eső összetevő és egy arra merőleges összetevő összegére. Vegyük észre, hogy a $T_{\mathbf{r}(\mathbf{u})}M$ érintőtérre merőleges összetevő éppen a

$$\langle \partial_{i,j} \mathbf{r}(\mathbf{u}), \mathbf{N}(\mathbf{u}) \rangle \mathbf{N}(\mathbf{u}) = b_{ij}(\mathbf{u}) \mathbf{N}(\mathbf{u})$$

vektor. Ennek ismeretében fejezzük ki a $\partial_{i,j} \mathbf{r}(\mathbf{u})$ vektort a $\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{u}), \partial_2 \mathbf{r}(\mathbf{u}), \mathbf{N}(\mathbf{u})$ Gauss-bázis lineáris kombinációjaként a

$$\partial_{i,j} \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l(\mathbf{u}) \cdot \partial_l \mathbf{r}(\mathbf{u}) + b_{ij}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{u}) \quad (7.1)$$

egyenlettel. Világos, hogy ez az előállítás egyértelmű. Ily módon egy újabb fogalmat lehet bevezetni.



7.1. ábra. Az elemi felület kísérő Gauss-bázisa.

7.2. Definíció A (7.1) kifejezés alapján értelmezett $\Gamma_{ij}^l : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j, l = 1, 2$) függvényeket az M felület \mathbf{r} paraméterezéséhez tartozó Christoffel-féle szimbólumoknak nevezzük.

Megjegyzés Mint ismeretes, a Young-tétel szerint az \mathbf{r} függvény másodrendű parciális deriváltjaira igaz $\partial_{i,j}\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \partial_{j,i}\mathbf{r}(\mathbf{u})$ bármely $\mathbf{u} \in D$ helyen. Ennek következtében a Christoffel-szimbólumok az alsó két indexükre nézve szimmetrikusak, vagyis teljesül $\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l$.

A Christoffel-szimbólumokat a következő állítás alapján határozhatjuk meg.

7.3. Állítás A Christoffel-féle szimbólumokra fennáll a

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 h^{kl} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) \quad (7.2)$$

összefüggés.

Bizonyítás. A (7.1) egyenlet mindkét oldalának vegyük a skaláris szorzatát a $\partial_k \mathbf{r}(\mathbf{u})$ vektorral. Ezzel az eljárással a

$$\langle \partial_{i,j}\mathbf{r}(\mathbf{u}), \partial_k \mathbf{r}(\mathbf{u}) \rangle = \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l(\mathbf{u}) \cdot g_{lk}(\mathbf{u}) \quad (7.3)$$

összefüggést nyerjük. Ennek alapján vezessük most be a $P_{ikj} : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket ($i, j, k = 1, 2$), melyeket a

$$P_{ikj}(\mathbf{u}) = \langle \partial_{i,j}\mathbf{r}(\mathbf{u}), \partial_k \mathbf{r}(\mathbf{u}) \rangle$$

egyenlőség ír le bármely $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in D$ esetén. Nyilvánvaló, hogy ezekre igaz $P_{ikj} = P_{jki}$ tetszőleges i, k, j indexek mellett. A $g_{jk} = \langle \partial_j \mathbf{r}, \partial_k \mathbf{r} \rangle$ első főmennyiség i -edik

változó szerinti parciális deriváltjára fennáll

$$\partial_i g_{jk}(\mathbf{u}) = \langle \partial_{j,i} \mathbf{r}(\mathbf{u}), \partial_k \mathbf{r}(\mathbf{u}) \rangle + \langle \partial_j \mathbf{r}(\mathbf{u}), \partial_{k,i} \mathbf{r}(\mathbf{u}) \rangle.$$

Innen az i, j, k indexek ciklikus cseréjével a

$$\begin{aligned} \partial_i g_{jk}(\mathbf{u}) &= P_{jki}(\mathbf{u}) + P_{kji}(\mathbf{u}), & \partial_j g_{ki}(\mathbf{u}) &= P_{kij}(\mathbf{u}) + P_{ikj}(\mathbf{u}), \\ \partial_k g_{ij}(\mathbf{u}) &= P_{ijk}(\mathbf{u}) + P_{jik}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

egyenlőségekhez jutunk. Az első két egyenlet összegéből vonjuk ki a harmadikat. Ily módon azt kapjuk, hogy teljesül

$$\partial_i g_{jk}(\mathbf{u}) + \partial_j g_{ki}(\mathbf{u}) - \partial_k g_{ij}(\mathbf{u}) = 2 P_{ikj}(\mathbf{u}).$$

(7.3) alkalmazásával ebből a

$$\partial_i g_{jk}(\mathbf{u}) + \partial_j g_{ki}(\mathbf{u}) - \partial_k g_{ij}(\mathbf{u}) = 2 \cdot \sum_{s=1}^2 \Gamma_{ij}^s(\mathbf{u}) \cdot g_{sk}(\mathbf{u})$$

egyenlőség adódik. Szorozzuk ezt meg a $h^{lk}(\mathbf{u})$ számmal, majd vegyük a $k = 1, 2$ értékeknek megfelelő egyenletek összegét. Ekkor azt kapjuk, hogy teljesül

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^2 h^{lk}(\mathbf{u}) \cdot (\partial_i g_{jk}(\mathbf{u}) + \partial_j g_{ki}(\mathbf{u}) - \partial_k g_{ij}(\mathbf{u})) \\ &= 2 \sum_{s=1}^2 \Gamma_{ij}^s(\mathbf{u}) \cdot \sum_{k=1}^2 h^{lk}(\mathbf{u}) g_{ks}(\mathbf{u}) = 2 \sum_{s=1}^2 \Gamma_{ij}^s(\mathbf{u}) \cdot \delta_s^l = 2 \Gamma_{ij}^l(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

A fenti összefüggés már igazolja az állítást. □

Megjegyzés A (7.2) egyenlet szerint a Christoffel-szimbólumok kiszámíthatóak az első főmennyiségekből, azaz a g_{ij} ($i, j = 1, 2$) függvényekből.

A derivációs formulák

Tekintsük most az \mathbf{N} vektormező k -adik változó szerinti parciális deriváltját az $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ helyen. Emlékezzünk rá, hogy a Weingarten-leképezés definíciója miatt fennáll

$$\partial_k \mathbf{N}(\mathbf{u}) = -\mathcal{A}_{\mathbf{r}(\mathbf{u})}(\partial_k \mathbf{r}(\mathbf{u})) = -\sum_{s=1}^2 A_{sk}(\mathbf{u}) \partial_s \mathbf{r}(\mathbf{u}).$$

A (6.13) összefüggés következtében pedig igaz $A_{sk}(\mathbf{u}) = \sum_{l=1}^2 h^{sl}(\mathbf{u}) b_{lk}(\mathbf{u})$, amiből már adódik, hogy teljesül

$$\partial_k \mathbf{N}(\mathbf{u}) = -\sum_{s=1}^2 \sum_{l=1}^2 h^{sl}(\mathbf{u}) b_{lk}(\mathbf{u}) \cdot \partial_s \mathbf{r}(\mathbf{u}). \quad (7.4)$$

A felületelméletben a kísérő Gauss-bázis parciális deriváltjaira vonatkozó

$$\begin{aligned}\partial_{i,j}\mathbf{r} &= \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l \cdot \partial_l \mathbf{r} + b_{ij} \cdot \mathbf{N}, \\ \partial_k \mathbf{N} &= - \sum_{s=1}^2 \sum_{l=1}^2 h^{sl} b_{lk} \cdot \partial_s \mathbf{r}\end{aligned}$$

($i, j, k = 1, 2$) egyenleteket derivációs formuláknak szokás nevezni.

7.2. A Gauss-egyenletek és a Mainardi-Codazzi-egyenletek

Az alábbiak során azt vizsgáljuk, hogy az M felületet leíró $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés első és második főmennyiségei között milyen összefüggések állnak fenn. Ennek céljából tekintsük az \mathbf{r} vektorfüggvény harmadrendű parciális deriváltjait. A (7.1) egyenlet alapján nyerjük a

$$\partial_{i,j,k}\mathbf{r} = \partial_k(\partial_{i,j}\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^2 \partial_k \Gamma_{ij}^l \cdot \partial_l \mathbf{r} + \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l \cdot \partial_{l,k}\mathbf{r} + \partial_k b_{ij} \cdot \mathbf{N} + b_{ij} \cdot \partial_k \mathbf{N}$$

kifejezést. A (7.1) és (7.4) derivációs formulákat felhasználva a

$$\begin{aligned}\partial_k(\partial_{i,j}\mathbf{r}) &= \sum_{l=1}^2 \partial_k \Gamma_{ij}^l \cdot \partial_l \mathbf{r} + \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l \left(\sum_{s=1}^2 \Gamma_{lk}^s \cdot \partial_s \mathbf{r} + b_{lk} \cdot \mathbf{N} \right) \\ &\quad + \partial_k b_{ij} \cdot \mathbf{N} - b_{ij} \left(\sum_{s=1}^2 \sum_{l=1}^2 h^{sl} b_{lk} \cdot \partial_s \mathbf{r} \right)\end{aligned}$$

összefüggéshez jutunk. Ennek átrendezésével a

$$\partial_k(\partial_{i,j}\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^2 \left(\partial_k \Gamma_{ij}^s + \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^s - b_{ij} \sum_{l=1}^2 h^{sl} b_{lk} \right) \cdot \partial_s \mathbf{r} + \left(\partial_k b_{ij} + \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l b_{lk} \right) \cdot \mathbf{N}$$

egyenletet kapjuk.

Fejezzük most ki a $\partial_k(\partial_{i,j}\mathbf{r}) - \partial_j(\partial_{i,k}\mathbf{r})$ vektorfüggvényt a $\partial_1 \mathbf{r}$, $\partial_2 \mathbf{r}$, \mathbf{N} kísérő Gauss-bázismezők lineáris kombinációjaként. (Szummációs indexként l helyett alkalmazzuk a -t.) A vegyes parciális deriváltak alaptulajdonsága következtében ezen kifejezésben az összes együttható értéke 0. Ily módon a főmennyiségekkel és a Christoffel-szimbólumokkal teljesülnek a

$$\partial_k \Gamma_{ij}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s + \sum_{a=1}^2 (\Gamma_{ij}^a \Gamma_{ak}^s - \Gamma_{ik}^a \Gamma_{aj}^s) = \sum_{a=1}^2 h^{sa} (b_{ij} b_{ak} - b_{ik} b_{aj}), \quad (7.5)$$

$$\partial_k b_{ij} - \partial_j b_{ik} + \sum_{a=1}^2 (\Gamma_{ij}^a b_{ak} - \Gamma_{ik}^a b_{aj}) = 0 \quad (7.6)$$

($i, j, k, s = 1, 2$) egyenlőségek.

7.4. Definíció A (7.5) összefüggéseket a felület főmennyiségeire vonatkozó Gauss-egyenleteknek, az (7.6) összefüggéseket pedig Mainardi-Codazzi-egyenleteknek nevezzük.

A forma-probléma, Bonnet tétele

Legyen D egy összefüggő nyílt halmaz \mathbb{R}^2 -ben. Tekintsünk olyan C^∞ -osztályú $g_{ij}, b_{ij} : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j = 1, 2$) függvényeket, melyekre fennáll $g_{ij} = g_{ji}$ és $b_{ij} = b_{ji}$. A g_{ij} függvények tegyenek eleget azon feltételnek is, hogy tetszőleges $\mathbf{u} \in D$ pontban az általuk meghatározott $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ szimmetrikus mátrix egy pozitív definit kvadratikus formát ad meg az \mathbb{R}^2 vektortéren.

Feltehető a kérdés, hogy minden esetben van-e olyan $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^∞ -osztályú vektorfüggvény, amely egy elemi felületet ír le, és amelynél az első és második főmennyiségek megegyeznek az adott g_{ij}, b_{ij} függvényekkel.

Világos, hogy az így feltett kérdésre a válasz nemleges, hiszen egy felület első és második főmennyiségeivel kapcsolatban a Gauss-egyenleteknek és a Mainardi-Codazzi-egyenleteknek is teljesülniük kell.

A probléma kapcsán a g_{ij} függvényekből képzett $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \in D$) mátrixok invertálásával értelmezzük a h^{ij} függvényeket. Ezt követően vegyük a (7.2) formula által meghatározott $\Gamma_{ij}^l : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket. Ily módon ellenőrizni tudjuk a (7.5), (7.6) összefüggések teljesülését. A parciális differenciálegyenlet-rendszerek elméletét alkalmazva bizonyítani lehet az alábbi alapvető eredményt, melyet Bonnet tételeként tartunk számon. A bizonyítás megtalálható a [doCa] könyv 4. fejezetében.

7.5. Tétel *Tegyük fel, hogy az adott g_{ij}, b_{ij} függvényekre vonatkozóan teljesülnek a (7.5) és (7.6) egyenletek. Ez esetben tetszőleges $\mathbf{a} \in D$ pont valamely U ($U \subset D$) nyílt összefüggő környezetén meg lehet adni egy olyan $\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^∞ -osztályú vektorfüggvényt, amely egy elemi felületet ír le és az \mathbf{r} -hez tartozó első és második főmennyiségek megegyeznek a $g_{ij}|U, b_{ij}|U$ függvényekkel.*

Amennyiben az $\hat{\mathbf{r}} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvény is megoldását képezi a feladatnak, akkor van olyan $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ irányítástartó izometria, hogy fennáll $\hat{\mathbf{r}} = \Psi \circ \mathbf{r}$.

7.3. Theorema egregium

A továbbiakban is az M elemi felületet vizsgáljuk, amelyet az $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvény ír le.

Az előző alfejezetben azt kaptuk, hogy egy elemi felület első és második főmennyiségei között fennállnak a (7.5), (7.6) összefüggések. Ezek alapján fedezte fel Gauss a szorzatgörbületre vonatkozóan az alábbiakban közölt tételt. Mivel ezt a felületelmélet egyik legfontosabb eredményének tartotta, a latin *Theorema egregium* elnevezéssel illette, ami magyarra fordítva *kiemelkedő tételt* jelent.

A (7.5) Gauss-egyenlet bal oldalán szereplő kifejezéssel a D paramétertartományon definiáljuk az

$$R_{kji}^s = \partial_k \Gamma_{ij}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s + \sum_{a=1}^2 (\Gamma_{ij}^a \Gamma_{ak}^s - \Gamma_{ik}^a \Gamma_{aj}^s)$$

differenciálható függvényeket ($i, j, k, s = 1, 2$). Ily módon a Gauss-egyenlet felírható a tömörebb

$$R_{kji}^s = \sum_{a=1}^2 h^{sa} (b_{ij} b_{ak} - b_{ik} b_{aj}), \quad (7.7)$$

alakban. Ezeken kívül a $D \subset \mathbb{R}^2$ tartományon értelmezzük még az

$$R_{kjil} = \sum_{s=1}^2 R_{kji}^s g_{sl}$$

valós függvényeket.

Fontos itt megjegyeznünk, hogy a 7.3. Állítás következtében a fent definiált R_{kji}^l , R_{kjil} ($i, j, k, l = 1, 2$) valós függvényeket, melyek a D paramétertartományon vannak értelmezve, ki lehet számítani az első főmennyiségekből felhasználva azok első- és másodrendű parciális deriváltjait is.

Ennyi előkészítés után már képesek vagyunk a következő tétel, a *Theorema egregium* bizonyítására.

7.6. Tétel $A K : D \rightarrow \mathbb{R}$ szorzatgörbület-függvényt az \mathbf{r} paraméterezéshez tartozó g_{ij} ($i, j = 1, 2$) első főmennyiségek egyértelműen meghatározzák.

Bizonyítás. A (7.7) összefüggés mindkét oldalát szorozzuk meg a g_{sl} függvénnyel, majd tekintsük az $s = 1$ és $s = 2$ értékeknek megfelelő egyenletek összegét. Ezáltal az

$$R_{kjil} = \sum_{s=1}^2 \sum_{a=1}^2 g_{sl} h^{sa} (b_{ij} b_{ak} - b_{ik} b_{aj})$$

egyenlőséghez jutunk. Mivel fennáll $\sum_{s=1}^2 g_{sl} h^{sa} = \delta_l^a$, ebből az

$$R_{kjil} = b_{ij} b_{lk} - b_{ik} b_{lj} \quad (7.8)$$

($i, j, k, l = 1, 2$) összefüggések adódnak.

Mint ismeretes, a K függvényre fennáll a $K = \frac{b_{11} b_{22} - (b_{12})^2}{g_{11} g_{22} - (g_{12})^2}$ összefüggés. A $k = 1, j = 2, i = 2, l = 1$ indexértékek alkalmazásával a (7.8) egyenletből az

$$R_{1221} = b_{22} b_{11} - (b_{12})^2$$

egyenlőség adódik. Ennek következtében

$$K = \frac{R_{1221}}{g_{11} g_{22} - (g_{12})^2} \quad (7.9)$$

teljesül. Mivel az $R_{1221} : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az első főmennyiségek ismeretében már meghatározható, a (7.9) egyenlet igazolja a tételt. \square

A Theorema egregium egy következménye

Az 5.5. alfejezetben tárgyaltuk az elemi felületek közötti izometriákat. A következő tétel két felület közötti izometria létezésére ad egy szükséges feltételt. Emlékezzünk rá, hogy a felület szorzatgörbülete nem függ a paraméterezés megválasztásától.

7.7. Tétel *Legyenek M és \hat{M} olyan elemi felületek, hogy megadható köztük egy $\mu : M \rightarrow \hat{M}$ izometria. Ekkor a μ izometria által egymásnak megfeleltetett pontokban a felületek Gauss-görbületei megegyeznek.*

Bizonyítás. Tekintsük az M elemi felület egyik $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméteres előállítását. Mint ismeretes, mivel a μ izometria egy reguláris bijektív leképezés az M felületről a \hat{M} felületre, az $\tilde{\mathbf{r}} = \mu \circ \mathbf{r}$ függvény az \hat{M} -nek egy paraméterezése. Amennyiben a felületek ezen \mathbf{r} és $\tilde{\mathbf{r}}$ paraméterezéseit alkalmazzuk, akkor tetszőleges $(u_1, u_2) \in D$ esetén μ az $\mathbf{r}(u_1, u_2) \in M$ pontot az $\tilde{\mathbf{r}}(u_1, u_2) \in \hat{M}$ pontba képezi. Az \mathbf{r} és $\tilde{\mathbf{r}}$ paraméteres előállításokra nézve az M és \hat{M} felületek Gauss-görbületét írják le a $K, \tilde{K} : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvények.

Az 5.29. Tétel szerint az \mathbf{r} és $\tilde{\mathbf{r}}$ paraméterezéseknek megfelelő első főmennyiségekre $g_{ij} = \tilde{g}_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) teljesül. Mivel a Theorema egregium szerint a szorzatgörbület-függvény kifejezhető az első főmennyiségekből a (7.9) egyenlettel, a K és \tilde{K} függvények azonosak. \square

Ismeretes, hogy amennyiben az M elemi felület azonos valamely a ($a > 0$) sugarú gömbfelület egy darabjával, akkor az M összes pontjában a Gauss-görbület értéke $\frac{1}{a^2}$.

Ha az M elemi felület valamely \mathbb{R}^3 -beli síknak egy darabja, akkor a Gauss-görbület értéke az összes pontban 0.

Az alábbi kijelentést a 7.7. Tétel egyik alkalmazásának lehet tekinteni.

7.8. Következmény *Legyen S az \mathbb{R}^3 euklideszi térnek egy a sugarú gömbfelülete ($a > 0$). Az S szféra bármely elemi felületet képező darabját vesszük, azt egy síkbeli tartományra nem lehet izometrikusan leképezni.*

8. fejezet

A sima felületek geodetikus görbéi

8.1. Az ívhossz szerinti stacionárius görbék

Ebben a fejezetben főként azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy a felület két adott pontját összekötő felületi görbék közül miként lehet kiválasztani a minimális ívhosszúságút. Ez esetben is alkalmazni fogjuk a korábban már bevezetett fogalmakat és jelöléseket.

Amennyiben vesszük az \mathbb{R}^2 sík valamely $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ és $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ elemeit, akkor megállapodás szerint (\mathbf{u}, \mathbf{x}) jelölje az \mathbb{R}^4 tér (u_1, u_2, x_1, x_2) pontját.

Legyen adott egy $M \subset \mathbb{R}^3$ sima elemi felület, amelyet a $D \subset \mathbb{R}^2$ nyílt tartományon értelmezett $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvény ír le. Rögzítsük az M -nek ezen \mathbf{r} paraméteres előállítását. Az \mathbf{r} paraméterezéshez tartozó g_{ij} ($i = 1, 2$) első főmennyiségek felhasználásával vezessük be azt az $F : D \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényt, amelyre fennáll

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij}(u_1, u_2) \cdot x_i \cdot x_j} \quad (8.1)$$

bármely $\mathbf{u} \in D$ és $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ esetén. Látható, hogy ez a 4-változós F függvény az \mathbb{R}^4 -beli $D \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\})$ nyílt halmaz felett differenciálható.

A D paramétertartományban tekintsünk egy $\mathbf{y} : [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ reguláris sima görbét. Az \mathbf{y} leképezés koordináta-függvényei legyenek $y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

A $\gamma = \mathbf{r} \circ \mathbf{y}$ felületi görbe végpontjai legyenek $\mathbf{p} = \gamma(a)$ és $\mathbf{q} = \gamma(b)$. Világos, hogy (5.5) következtében a γ görbe ívhosszára teljesül

$$l(\gamma) = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij}(\mathbf{y}(t)) y'_i(t) y'_j(t) \right)^{1/2} dt = \int_a^b F(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t)) dt . \quad (8.2)$$

Az alábbiak során egy szükséges (de nem elégséges) feltételt adunk arra vonatkozóan, hogy a \mathbf{p}, \mathbf{q} pontokat összekötő felületi görbék között a γ minimális ívhosszúságú legyen.

Vegyünk egy olyan C^∞ -osztályú $\boldsymbol{\eta} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezést, amelyre igaz $\boldsymbol{\eta}(a) = \mathbf{0}$ és $\boldsymbol{\eta}(b) = \mathbf{0}$. Nyilván rögzíteni lehet egy olyan ε pozitív számot, hogy tetszőleges $t \in [a, b]$ és $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ esetén az $\mathbf{y}(t) + \tau \boldsymbol{\eta}(t)$ pont eleme a D tartománynak. Tekintsük azt a $\mathbf{z} : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow D$ differenciálható vektorfüggvényt, amelyet a

$$\mathbf{z}(t, \tau) = \mathbf{y}(t) + \tau \boldsymbol{\eta}(t) \quad (8.3)$$

egyenlet ír le.

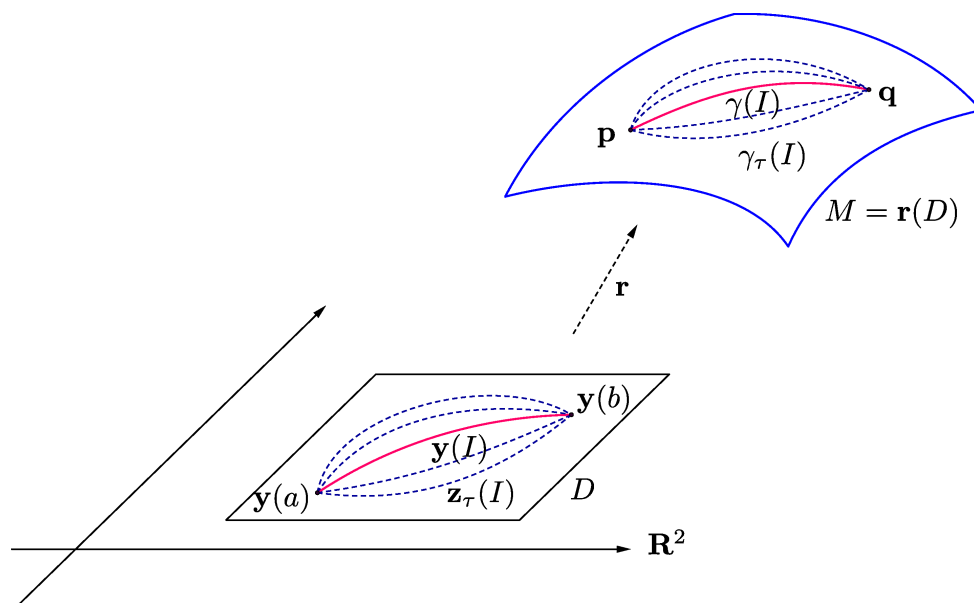
8.1. Definíció A (8.3) összefüggéssel értelmezett $\mathbf{z} : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow D$ leképezést a D paramétertartományban vett \mathbf{y} görbe $\boldsymbol{\eta}$ szerinti variációjának mondjuk.

Rögzített $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ érték esetén a $\mathbf{z}_\tau(t) = \mathbf{y}(t) + \tau \boldsymbol{\eta}(t)$ ($a \leq t \leq b$) egyenlőséggel meghatározott $\mathbf{z}_\tau : [a, b] \rightarrow D$ görbét \mathbf{y} egyik variációs görbéjének nevezzük.

Megjegyzés Az $\boldsymbol{\eta}$ vektorfüggvényre megadott feltétel miatt bármely \mathbf{z}_τ ($-\varepsilon < \tau < \varepsilon$) variációs görbére fennáll $\mathbf{z}_\tau(a) = \mathbf{y}(a)$ és $\mathbf{z}_\tau(b) = \mathbf{y}(b)$. Ezért szokás azt mondani, hogy a \mathbf{z} variáció (vagy más szóval deformáció) fixen hagyja az \mathbf{y} görbe végpontjait.

Az nyilvánvaló, hogy a \mathbf{z}_τ variációs görbe sebességvektorára teljesül $\mathbf{z}'_\tau(t) = \mathbf{y}'(t) + \tau \boldsymbol{\eta}'(t)$ bármely $t \in [a, b]$ esetén.

A (8.3) variációt felhasználva tekintsük a \mathbf{p} , \mathbf{q} pontokat összekötő $\gamma_\tau = \mathbf{r} \circ \mathbf{z}_\tau$ ($-\varepsilon < \tau < \varepsilon$) felületi görbéket. (Lásd a 8.1. ábrát.) Világos, hogy fennáll $\gamma_0 = \gamma$.



8.1. ábra. Az \mathbf{y} és a $\gamma = \mathbf{r} \circ \mathbf{y}$ görbék variációja rögzített végpontokkal ($I = [a, b]$).

Legyen $h_{\boldsymbol{\eta}} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ az a függvény, ahol a $h_{\boldsymbol{\eta}}(\tau)$ függvényérték megegyezik a $\boldsymbol{\gamma}_{\tau}$ felületi görbe ívhosszával ($-\varepsilon < \tau < \varepsilon$). A (8.2) formula következtében a

$$h_{\boldsymbol{\eta}}(\tau) = \int_a^b F(\mathbf{y}(t) + \tau \boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{y}'(t) + \tau \boldsymbol{\eta}'(t)) dt \quad (8.4)$$

kifejezéshez jutunk.

Nyilvánvaló, hogy amennyiben a \mathbf{p} és \mathbf{q} pontokat összekötő felületi görbék között nincs olyan, amelynek az ívhossza kisebb a $\boldsymbol{\gamma}$ ívhosszánál, akkor $h'_{\boldsymbol{\eta}}(0) = 0$ teljesül. Ez indokolja az alábbi fogalom bevezetését.

8.2. Definíció A $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{r} \circ \mathbf{y}$ görbét az M felület stacionárius görbéjének nevezzük az ívhosszra nézve, ha bármely olyan $\boldsymbol{\eta} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ differenciálható leképezésnél, ahol $\boldsymbol{\eta}(a) = \mathbf{0}$ és $\boldsymbol{\eta}(b) = \mathbf{0}$, fennáll a $h'_{\boldsymbol{\eta}}(0) = 0$ összefüggés.

Vegyük az $f_k(t) = \partial_{2+k}F(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t))$ egyenlettel meghatározott $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényt ($k = 1, 2$). Tradicionális okokból a következő tétel megfogalmazásánál az f_k függvény $t \in [a, b]$ helyen vett $f'_k(t)$ deriváltjára a $\frac{d}{dt}(\partial_{2+k}F(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t)))$ jelölést alkalmazzuk. A stacionárius felületi görbéket az alábbi tétel jellemzi.

8.3. Tétel A $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{r} \circ \mathbf{y} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe az M elemi felületnek egy stacionárius görbéje akkor és csak akkor, ha bármely $t \in [a, b]$ esetén teljesülnek a

$$\partial_k F(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t)) - \frac{d}{dt}(\partial_{2+k}F(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t))) = 0 \quad (8.5)$$

($k = 1, 2$) összefüggések.

Bizonyítás. Vegyük a D paramétertartományban az \mathbf{y} görbének egy $\boldsymbol{\eta} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezés szerinti \mathbf{z} variációját. Az $\boldsymbol{\eta}$ komponens-függvényei legyenek η_1 és η_2 .

A $\boldsymbol{\gamma}_{\tau} = \mathbf{r} \circ \mathbf{z}_{\tau}$ ($\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$) felületi görbék ívhosszát mérő és a (8.4) egyenlettel leírt $h_{\boldsymbol{\eta}}$ függvény 0-beli deriváltjára (1.9) alapján fennáll

$$h'_{\boldsymbol{\eta}}(0) = \sum_{k=1}^2 \int_a^b (\partial_k F(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t)) \cdot \eta_k(t) + \partial_{2+k}F(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t)) \cdot \eta'_k(t)) dt. \quad (8.6)$$

A parciális integrálás szabálya szerint

$$\begin{aligned} \int_a^b \partial_{2+k}F(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t)) \cdot \eta'_k(t) dt &= [\partial_{2+k}F(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t)) \cdot \eta_k(t)]_a^b \\ &\quad - \int_a^b \frac{d}{dt}(\partial_{2+k}F(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t))) \cdot \eta_k(t) dt \end{aligned}$$

teljesül. Mivel a fenti egyenlet jobb oldalán szereplő első tag eltűnik, (8.6) következtében a

$$h'_{\boldsymbol{\eta}}(0) = \sum_{k=1}^2 \int_a^b \left\{ \partial_k F(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t)) - \frac{d}{dt} (\partial_{2+k} F(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t))) \right\} \cdot \eta_k(t) dt \quad (8.7)$$

összefüggéshez jutunk. Világos, hogy a (8.7) egyenlőségben szereplő integrál értéke csak akkor lesz 0 bármely $\boldsymbol{\eta}$ leképezés esetén, ha teljesül (8.5). Ezzel a tétel igazolást nyert. \square

Megjegyzés A variációszámítás elméletében a stacionárius helyeket meghatározó (8.5) egyenleteket az Euler-Lagrange-féle differenciálegyenlet-rendszernek szokás nevezni.

A továbbiakban az $[a, b]$ intervallumon definiált $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{r} \circ \mathbf{y}$ felületi görbéről feltesszük, hogy ívhossz szerint van paraméterezve. Eszerint bármely $t \in [a, b]$ helyen igaz

$$F(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t)) = 1. \quad (8.8)$$

Ezt felhasználva kimondhatjuk az alábbi tételt, amely választ ad arra a kérdésre, hogy a $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{r} \circ \mathbf{y}$ görbe mikor stacionárius.

8.4. Tétel *Az ívhossz szerint paraméterezett $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{r} \circ \mathbf{y}$ görbe az M elemi felületnek egy stacionárius görbéje akkor és csak akkor, ha tetszőleges $t \in [a, b]$ esetén fennállnak az*

$$y_i''(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^l(\mathbf{y}(t)) \cdot y_i'(t) \cdot y_j'(t) = 0 \quad (8.9)$$

($l = 1, 2$) összefüggések.

Bizonyítás. A fenti kijelentés igazolásához a 8.3. Tételt alkalmazzuk. Figyelembe véve a (8.8) egyenlőséget közvetlen számolással nyerjük a

$$\begin{aligned} \partial_k F(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t)) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \partial_k g_{ij}(\mathbf{y}(t)) \cdot y_i'(t) \cdot y_j'(t), \\ \partial_{2+k} F(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t)) &= \sum_{i=1}^2 g_{ik}(\mathbf{y}(t)) \cdot y_i'(t), \\ \frac{d}{dt} (\partial_{2+k} F(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t))) &= \sum_{i=1}^2 g_{ik}(\mathbf{y}(t)) \cdot y_i''(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \partial_j g_{ik}(\mathbf{y}(t)) \cdot y_i'(t) \cdot y_j'(t) \end{aligned}$$

egyenleteket a $k = 1$ és $k = 2$ indexekre. Vegyük észre, hogy fennáll

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \partial_j g_{ik}(\mathbf{y}(t)) \cdot y_i'(t) \cdot y_j'(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\partial_i g_{jk}(\mathbf{y}(t)) + \partial_j g_{ki}(\mathbf{y}(t))) \cdot y_i'(t) \cdot y_j'(t)$$

Ily módon a (8.5) egyenletek alapján azt kapjuk, hogy γ pontosan akkor lesz stacionárius görbéje az M felületnek, ha teljesülnek a

$$\sum_{i=1}^2 g_{ik}(\mathbf{y}(t)) \cdot y_i''(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk}(\mathbf{y}(t)) + \partial_j g_{ki}(\mathbf{y}(t)) - \partial_k g_{ij}(\mathbf{y}(t))) \cdot y_i'(t) \cdot y_j'(t) = 0$$

($k = 1, 2$) összefüggések. Emlékezzünk rá, hogy a 2×2 -es $\mathbf{G}(\mathbf{y}(t))$ mátrix inverzének az elemeit a $h^{lk}(\mathbf{y}(t))$ számok képezik. Szorozzuk meg a fenti egyenleteket a $h^{kl}(\mathbf{y}(t))$ számokkal, majd az így nyert két egyenletnek, melyek a $k = 1, 2$ indexértékeknek felelnek meg, vegyük az összegét. Ezáltal a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 h^{lk}(\mathbf{y}(t)) g_{ik}(\mathbf{y}(t)) \cdot y_i''(t) + \\ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^2 h^{lk}(\mathbf{y}(t)) (\partial_i g_{jk}(\mathbf{y}(t)) + \partial_j g_{ki}(\mathbf{y}(t)) - \partial_k g_{ij}(\mathbf{y}(t))) \right) \cdot y_i'(t) \cdot y_j'(t) = 0 \end{aligned}$$

($l = 1, 2$) összefüggéseket kapjuk. Amennyiben alkalmazzuk a Christoffel-szimbólumokra vonatkozó (7.2) formulát, akkor ezekből a (8.9) egyenleteket nyerjük. \square

Megjegyzés Áttekintve az előbbi bizonyítást azt a fontos észrevételt tehetjük, hogy a 8.4. Tétel igaz marad az alábbi formában is.

Legyen $\gamma = \mathbf{r} \circ \mathbf{y}$ olyan reguláris felületi görbe, amelynek sebessége konstans, vagyis a $\|\gamma'\|$ függvény állandó. Ez esetben γ stacionárius görbe akkor és csak akkor, ha \mathbf{y} koordináta-függvényeire teljesülnek a (8.9) egyenletek.

Megjegyzés A következő alfejezetben majd belátjuk, hogy amennyiben fennállnak a (8.9) összefüggések, akkor a $\gamma = \mathbf{r} \circ \mathbf{y}$ felületi görbe sebessége állandó.

Megjegyzés A stacionárius görbe fogalmát természetesen ki lehet terjeszteni arra az esetre is, amikor a felületi görbe egy I nyílt intervallumon van értelmezve. Egy $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ felületi görbét akkor mondunk stacionáriusnak az ívhosszra nézve, ha bármely $a, b \in I$ ($a < b$) számok mellett a $\gamma|_{[a,b]}$ görbe stacionárius.

8.2. Párhuzamos vektormezők egy felületi görbe mentén

Továbbra is abból a feltevésből indulunk ki, hogy adva van egy M elemi felület és annak egy $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezése.

A D paramétertartományban vegyünk egy $\sigma : I \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ sima görbét. Legyen adott egy C^∞ -osztályú $\mathbf{Z} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés, amelyet úgy tekintünk, mint egy sima vektormezőt a $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$ felületi görbe mentén. A \mathbf{Z} vektormezőről azt mondjuk, hogy érintőleges (vagy más szóval tangenciális) az M felülethez, ha bármely $t \in I$ -re fennáll $\mathbf{Z}(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

8.5. Definíció A $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$ felületi görbe mentén legyen adott egy \mathbf{Z} vektormező, amely érintőleges az M elemi felülethez. A \mathbf{Z} -t párhuzamosnak mondjuk, ha tetszőleges $t \in I$ esetén fennáll

$$\mathbf{Z}'(t) - \langle \mathbf{Z}'(t), \mathbf{N}(\sigma(t)) \rangle \cdot \mathbf{N}(\sigma(t)) = \mathbf{0}. \quad (8.10)$$

Megjegyzés A fenti definícióban szereplő (8.10) egyenletből azonnal adódik, hogy a γ -menti \mathbf{Z} érintőleges vektormező akkor és csak akkor párhuzamos, ha bármely $t \in I$ mellett a $\mathbf{Z}'(t)$, $\mathbf{N}(\sigma(t))$ vektorok lineárisan összefüggőek.

Megjegyzés Tekintsük a γ -nak egy φ függvénnyel meghatározott $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ átparameterezését. Amennyiben a γ -menti \mathbf{Z} érintőleges vektormező párhuzamos, akkor a $\tilde{\gamma}$ mentén vett $\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z} \circ \varphi$ vektormező is párhuzamos.

8.6. Állítás Legyenek $\mathbf{Y} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ és $\mathbf{Z} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ érintőleges vektormezők a $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$ felületi görbe mentén. Ha \mathbf{Y} és \mathbf{Z} párhuzamos mezők, akkor az $f(t) = \langle \mathbf{Y}(t), \mathbf{Z}(t) \rangle$ formulával értelmezett $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény állandó.

Bizonyítás. Legyenek az \mathbf{Y} és \mathbf{Z} tangenciális mezők párhuzamosak. Ekkor bármely $t \in I$ esetén az $\mathbf{Y}'(t)$ és $\mathbf{Z}'(t)$ vektorok merőlegesek a $T_{\gamma(t)}M$ érintőtérre. Ennek következtében fennáll

$$f'(t) = \langle \mathbf{Y}'(t), \mathbf{Z}(t) \rangle + \langle \mathbf{Y}(t), \mathbf{Z}'(t) \rangle = 0,$$

tehát az f függvény valóban konstans. □

Az előbbi állítás szerint igaz az alábbi kijelentés.

8.7. Következmény Ha a γ felületi görbe mentén vett \mathbf{Z} érintőleges vektormező párhuzamos, akkor a $\|\mathbf{Z}\|$ valós függvény konstans.

Legyen a $\mathbf{Z} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés egy az M felülethez érintőleges vektormező a $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$ felületi görbe mentén. Tetszőleges $t \in I$ esetén a $\mathbf{Z}(t)$ vektor egyértelműen fejezhető ki a $T_{\gamma(t)}M$ érintőtér $\partial_1 \mathbf{r}(\sigma(t))$, $\partial_2 \mathbf{r}(\sigma(t))$ bázisvektorokkal a

$$\mathbf{Z}(t) = \sum_{i=1}^2 \zeta_i(t) \cdot \partial_i \mathbf{r} \circ \sigma(t) \quad (8.11)$$

formában. Rendeljük hozzá \mathbf{Z} -hez a fenti egyenlettel meghatározott $\zeta_1, \zeta_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekről könnyen be lehet látni, hogy differenciálhatóak.

8.8. Állítás A (8.11) egyenlettel leírt \mathbf{Z} vektormező párhuzamos γ mentén akkor és csak akkor, ha bármely $t \in I$ helyen a Christoffel-szimbólumokkal teljesülnek a

$$\zeta_l'(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^l(\sigma(t)) \cdot \zeta_i(t) \cdot \sigma_j'(t) = 0 \quad (8.12)$$

($l = 1, 2$) összefüggések.

Bizonyítás. A \mathbf{Z} leképezés deriváltjára nyilván fennáll

$$\mathbf{Z}'(t) = \sum_{i=1}^2 \zeta'_i(t) \cdot \partial_i \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\sigma}(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \zeta_i(t) \cdot \sigma'_j(t) \cdot \partial_{i,j} \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\sigma}(t).$$

Innen a (7.1) derivációs formula alapján azt kapjuk, hogy igaz a

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}'(t) = & \sum_{l=1}^2 (\zeta'_l(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^l(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \zeta_i(t) \cdot \sigma'_j(t)) \partial_l \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \\ & + (\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \zeta_i(t) \cdot \sigma'_j(t)) \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \end{aligned} \quad (8.13)$$

egyenlőség tetszőleges $t \in I$ -re. A $\mathbf{Z}'(t)$ vektor akkor lesz párhuzamos az $\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}(t))$ vektorral, ha a (8.13) egyenlőség jobb oldalán szereplő első két tag eltűnik. Ily módon a \mathbf{Z} mező pontosan akkor párhuzamos $\boldsymbol{\gamma}$ mentén, ha a teljesülnek a (8.12) egyenletek. \square

Vegyünk egy $\boldsymbol{\sigma} : I \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ sima görbét és a $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{r} \circ \boldsymbol{\sigma}$ felületi görbét. A $\boldsymbol{\gamma}$ metén vett párhuzamos vektormezőkre vonatkozóan igaz az alábbi tétel.

8.9. Tétel *Tekintsünk egy $t_0 \in I$ paraméterértéket és a $T_{\boldsymbol{\gamma}(t_0)}M$ érintőtérben válasszunk ki egy \mathbf{w} érintővektort. A $\boldsymbol{\gamma}$ görbe mentén pontosan egy olyan \mathbf{Z} párhuzamos érintőleges vektormező van, amelyre fennáll $\mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{w}$.*

Bizonyítás. Fejezzük ki a \mathbf{w} érintővektort a $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^2 w_i \partial_i \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}(t_0))$ alakban. A (8.12) egyenleteket tekintsük úgy, mint a ζ_1, ζ_2 függvényekre felírt lineáris differenciálegyenlet-rendszert a $\zeta_l(t_0) = w_l$ ($l = 1, 2$) kezdeti feltételekkel. Ismeretes, hogy ennek egyértelműen létezik megoldása az I intervallumon, ami már igazolja tételünket. \square

8.3. A geodetikus görbék jellemzése

Ebben az alfejezetben mindvégig feltesszük, hogy adva van egy M elemi felület és annak egy $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezése.

8.10. Definíció *Legyen adott egy $\boldsymbol{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sima felületi görbe. A $\boldsymbol{\gamma}$ görbét az M felület geodetikus görbéjének mondjuk, ha a $\boldsymbol{\gamma}' : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés egy olyan érintőleges vektormezőt ad $\boldsymbol{\gamma}$ mentén, amely párhuzamos.*

Megjegyzés A 8.7. Következésményből adódik, hogy amennyiben a $\boldsymbol{\gamma}$ felületi görbe geodetikus, akkor a $v = \|\boldsymbol{\gamma}'\|$ sebességfüggvény konstans.

Vegyünk a D paramétertartományban egy $\mathbf{y} : I \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ sima görbét, továbbá a $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{r} \circ \mathbf{y}$ felületi görbét. A legutóbbi definíció és a (8.10) egyenlet alapján könnyű belátni, hogy igaz az alábbi kijelentés.

8.11. Állítás *A $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{r} \circ \mathbf{y}$ felületi görbe akkor és csak akkor geodetikus, ha bármely $t \in I$ mellett a $\boldsymbol{\gamma}''(t)$, $\mathbf{N}(\mathbf{y}(t))$ vektorok lineárisan összefüggők.*

Megjegyzés Ha a γ felületi görbe sebességfüggvénye állandó és γ pályája egy egyenesre esik, akkor $\gamma'' = \mathbf{0}$ egyenlőség következtében γ egy geodetikus görbe.

Megjegyzés Rögzített $a > 0$ szám mellett tekintsük azt az $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyet az $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - a^2$ összefüggés ír le. Ekkor az $M = f^{-1}(0)$ sima felület megegyezik az a sugarú és z tengelyű körhengerrel. Ennek tetszőleges $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ pontjában a $\text{grad } f(\mathbf{p}) = 2(p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2)$ vektor adja meg a $T_{\mathbf{p}}M$ érintőtérre merőleges irányt.

A hengeres csavarvonal fogalmát már a 2.3. Példában megadtuk. A 8.11. Állítás alapján könnyű belátni, hogy a körhengerre eső összes csavarvonal geodetikus görbe. Ebből már adódik, hogy amennyiben a felület \mathbf{p}, \mathbf{q} pontjai nem egymás tükörképei a z tengelyre nézve, akkor végtelen sok (páronként különböző pályával bíró) geodetikus szegmens van a körhengeren, amelyek éppen a \mathbf{p}, \mathbf{q} pontokat kötik össze.

Megjegyzés A 6.3. alfejezetben részletesen tárgyaltuk a forgásfelületeket. Vegyük most a (6.22) egyenlettel meghatározott \mathbf{r} vektorfüggvényt és az általa leírt forgásfelületet. Tekintsük a tárgyalás során kapott összefüggéseket. Ezek alapján könnyű belátni, hogy tetszőleges $(u, v) \in D$ helyen fennáll a

$$\partial_{1,1}\mathbf{r}(u, v) \times \mathbf{N}(u, v) = \mathbf{0}$$

egyenlőség, amiből következik, hogy a $\partial_{1,1}\mathbf{r}(u, v)$ és $\mathbf{N}(u, v)$ vektorok párhuzamosak. Eszerint az \mathbf{r} paraméteres előállítás első paramétervonalai (az úgynevezett meridián görbék) a forgásfelületnek geodetikus görbéi.

Vegyünk ismét egy $\mathbf{y} : I \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ sima görbét D -ben. Ekkor a $\gamma = \mathbf{r} \circ \mathbf{y}$ felületi görbe deriváltjára fennáll $\gamma'(t) = \sum_{i=1}^2 y'_i(t) \cdot \partial_i \mathbf{r}(\mathbf{y}(t))$. Ily módon a 8.8. Állításból már adódik az alábbi tétel.

8.12. Tétel *A $\gamma = \mathbf{r} \circ \mathbf{y}$ görbe az M elemi felületnek egy geodetikus görbéje akkor és csak akkor, ha a koordináta-függvényeire tetszőleges $t \in I$ esetén fennállnak az*

$$y''_l(t) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^l(\mathbf{y}(t)) \cdot y'_i(t) \cdot y'_j(t) = 0$$

($l = 1, 2$) összefüggések.

A 8.4. és 8.12. Tételekből következik, hogy az M felület stacionárius és geodetikus görbéivel kapcsolatban az alábbi kijelentést tehetjük.

8.13. Következmény *A D paramétertartományban legyen adott egy $\mathbf{y} : I \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ reguláris görbe. A $\gamma = \mathbf{r} \circ \mathbf{y}$ felületi görbe egy stacionárius görbéje az M felületnek akkor és csak akkor, ha γ ívhossznak megfelelő átparaméterezése egy geodetikus görbe.*

A következő eredmény azt mondja ki, hogy egy felületi pontból tetszőleges érintőirányban kiindul egy geodetikus.

8.14. Tétel Az $M = \mathbf{r}(D)$ felület egy $\mathbf{p} = \mathbf{r}(a_1, a_2)$ pontjában legyen adott egy \mathbf{w} érintővektor. Egyértelműen létezik olyan I ($0 \in I$) maximális nyílt intervallum és azon olyan $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ geodetikus felületi görbe, amelyre fennáll $\gamma(0) = \mathbf{p}$, $\gamma'(0) = \mathbf{w}$.

Bizonyítás. Vegyük a \mathbf{w} érintővektor $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^2 w_i \cdot \partial_i \mathbf{r}(a_1, a_2)$ kifejezésében szereplő w_1, w_2 együtthatókat. Tekintsük a $z_1, z_2, z_3, z_4 : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre felírt

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_3(t), & z_2'(t) &= z_4(t), \\ z_3'(t) &= -\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^1(z_1(t), z_2(t)) \cdot z_{2+i}(t) \cdot z_{2+j}(t), \\ z_4'(t) &= -\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij}^2(z_1(t), z_2(t)) \cdot z_{2+i}(t) \cdot z_{2+j}(t) \end{aligned}$$

elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert a

$$z_1(0) = a_1, \quad z_2(0) = a_2, \quad z_3(0) = w_1, \quad z_4(0) = w_2$$

kezdeti feltételekkel. A differenciálegyenlet-rendszerek elméletéből ismeretes, hogy ennek a problémának egyértelműen létezik ún. maximális megoldása. A maximális megoldáson természetesen azt értjük, hogy a megoldó függvények I intervalluma tovább már nem bővíthető.

Vegyük a paramétertartományban egy $\mathbf{y} : I \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ sima görbét, amelynél $0 \in I$. Alkalmazzuk a 8.12. Tételt. Eszerint a $\gamma = \mathbf{r} \circ \mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ felületi görbe geodetikus és a 0 helyen teljesül rá $\gamma(0) = \mathbf{p}$, $\gamma'(0) = \mathbf{w}$ akkor és csak akkor, ha az $y_1, y_2, y_1', y_2' : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény-négyes megoldását képezi a fenti differenciálegyenlet-rendszernek a megadott kezdeti feltételekkel. Innen már adódik, hogy igaz a kimondott tétel. \square

Megjegyzés Az általában nem igaz, hogy egy elemi felület bármely két pontja összeköthető egy geodetikus görbével. Példaként vehetjük erre a kilyukasztott síkot, mint elemi felületet. Azonban igaz az alábbi kijelentés, amelyet most bizonyítás nélkül közlünk.

Legyen az M sima felület egy összefüggő zárt alakzat \mathbb{R}^3 -ban. Ekkor M bármely két pontjához létezik olyan felületi összekötő görbe, amely geodetikus és amely a legrövidebb a két pontot összekötő felületi görbék között.

Emlékezzünk rá, hogy egy alakzat akkor zárt \mathbb{R}^3 -ban, ha tartalmazza az összes torlódási pontját.

A felületi görbe geodetikus görbülete

Legyen adott az M felületen egy $\gamma = \mathbf{r} \circ \mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ stacionárius görbe. Mint ismeretes, ha ezt átparaméterezzük oly módon, hogy a $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ görbe sebessége konstans legyen, akkor a $\tilde{\gamma}$ felületi görbe egy geodetikus. Tekintsük a γ -hoz tartozó $\mathbf{T} = \frac{1}{\|\gamma'\|} \gamma'$

érintő egységvektormezőt. Az eddigi eredményeinkből már adódik, hogy ekkor \mathbf{T} egy párhuzamos vektormező γ mentén.

A 2.11. és 8.5. Definíciók indokolják a geodetikus görbület fogalmának alábbi bevezetését.

8.15. Definíció Tekintsünk a D tartományban egy $\sigma : I \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ reguláris görbét. Vegyük a $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$ felületi görbe $\mathbf{T} = \frac{1}{\|\gamma'\|} \gamma'$ érintő egységvektormezőjét. A $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$ felületi görbe $t \in I$ pontbeli geodetikus görbületén a

$$\kappa_g(t) = \frac{1}{v(t)} \|\mathbf{T}'(t) - \langle \mathbf{T}'(t), \mathbf{N}(\sigma(t)) \rangle \cdot \mathbf{N}(\sigma(t))\| \quad (8.14)$$

számot értjük.

A fenti definíció szerint vehetjük a γ felületi görbe pontjaiban a geodetikus görbületet leíró $\kappa_g : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényt.

Amennyiben a γ leképezést átparaméterezzük egy φ függvénnyel, akkor közvetlen számolással adódik, hogy a $\tilde{\gamma} = \mathbf{r} \circ \sigma \circ \varphi$ görbe geodetikus görbületét a $\tilde{\kappa}_g = \kappa_g \circ \varphi$ függvény írja le.

A geodetikus görbület értékét ki lehet számítani a felületi görbe első két deriváltjából az alábbi (8.15) formula alapján.

8.16. Állítás Az \mathbf{r} paraméterezéssel megadott M elemi felületnek vegyük egy $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris felületi görbéjét. A γ geodetikus görbületére tetszőleges $t \in I$ helyen fennáll

$$\kappa_g(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} |\langle \gamma'(t) \times \gamma''(t), \mathbf{N}(\sigma(t)) \rangle|. \quad (8.15)$$

Bizonyítás. Vezessük be az

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{T}'(t) - \langle \mathbf{T}'(t), \mathbf{N}(\sigma(t)) \rangle \cdot \mathbf{N}(\sigma(t))$$

jelölést. Vegyük észre, hogy az $\mathbf{L}(t)$ vektor merőleges a $\mathbf{T}(t)$ és $\mathbf{N}(\sigma(t))$ ortogonális egységvektorokra. Ennek következtében az $\mathbf{L}(t)$ vektor normája megegyezik a három vektor vegyes szorzatának az abszolút értékével. Ily módon (8.14) alapján teljesül

$$\kappa_g(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} |\langle \mathbf{T}(t) \times \mathbf{L}(t), \mathbf{N}(\sigma(t)) \rangle|.$$

Korábban is kihasználtuk már, hogy igaz a $\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{v(t)} \gamma''(t) - \frac{v'(t)}{v(t)^2} \gamma'(t)$ egyenlőség, amelyben v most a γ sebességfüggvényét jelöli. Ez alapján már könnyű belátni, hogy fennáll

$$\mathbf{T}(t) \times \mathbf{L}(t) = \frac{1}{v(t)^2} \gamma'(t) \times \gamma''(t) - \langle \mathbf{T}'(t), \mathbf{N}(\sigma(t)) \rangle \cdot (\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(\sigma(t))).$$

A fenti két összefüggésből pedig már adódik, hogy (8.15) teljesül. \square

A 8.16. Állításból már következik, hogy a γ reguláris görbe geodetikus görbülete pontosan akkor tűnik el, ha bármely $t \in I$ helyen a $\gamma''(t)$ vektor előáll a $\gamma'(t)$, $\mathbf{N}(\sigma(t))$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ily módon korábbi eredményeink alapján már könnyen igazolható az alábbi kijelentés.

8.17. Állítás *A $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$ görbe az M felületnek egy stacionárius görbéje akkor és csak akkor, ha fennáll $\kappa_g = 0$.*

Tekintsünk egy $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ reguláris felületi görbét. Rögzítsünk egy $t_0 \in I$ paraméterértéket. A γ görbét merőlegesen vetítsük rá az M elemi felület $\gamma(t_0)$ pontbeli érintősíkjára. Könnyű belátni, hogy az így nyert $\hat{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ síkgörbére tetszőleges $t \in I$ helyen fennáll

$$\hat{\gamma}(t) = \gamma(t) - \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), \mathbf{N}(\sigma(t_0)) \rangle \cdot \mathbf{N}(\sigma(t_0)).$$

A $\hat{\gamma}$ sima görbe ugyan nem feltétlenül reguláris, de teljesül a $\hat{\gamma}'(t_0) = \gamma'(t_0)$ egyenlőség, tehát $\hat{\gamma}'(t_0) \neq \mathbf{0}$.

8.18. Állítás *A $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$ felületi görbének a t_0 pontbeli geodetikus görbülete megegyezik a $\hat{\gamma}$ vetületi görbe t_0 -beli görbületével.*

Bizonyítás. Mivel a geodetikus görbület is invariáns az átparaméterezéssel szemben, az általánosság elvének megsértése nélkül feltehetjük, hogy a γ ívhossz szerint paraméterezett görbe. Ennek következtében fennáll $\mathbf{T} = \gamma'$ és $\|\hat{\gamma}'(t_0)\| = 1$.

A $\hat{\gamma}$ leképezés t_0 -beli második deriváltjára igaz

$$\hat{\gamma}''(t_0) = \gamma''(t_0) - \langle \gamma''(t_0), \mathbf{N}(\sigma(t_0)) \rangle \cdot \mathbf{N}(\sigma(t_0)).$$

Vegyük észre, hogy $\hat{\gamma}''(t_0)$ merőleges a $\hat{\gamma}'(t_0)$ egységvektorra. Ily módon (2.4) és a fenti összefüggések alapján azt kapjuk, hogy fennáll

$$\hat{\kappa}(t_0) = \|\hat{\gamma}''(t_0)\| = \|\mathbf{T}'(t_0) - \langle \mathbf{T}'(t_0), \mathbf{N}(\sigma(t_0)) \rangle \cdot \mathbf{N}(\sigma(t_0))\| = \kappa_g(t_0). \quad \square$$

8.4. Feladatok

8.1. Feladat *Az általános hengerfelületet az 5.1. Példában értelmeztük. A hengerfelületet egy olyan \mathbf{r} paraméterezéssel adtuk meg, melyet az $\mathbf{r}(u_1, u_2) = \gamma(u_1) + u_2 \mathbf{w}$ egyenlet ír le, és ahol a γ görbe pályája benne van egy S síkban. Tegyük fel, hogy a γ ívhossz szerint paraméterezett és a pályája nincs egyenesen. Igazoljuk, hogy ez esetben a γ egy geodetikus görbéje a hengerfelületnek akkor és csak akkor, ha az alkotók irányát megadó \mathbf{w} vektor merőleges az S síkra.*

8.2. Feladat Igazoljuk, hogy a gömbfelület geodetikus görbéinek pályái éppen a gömbi főkörök.

8.3. Feladat Tekintsük a (6.22) összefüggéssel leírt forgásfelületet. Vegyünk egy $u_0 \in I$ értéket és az annak megfelelő γ_2 második paramétervonalat, melyet a $\gamma_2(t) = \mathbf{r}(u_0, t)$, $t \in (-\pi, \pi)$, egyenlet ír le. Mutassuk meg, hogy a γ_2 "parallel kör" a forgásfelületnek geodetikus görbéje akkor és csak akkor, ha fennáll $\varrho'(u_0) = 0$.

8.4. Feladat Legyen adott egy \mathbb{R}^3 -beli M forgásfelület. Vegyünk egy ívhossz szerint paraméterezett $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbét, amely rajta van az M felületen. Legyen $\xi(s)$ a $\gamma(s)$ pontnak az M forgástengelyétől mért távolsága, továbbá jelölje $\vartheta(s)$ a γ érintőjének és az M -re eső parallelkör érintőjének hajlásszögét a $\gamma(s)$ pontban.

Bizonyítsuk be, hogy amennyiben γ egy geodetikus az M forgásfelületnek, akkor $\xi(s) \cdot \cos \vartheta(s)$ szorzat állandó.

Igazoljuk, hogy ha tetszőleges $s \in I$ -re igaz $\vartheta(s) \neq 0$ és a $\xi(s) \cdot \cos \vartheta(s)$ szorzat állandó, akkor γ egy geodetikus görbéje az M -nek.

8.5. Feladat Tekintsük az $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést, amelyre igaz $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{e}_1 + u \sin v \mathbf{e}_2 + bv \mathbf{e}_3$ egy rögzített $b > 0$ szám mellett. Vegyük továbbá egy adott $a > 0$ számmal a $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt, ahol fennáll $\gamma(t) = a \cos t \mathbf{e}_1 + a \sin t \mathbf{e}_2 + bt \mathbf{e}_3$. A γ csavarvonal rajta van az $M = \mathbf{r}(\mathbb{R}^2)$ elemi felületen. Számítsuk ki a γ felületi görbe geodetikus görbületét egy $t \in \mathbb{R}$ helyen.

8.6. Feladat Vegyünk a térben egy M elemi felület és annak egy $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméteres előállítását. Fejezzük ki a paramétervonalak geodetikus görbületét az első főmennyiségekből és a Christoffel-szimbólumokból.

8.7. Feladat Legyen adva \mathbb{R}^3 -ban egy M elemi felület az $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezéssel. Igazoljuk, hogy az \mathbf{r} -nek megfelelő első paramétervonalak stacionárius görbék akkor és csak akkor, ha fennáll $\Gamma_{11}^2 = 0$.

8.8. Feladat Az $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektorfüggvénnyel leírt elemi felületnek vegyük az egyik ívhossz szerint paraméterezett $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ geodetikus görbét, amelyről feltesszük, hogy valódi. Bizonyítsuk be, hogy a γ görbe $s \in I$ helyen vett torziójára fennáll $\tau(s) = \langle \gamma'(s) \times \mathbf{N}(\sigma(s)), (\mathbf{N} \circ \sigma)'(s) \rangle$, ahol \mathbf{N} a felület \mathbf{r} paraméterezéséhez tartozó normális egységvektormezőt jelöli.

8.9. Feladat Tekintsük egy \mathbb{R}^3 -beli M elemi felületnek egy $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméteres előállítását. Legyen $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ egy reguláris felületi görbe. A γ görbének a $t \in I$ helyen vett geodetikus torzióján a $\tau_g(t) = \frac{1}{v(t)^2} \langle \gamma'(t) \times \mathbf{N}(\sigma(t)), (\mathbf{N} \circ \sigma)'(t) \rangle$ számot értjük. Igazoljuk, hogy a γ egy görbületi vonala M -nek akkor és csak akkor, ha fennáll $\tau_g = 0$.

8.10. Feladat *Legyen M egy olyan elemi felület \mathbb{R}^3 -ban, amelynek az összes geodetikusa síkbeli görbe. Bizonyítsuk be, hogy ez esetben az M sima felület rajta van vagy egy síkon, vagy pedig egy gömbön.*

9. fejezet

Hiperfelületek az n -dimenziós térben

Ebben a fejezetben egy kitekintést adunk a magasabb dimenziós euklideszi terekben vett felületek differenciálgeometriájára.

Az előző négy fejezetben az \mathbb{R}^3 -beli sima felületek tárgyalása során azért alkalmaztuk az úgynevezett tenzoriális írásmódot, hogy az ottani összefüggéseket könnyen lehessen általánosítani a magasabb dimenziós felületekre.

Az \mathbb{R}^n térben vett m -dimenziós elemi felületek

Tekintsük az \mathbb{R}^m és \mathbb{R}^n euklideszi tereket, melyek dimenzióira fennállnak a $2 \leq m < n$ és $n \geq 4$ egyenlőtlenségek. A továbbiakban D legyen egy összefüggő nyílt halmaz (más szóval egy tartomány) \mathbb{R}^m -ben. Amennyiben veszünk egy \mathbb{R}^n -beli alakzatot, akkor azon mindig az \mathbb{R}^n -től örökölt altér-topológiát tekintjük.

9.1. Definíció Az \mathbb{R}^n térben m -dimenziós sima elemi felületen egy olyan M alakzatot értünk, amelyhez megadható egy olyan C^∞ -osztályú $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- (1) Az \mathbf{r} vektorfüggvény reguláris és injektív.
- (2) Fennáll $\mathbf{r}(D) = M$, továbbá \mathbf{r} egy homeomorfizmust ad az \mathbb{R}^m -beli D tartomány és az $M \subset \mathbb{R}^n$ alakzat között.

A fenti definícióban szereplő \mathbf{r} leképezést az M sima felület egyik paraméteres előállításának mondjuk. Az \mathbf{r} függvény regularitása nyilván azt jelenti, hogy bármely $\mathbf{u} \in D$ helyen a $\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{u}), \dots, \partial_m \mathbf{r}(\mathbf{u})$ vektorok lineárisan függetlenek.

Megjegyzés Vezessük be az $l = n - m$ jelölést. Legyen adott egy C^∞ -osztályú $F : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ leképezés. Vegyük az F -nek az $f_j : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, l$) koordináta-függvényeit. Tekintsük most azt az $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorfüggvényt, ahol tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in D$ esetén fennáll

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^m u_i \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^l f_j(u_1, \dots, u_m) \mathbf{e}_{m+j}.$$

Világos, hogy az \mathbf{r} leképezés egy m -dimenziós elemi felületet ír le \mathbb{R}^n -ben. Az $\mathbf{r}(D)$ felületet (és magát az \mathbf{r} vektorfüggvényt is) az F függvény grafikonjának nevezzük.

A továbbiakban feltesszük, hogy adva van \mathbb{R}^n -ben egy m -dimenziós M elemi felület az \mathbf{r} paraméterezéssel. A 5.1. alfejezetben közölt tárgyalásnak megfelelően lehet értelmezni az M -re eső sima felületi görbét, továbbá az \mathbf{r} vektorfüggvényhez tartozó paramétervonalakat.

Azt a $\gamma_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ görbét, amelynél egy rögzített $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in D$ pont mellett fennáll $\gamma_i(t) = \mathbf{r}(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_m)$ bármely $t \in I$ -re, az M felület i -edik paramétervonalának mondjuk az \mathbf{r} paraméteres előállításra nézve.

Természetesen definiálni lehet az M elemi felületet leíró \mathbf{r} vektorfüggvény átparaméterezését is az 5.6. Definíciónak megfelelően.

Tekintsünk a D paramétertartományban egy $\sigma : I \rightarrow D \subset \mathbb{R}^m$ sima görbét, melynek koordináta-függvényei legyenek a $\sigma_1, \dots, \sigma_m : I \rightarrow D \subset \mathbb{R}$ függvények. Ekkor a $\gamma = \mathbf{r} \circ \sigma$ leképezés egy sima görbét ad az M felületen. Rögzítsünk egy $t_0 \in I$ helyet és vegyük az $\mathbf{a} = \sigma(t_0)$, $\mathbf{p} = \gamma(t_0)$ pontokat. Világos, hogy ekkor a γ felületi görbe sebességvektorára fennáll az (5.2) szerinti

$$\gamma'(t_0) = \sum_{i=1}^m \sigma'_i(t_0) \cdot \partial_i \mathbf{r}(\mathbf{a})$$

összefüggés. Ez alapján lehet értelmezni a felület érintőterét egy adott pontban.

9.2. Definíció Az \mathbb{R}^n -beli m -dimenziós $M = \mathbf{r}(D)$ felületen legyen adva egy $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{a})$ pont. A felület \mathbf{p} -beli lineáris érintőterén az \mathbb{R}^n vektortérnek azt az m -dimenziós $T_{\mathbf{p}}M$ alterét értjük, melyet a $\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{a}), \dots, \partial_m \mathbf{r}(\mathbf{a})$ vektorok generálnak.

Ez esetben is igazolható, hogy a felület egy adott pontbeli érintőtere nem függ a paraméterezés megválasztásától. Bevezethető egy másik fogalom is. Vegyük a $T_{\mathbf{p}}M$ -re merőleges vektorok $N_{\mathbf{p}}M = \{ \mathbf{n} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle = 0 \text{ igaz bármely } \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M \text{ mellett} \}$ alterét. Ezt mondjuk az M felület \mathbf{p} -beli normális terének.

Az (5.4) kifejezéssel definiálhatóak az M felület \mathbf{r} paraméterezéséhez tartozó $g_{ij} : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j = 1, \dots, m$) első főmennyiségei.

Tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in D$ pontban legyen $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ az az $m \times m$ -es szimmetrikus mátrix, melynek elemei az első főmennyiségek \mathbf{u} -beli értékei. Vegyük észre, hogy ez a $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ mátrix nem más, mint a $\partial_i \mathbf{r}(\mathbf{u})$ ($i = 1, \dots, m$) vektorok Gram-mátrixa. Lineáris algebrából ismeretes, hogy egy véges vektorrendszer Gram-mátrixának determinánsa nem lehet negatív, továbbá a determináns pozitív, ha a vektorok lineárisan függetlenek.

Ily módon az 5.4. alfejezetben leírtaknak megfelelően megadhatjuk az m -dimenziós kompakt felületdarab felszínének a fogalmát.

9.3. Definíció Legyen adva egy olyan B Jordan-mérhető zárt tartomány \mathbb{R}^m -ben, amelyet tartalmaz a D paramétertartomány. Az m -dimenziós $\mathbf{r}(B)$ felületdarab felszínén az

$$F(\mathbf{r}(B)) = \int \dots \int_B \sqrt{\det \mathbf{G}(u_1, \dots, u_m)} du_1 \dots du_m$$

pozitív számot értjük.

Megjegyzés Az 5.21. Állítás bizonyítását követve az (5.6) összefüggés alapján igazolható az integráltranszformáció módszerével, hogy a felületdarab felszíne nem függ a felület paraméterezésének megválasztásától.

Mint ismeretes, egy kompakt alakzat nem képezhet elemi felületet. Például, az \mathbb{R}^n -beli gömbfelületek sem elemi felületek. Emiatt szükség van egy újabb fogalom értelmezésére.

9.4. Definíció Az \mathbb{R}^n tér m -dimenziós sima felületének mondunk egy M ($M \neq \emptyset$) alakzatot, ha az M bármely \mathbf{p} pontjának van olyan \mathcal{K} nyílt környezete \mathbb{R}^n -ben, hogy a $\mathcal{K} \cap M$ metszet egy m -dimenziós elemi felület.

9.1. Példa Az \mathbb{R}^6 térben tekintsük az 5-dimenziós $S^5 = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^6 \mid \|\mathbf{p}\| = 1\}$ szférát. Számítsuk ki ennek a kompakt sima felületnek a felszínét.

Vegyük \mathbb{R}^5 -ben a $D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ zárt téglát és ezen azt az $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^6$ leképezést, melyet az

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) &= \cos u_1 \cos u_2 (\cos u_3 \mathbf{e}_1 + \sin u_3 \mathbf{e}_2) \\ &+ \cos u_1 \sin u_2 (\cos u_4 \mathbf{e}_3 + \sin u_4 \mathbf{e}_4) + \sin u_1 (\cos u_5 \mathbf{e}_5 + \sin u_5 \mathbf{e}_6) \end{aligned}$$

összefüggés ír le tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \in D$ esetén. Világos, hogy \mathbf{r} egy C^∞ -osztályú leképezés, amelyre fennáll $\mathbf{r}(D) = S^5$. Az \mathbf{r} vektorfüggvény parciális deriváltjai alapján belátható, hogy amennyiben vesszük az \mathbf{r} leszűkítését a D zárt téglán U belsejére, akkor az $\mathbf{r}|_U$ leképezés reguláris. Belátható az is, hogy az $\mathbf{r}|_U$ vektorfüggvény egy 5-dimenziós elemi felületnek a paraméterezése, továbbá az $\mathbf{r}(U)$ alakzat lezárása éppen az S^5 gömbfelület.

A fentiekből adódik, hogy az 5.23. Definíciót követve meghatározhatjuk az S^5 szféra felszínét. Közvetlen számolással azt kapjuk, hogy bármely $\mathbf{u} \in D$ -re a $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ Gram-mátrix diagonális és a determinánsára fennáll

$$\det \mathbf{G}(\mathbf{u}) = \cos^6 u_1 \cdot \sin^2 u_1 \cdot \cos^2 u_2 \cdot \sin^2 u_2.$$

Ennek alapján az \mathbb{R}^6 -beli egységgömb felszínére teljesül

$$\begin{aligned} F(S^5) &= (2\pi)^3 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^3 u_1 \sin u_1 du_1 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos u_2 \sin u_2 du_2 \\ &= 8\pi^3 \cdot \left[-\frac{1}{4} \cos^4 u_1 \right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\frac{1}{2} \sin^2 u_2 \right]_0^{\pi/2} = 8\pi^3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \pi^3. \end{aligned}$$

Az \mathbb{R}^n -beli elemi hiperfelület normális egységvektormezője

Az alábbi fogalom nyilván kézenfekvő az olvasó számára.

9.5. Definíció \mathbb{R}^n -beli sima elemi hiperfelületen egy $(n - 1)$ -dimenziós elemi felületet értünk.

A 9.4. Definíció alapján értelmezni lehet az \mathbb{R}^n tér sima hiperfelületeit, melyek már nem szükségszerűen homeomorfak az \mathbb{R}^{n-1} tér egy nyílt tartományával.

A továbbiakban már csak hiperfelületeket tárgyalunk. Emiatt ezt követően az m , n pozitív egészekre teljesül $m = n - 1$.

Legyen adva egy \mathbb{R}^n -beli M elemi hiperfelület az $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ paraméteres előállítással. Ez esetben értelmezni lehet az M -nek az \mathbf{r} által meghatározott normális egységvektormezőjét.

9.6. Definíció Az M hiperfelület \mathbf{r} paraméterezéséhez tartozó normális egységvektormezőjén azt az $\mathbf{N} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezést értjük, amelynek tetszőleges $\mathbf{u} \in D$ helyen vett értékét az alábbi két feltétel határozza meg:

- (1) $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ egy olyan egységvektor, amely merőleges a $T_{\mathbf{r}(\mathbf{u})}M$ érintőtérre.
- (2) Az \mathbb{R}^n -beli $\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{u}), \dots, \partial_{n-1} \mathbf{r}(\mathbf{u})$, $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ bázis a tér természetes orientációját képviseli.

Alkalmazzuk az \mathbb{R}^n -beli vektoriális szorzat fogalmát, melyet az 1.17. Definícióval vezettünk be. Könnyű belátni a fenti definíció alapján, hogy ekkor fennáll az

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\|[\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{u}), \dots, \partial_{n-1} \mathbf{r}(\mathbf{u})]\|} [\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{u}), \dots, \partial_{n-1} \mathbf{r}(\mathbf{u})] \quad (9.1)$$

egyenlőség. Innen az (1.3) kifejezésből már adódik, hogy \mathbf{N} egy C^∞ -osztályú leképezés.

Megjegyzés Ha egy olyan elemi felületet vennénk \mathbb{R}^n -ben, amelynek dimenziója kisebb $(n - 1)$ -nél, akkor azon a paraméterezés már nem határoz meg egyértelműen egy normális egységvektormezőt. Egy ilyen esetben a görbületi jellemzés már csak komplikáltabb tárgyalással lenne elvégezhető, és erre a jegyzetünkben nem térünk ki.

Célszerű kimondani az alábbi fogalmat is.

9.7. Definíció Az $M = \mathbf{r}(D)$ hiperfelület $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{a})$ pontbeli érintő-hipersíkjának nevezzük azt az \mathbb{R}^n -beli hipersíkot, amely áthalad a \mathbf{p} ponton és merőleges az $\mathbf{N}(\mathbf{a})$ vektorra.

Az 5.2. alfejezetben leírt tárgyalás alapján belátható, hogy a sima hiperfelületekkel kapcsolatban igazak az alábbi kijelentések, amelyek az 5.15. Tételnek és az 5.16. Állításnak felelnek meg.

Az \mathbb{R}^n -beli W nyílt halmazon legyen adva egy C^∞ -osztályú $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, továbbá egy olyan $c \in f(W)$ szám, amely egy reguláris értéke f -nek. Ekkor az $M = f^{-1}(c)$ alakzat egy sima hiperfelület. Ezen kívül tetszőleges $\mathbf{p} \in M$ pontban a $\text{grad } f(\mathbf{p})$ vektor merőleges a $T_{\mathbf{p}}M$ érintőtérré.

A sima hiperfelületek görbületi jellemzése

A továbbiakban végig feltesszük, hogy adva van egy \mathbb{R}^n -beli M elemi hiperfelület az $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ paraméterezéssel, ahol $m = n - 1$.

A 6.1. alfejezetben leírtak szerint egy $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{a})$ pontban vehetjük M -nek az érintőirányokhoz tartozó normálmetszet görbéit. Ezek pályái olyan \mathbf{p} -n átmenő síkoknak M -mel vett metszetei, amelyek párhuzamosak az $\mathbf{N}(\mathbf{a})$ normálvektorral.

Igazolható, hogy a $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ érintővektorhoz tartozó síkbeli normálmetszetnek, mint síkbeli görbének, az előjeles görbülete megegyezik a (6.3) kifejezéssel definiált normálgörbülettel.

Az \mathbf{r} leképezés másodrendű parciális deriváltjait alkalmazva a (6.4) összefüggés alapján definiálhatóak a $b_{ij} : D \rightarrow \mathbb{R}$ második főmennyiségek. Ezek tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in D$ helyen meghatároznak egy $m \times m$ -es $\mathbf{B}(\mathbf{u})$ mátrixot, amely szimmetrikus.

A 6.2. alfejezet tárgyalását követve előbb értelmezni lehet felületi vektormező iránymenti deriváltját, majd pedig a 6.8. Definícióval az érintőtéren vett $\mathcal{A}_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{\mathbf{p}}M$ Weingarten-leképezést, amelynél tetszőleges $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^m w_i \partial_i \mathbf{r}(\mathbf{a})$ érintővektorra fennáll az

$$\mathcal{A}_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = - \sum_{i=1}^m w_i \cdot \partial_i \mathbf{N}(\mathbf{a})$$

egyenlőség. A Weingarten-leképezés alapján a (6.8) egyenlettel definiálható a II_p második alapforma, amely egy szimmetrikus bilineáris forma a $T_{\mathbf{p}}M$ érintőtéren.

Mivel az $\mathcal{A}_{\mathbf{p}}$ leképezés önadjungált, emiatt van olyan $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ ortonormált bázis $T_{\mathbf{p}}M$ -ben és vannak olyan $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ számok, melyekre teljesülnek az $\mathcal{A}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}_i) = \kappa_i \mathbf{v}_i$ ($i = 1, \dots, m$) összefüggések. Az itt szereplő $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ együtthatókat az M hiperfelület \mathbf{p} -beli főgörbületeinek, a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ sajátvektorokhoz tartozó irányokat pedig főirányoknak hívjuk.

9.8. Definíció Az M hiperfelület \mathbf{r} paraméterezés szerinti szorzatgörbületén a \mathbf{p} pontban a $K_{\mathbf{p}} = \prod_{i=1}^m \kappa_i$ számot értjük. A $H_{\mathbf{p}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \kappa_i$ számot a hiperfelület \mathbf{p} -beli középgörbületének nevezzük.

Megjegyzés A szakirodalomban a pontbeli $K_{\mathbf{p}}$ szorzatgörbületre a Gauss-Kronecker-féle görbület elnevezést is szokás használni. Irányításváltó átparaméterezés esetén a főgörbületek előjelet váltanak. Emiatt ha az n dimenziószám páros, akkor a $K_{\mathbf{p}}$ szorzatgörbület is előjelet vált az irányításváltó átparaméterezésnél.

A 6.2. alfejezetben leírtakból adódik, hogy tetszőleges $\mathbf{u} \in D$ esetén az $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ pontbeli $\mathcal{A}_{\mathbf{r}(\mathbf{u})}$ Weingarten-leképezést az $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{G}(\mathbf{u})^{-1} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{u})$ mátrix írja le a $T_{\mathbf{p}}M$ -beli

$\partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{u}), \dots, \partial_{n-1} \mathbf{r}(\mathbf{u})$ bázisra nézve. Emiatt a szorzatgörbületre ez esetben is fennáll a $K_{\mathbf{r}(\mathbf{u})} = \frac{\det \mathbf{B}(\mathbf{u})}{\det \mathbf{G}(\mathbf{u})}$ egyenlőség.

Mint ismeretes, a főgörbületek megegyeznek a főirányokhoz tartozó normálgörbületekkel. A normálgörbületre vonatkozó Euler-tétel az alábbiak szerint marad érvényben.

9.9. Állítás *Legyen adva a $T_{\mathbf{p}}M$ érintőtérben egy \mathbf{w} vektor, melynek az i -edik főirányt adó \mathbf{v}_i egységvektorral bezárt szöge ϑ_i ($i = 1, \dots, m$). Ekkor a \mathbf{w} érintőirányhoz tartozó normálgörbületre fennáll*

$$k_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^m \kappa_i \cdot \cos^2 \vartheta_i.$$

A 6.19. Állítás bizonyítása alapján igaz az alábbi kijelentés.

9.10. Állítás *Legyen adva az $M = \mathbf{r}(D)$ elemi hiperfelület egy $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\mathbf{a})$ pontja. Vegyük azt a két nyílt féltérrel, melyeket a \mathbf{p} -beli érintő-hipersík határol.*

- (1) *Ha $K_{\mathbf{p}} \neq 0$ és a \mathbf{p} -beli főgörbületek előjele azonos, akkor \mathbf{a} -nak van olyan U nyílt környezete D -ben, hogy az $\mathbf{r}(U \setminus \{\mathbf{a}\})$ felületdarab benne van az egyik nyílt féltérben.*
- (2) *Ha van két olyan főgörbület, amelyek előjele ellentétes, akkor az \mathbf{a} -nak bármely U nyílt környezetét is vesszük D -ben, az $\mathbf{r}(U)$ hiperfelület-darabnak mindkét nyílt féltérben vannak pontjai.*

Megjegyzés Amennyiben a $\mathbf{p} \in M$ pontban az $\mathcal{A}_{\mathbf{p}}$ Weingarten-leképezés nem tűnik el, akkor a 6.2. alfejezetben leírtaknak megfelelően értelmezni lehet a Dupin-indikátrixot a $T_{\mathbf{p}}M$ érintőtérben, amelyet ez esetben azonosítunk az \mathbb{R}^{n-1} euklideszi térrel. Ily módon a $\sum_{i=1}^m \kappa_i (x_i)^2 = \pm 1$ másodfokú egyenlettel leírt alakzathoz jutunk.

Vegyük észre, hogy a \mathbf{p} -beli főgörbületek előjele azonos akkor és csak akkor, ha a Dupin-indikátrix egy \mathbb{R}^m -beli ellipszoid.

A 6.3. alfejezetben leírtaknak megfelelően beszélhetünk umbilikus pontokról és umbilikus hiperfelületekről. Könnyű belátni, hogy a megfelelő átfogalmazás mellett igaz marad a 6.21. Állítás.

A (6.19) egyenlet alapján értelmezni lehet az M hiperfelület egy normális variációját. Közvetlen számolással igazolható, hogy a 6.23. Tétel érvényben marad. Eszerint a (6.19) variációnál fellépő kompakt hiperfelület-darabok felszínét mérő f_d függvény deriváltja pontosan akkor tűnik el a 0 helyen az összes variációnál, ha a H középgörbületi függvény eltűnik. Emiatt az M -et akkor mondjuk minimál-hiperfelületnek, ha $H = 0$ teljesül.

A 6.25. Definíció alapján lehet értelmezni az $M = \mathbf{r}(D)$ hiperfelület görbületi vonalait. A fenti eredményekből adódik, hogy az \mathbf{r} vektorfüggvény paramétervonalai görbületi vonalakat adnak, ha az összes olyan i, j indexpár esetén, ahol $i \neq j$, a g_{ij} és b_{ij} főmennyiségek eltűnnek.

9.11. Feladat Tekintsük \mathbb{R}^3 -ban a $D = (0, \infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nyílt téglát. Vegyük azt az $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^4$ vektorfüggvényt, melyre tetszőleges $(u_1, u_2, u_3) \in D$ helyen fennáll

$$\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3) = \operatorname{ch} u_1 (\cos u_2 \mathbf{e}_1 + \sin u_2 \mathbf{e}_2) + \operatorname{sh} u_1 (\cos u_3 \mathbf{e}_3 + \sin u_3 \mathbf{e}_4).$$

Belátható, hogy az \mathbf{r} leképezés egy olyan \mathbb{R}^4 -beli elemi hiperfelületnek a paraméteres előállítását adja, amely rajta van az $(x_1)^2 + (x_2)^2 - (x_3)^2 - (x_4)^2 = 1$ implicit egyenlettel leírt sima hiperfelületen. Számítsuk ki az $M = \mathbf{r}(D)$ elemi hiperfelület szorzatgörbületi függvényét.

Alkalmazzuk az $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ jelölést. Az \mathbf{r} függvény elsőrendű parciális deriváltjaira az alábbi kifejezések adódnak:

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathbf{r}(\mathbf{u}) &= \operatorname{sh} u_1 (\cos u_2 \mathbf{e}_1 + \sin u_2 \mathbf{e}_2) + \operatorname{ch} u_1 (\cos u_3 \mathbf{e}_3 + \sin u_3 \mathbf{e}_4), \\ \partial_2 \mathbf{r}(\mathbf{u}) &= \operatorname{ch} u_1 (-\sin u_2 \mathbf{e}_1 + \cos u_2 \mathbf{e}_2), \quad \partial_3 \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \operatorname{sh} u_1 (-\sin u_3 \mathbf{e}_3 + \cos u_3 \mathbf{e}_4). \end{aligned}$$

Ezek következtében az első főmennyiségekre fennáll

$$g_{11}(\mathbf{u}) = \operatorname{ch}^2 u_1 + \operatorname{sh}^2 u_1 = \operatorname{ch}(2u_1), \quad g_{22}(\mathbf{u}) = \operatorname{ch}^2 u_1, \quad g_{33}(\mathbf{u}) = \operatorname{sh}^2 u_1,$$

továbbá $g_{ij} = 0$ teljesül feltéve, hogy $i \neq j$.

A (9.1) és (1.3) összefüggések alapján a normális egységvektormezőre az

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2u_1)}} (\operatorname{ch} u_1 (\cos u_2 \mathbf{e}_1 + \sin u_2 \mathbf{e}_2) - \operatorname{sh} u_1 (\cos u_3 \mathbf{e}_3 + \sin u_3 \mathbf{e}_4))$$

kifejezést nyerjük. A második főmennyiségek meghatározásához az \mathbf{r} leképezés másodrendű parciális deriváltjait is vennünk kell:

$$\begin{aligned} \partial_{1,1} \mathbf{r}(\mathbf{u}) &= \mathbf{r}(\mathbf{u}), \quad \partial_{1,2} \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \operatorname{sh} u_1 (-\sin u_2 \mathbf{e}_1 + \cos u_2 \mathbf{e}_2), \\ \partial_{1,3} \mathbf{r}(\mathbf{u}) &= \operatorname{ch} u_1 (-\sin u_3 \mathbf{e}_3 + \cos u_3 \mathbf{e}_4), \quad \partial_{2,2} \mathbf{r}(\mathbf{u}) = -\operatorname{ch} u_1 (\cos u_2 \mathbf{e}_1 + \sin u_2 \mathbf{e}_2), \\ \partial_{2,3} \mathbf{r}(\mathbf{u}) &= \mathbf{0}, \quad \partial_{3,3} \mathbf{r}(\mathbf{u}) = -\operatorname{sh} u_1 (\cos u_3 \mathbf{e}_3 + \sin u_3 \mathbf{e}_4). \end{aligned}$$

Ezek alapján bármely $\mathbf{u} \in D$ helyen igaz

$$b_{11}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2u_1)}}, \quad b_{22}(\mathbf{u}) = -\frac{\operatorname{ch}^2 u_1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2u_1)}}, \quad b_{33}(\mathbf{u}) = \frac{\operatorname{sh}^2 u_1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2u_1)}},$$

továbbá $i \neq j$ esetén teljesül $b_{ij} = 0$. Mivel a 3×3 -as $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ és $\mathbf{B}(\mathbf{u})$ mátrixok minden helyen diagonálisak, az \mathbf{r} vektorfüggvény paramétervonalai görbületi vonalak. Emiatt a $\kappa_i(\mathbf{u}) = \frac{b_{ii}(\mathbf{u})}{g_{ii}(\mathbf{u})}$ ($i = 1, 2, 3$) összefüggéssel megkaphatjuk a főgörbületi függvényeket is. Célszerű megjegyezni, hogy a főgörbületek most nem azonos előjelűek. Az \mathbf{r} paraméterezéshez tartozó szorzatgörbületi függvényre pedig fennáll $K(\mathbf{u}) = -(\operatorname{ch}^2 u_1 + \operatorname{sh}^2 u_1)^{-5/2}$.

Az elemi hiperfelületre vonatkozó derivációs egyenletek

Az M hiperfelület $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ paraméterezéséhez tartozó kísérő Gauss-bázis fogalmát a 7.1. Definíciónak megfelelően adhatjuk meg. Eszerint a $\partial_1 \mathbf{r}, \dots, \partial_{n-1} \mathbf{r}, \mathbf{N} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^∞ -osztályú leképezések, mint az M mentén vett sima vektormezők, együttesen alkotják a kísérő Gauss-bázist.

A (7.1) derivációs egyenlet alapján be tudjuk vezetni a Christoffel-féle szimbólumokat, amelyek a D paramétertartományon vett valós függvények. A 7.3. Állítás bizonyítását követve belátható, hogy ezek kifejezhetőek az első főmennyiségekből a (7.2) egyenlettel. Nyilván most is teljesül a (7.4) derivációs formula.

A 7.2. alfejezetben közölt tárgyalás teljes mértékben áthozható a hiperfelületek esetére. Mindössze arra kell ügyelni, hogy amikor egy egyenletben összegzés szerepel, akkor az indextartomány már 1-től $(n-1)$ -ig terjed. Ily módon érvényben maradnak a (7.5) Gauss-egyenletek és a (7.6) Mainardi-Codazzi-egyenletek. Ezek azt mutatják, hogy az \mathbf{r} paraméterezésből nyert első és második főmennyiségek nem függetlenek egymástól.

Az 5.5. alfejezetben leírtaknak megfelelően értelmezni lehet a sima leképezést az \mathbb{R}^n tér hiperfelületei között, továbbá be lehet vezetni az izometria fogalmát is.

Emlékezzünk rá, hogy amennyiben az n dimenziószám páros, akkor a szorzatgörbület a hiperfelület irányításváltó átparaméterezése esetén előjelet vált. Ily módon a Theorema egregium csak az alábbi formában marad érvényben.

Az \mathbb{R}^n -beli M és \hat{M} elemi hiperfelületek között legyen adva egy olyan $\mu : M \rightarrow \hat{M}$ sima bijekció, amely egy izometria. Ez esetben, ha az n egész szám páratlan, akkor a szorzatgörbületekre fennáll a $K_{\mathbf{p}} = \hat{K}_{\mu(\mathbf{p})}$ egyenlőség bármely $\mathbf{p} \in M$ pont esetén.

A hiperfelületek geodetikus görbéi

A 8. fejezet tárgyalását véve mintának a hiperfelületen is be lehet vezetni a stacionárius görbe fogalmát. Értelmezni lehet a hiperfelületi görbe mentén vett érintőleges vektormezők párhuzamosságát is. Ugyancsak be lehet vezetni a geodetikus görbe és a geodetikus görbület fogalmát. Könnyen belátható, hogy a 8. fejezet összes eredménye érvényben marad a magasabb dimenziójú terek hiperfelületeire is.

Tárgymutató

- alapforma
 - első, 94
 - második, 114
- alaptétel
 - görbeelméleti, 41, 79
- aszimptotavonal, 126
- átparaméterezés
 - elemi felületé, 86
 - görbéé, 25
- Bonnet-tétel, 153
- Cartan-mátrix, 74
- Christoffel-féle szimbólumok, 150
- csúcspont
 - zárt síkgörbéé, 65
- derivációs formulák, 152
- Dupin-indikátrix, 121
- egységvektor
 - érintő, 26
 - binormális, 30
 - főnormális, 30
- egyszerű görbeív, 35
- epiciklois, 47
- érintőegyenes, 21
- érintőfelület, 142
- érintőleképezés, 101
- érintősík, 90
- érintőtér
 - lineáris, 90
- Euler-tétel, 116
- evolúta, 55
- evolvens, 56
- Fáry-Milnor-tétel, 137
- felszín, 97, 171
- felület
 - sima, 92
 - sima elemi, 83
- felületi görbe, 92
 - geodetikus, 162
 - stacionárius, 158
- felületi pont
 - elliptikus, 119
 - hiperbolikus, 119
 - parabolikus, 119
 - planáris, 122
 - szférikus, 122
 - umbilikus, 122
- Fenchel-tétel, 136
- főgörbület, 116
- főirány, 116
- főmennyiségek
 - első, 94
 - második, 110
- forgásfelület, 127
- Frenet-formulák, 37, 53, 76
- Frenet-bázis, 30, 52, 73
- Gauss-leképezés, 104
- Gauss-bázis, 149
- Gauss-egyenletek, 153
- Gauss-görbület, 116
 - felszín szerinti integrálja, 130
- görbe
 - általános típusú (\mathbb{R}^n -ben), 73

egyszerű, 35
 egyszerű zárt, 36
 reguláris, 19
 sima, 19
 valódi (\mathbb{R}^3 -ban), 36
 zárt, 36
 görbület, 26
 előjeles, 53
 geodetikus, 165
 görbületi függvények, 75
 görbületi vonal, 125
 grafikon (függvényé), 67, 87
 Gram-mátrix, 11

 hengeres csavarvonal, 20
 hengerfelület, 85
 hiperfelület
 sima elemi, 172
 hipociklois, 45

 indukált leképezés
 (egybevágóság által), 7
 (izometria által), 10
 ívhossz, 22
 ívhossz szerinti paraméterezés, 25
 izometria
 \mathbb{R}^n -beli, 10
 felületek között, 102

 Jacobi-mátrix, 16

 konvex zárt síkgörbe, 62
 koordinátázás
 felületé, 83
 körülfordulási szám, 60
 középgörbület, 116
 kúpfelület, 85

 Mainardi-Codazzi-egyenletek, 153
 Meusnier-tétel, 111
 minimálfelület, 125

 normálgörbület, 110

 normális egységvektormező, 90, 172
 normálmetszet görbe, 108
 normálsík, 21

 parallel görbe, 43, 58
 paraméterezés
 elemi felületé, 83
 paramétervonal, 84
 koordináta-függvény
 vektorértékű leképezésé, 14, 15
 parciális derivált
 vektorfüggvényé, 16
 párhuzamos vektormező
 felületi görbe mentén, 161

 rektifikáló sík, 31

 sebességfüggvény, 21
 sebességvektor, 21
 sima leképezés
 felületek között, 100
 simuló kör, 35
 simuló sík, 33
 szorzatgörbület, 116

 teljes görbület, 28
 előjeles, 60
 Theorema egregium, 154
 torzió, 37
 traktrix, 69
 tubusfelület, 132

 variáció
 felületé, 123
 görbéé, 157
 vektoriális szorzat, 6, 12
 vonalfelület, 138
 lefejthető, 139

 Weingarten-leképezés, 113

Irodalomjegyzék

- [Ber] M. Berger: *Geometry I-II*. Universitext, Springer, Berlin, 1987.
- [Csa1] Császár Ákos: *Valós analízis I*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.
- [Csa2] Császár Ákos: *Valós analízis II*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.
- [doCa] M. P. do Carmo: *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [Fre] Freud Róbert: *Lineáris algebra*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2006.
- [Ha.j] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006.
- [LaSo1] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: *Analízis I*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.
- [LaSo2] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: *Analízis II*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007.
- [Rud] W. Rudin: *A matematikai analízis alapjai*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- [Sto] J. J. Stoker: *Differential geometry*. Wiley-Interscience, New York, 1989.
- [SzoGeNa] Szőkefalvi-Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter: *Differenciálgeometria*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
- [ToSi] Tóth János, Simon L. Péter: *Differenciálegyenletek*. Typotex Kiadó, Budapest, 2005.
- [Vod] V. T. Vodnyev: *Differenciálgeometriai feladatgyűjtemény*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.