A bolygók mozgására vonatkozó Kepler-törvények igazolása

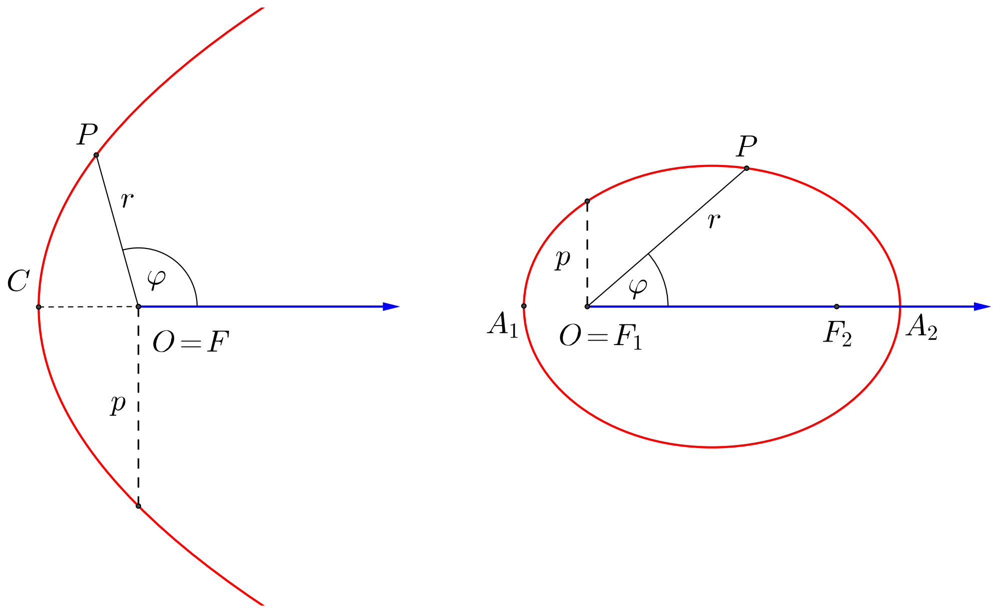
Geometriai alapok. A kúpszeletek polárkoordinátás egyenlete

A síkbeli másodrendű görbék közül az ellipszist, a hiperbolát és a parabolát mondjuk nem elfajuló kúpszeletnek. Tekintsünk vagy egy ellipszist vagy pedig egy hiperbolát. Jelölje $2c$ a kúpszelet fókuszainak távolságát, továbbá $2a$ az úgynevezett tengelyhosszt. Az $e = c/a$ hányadost mondjuk a kúpszelet numerikus excentricitásának. Célszerű megjegyezni, hogy az ellipszis esetében fennáll $0 \leq e < 1$, a hiperbolánál pedig $e > 1$.

Vezessük be a $b^2 = |a^2 - c^2|$ jelölést. A $p = b^2/a$ pozitív számot nevezzük a kúpszelet paraméterének. Az ellipszist és a hiperbolát az e, p értékek egybevágóság erejéig már meghatározzák. A kört olyan speciális ellipszisnek tekintjük, amelynél a két fókuszpont egybeesik, tehát a körnél fennáll $c = 0$, $e = 0$ és a, p egyenlőek a kör sugarával.

A parabola excentricitása definíció szerint $e = 1$. A parabola fókuszának és vezéregyenesének p távolsága a parabola paramétere.

A kúpszeleteket le lehet írni polárkoordinátás egyenlettel is. Kepler I. törvényének igazolásához a polárkoordinátás egyenleteket fogjuk alkalmazni.



1. ábra. *Polárkoordináta-rendszer megválasztása egy parabolához és egy ellipszishez. A hiperbolaágnál alkalmazott koordinátázást is jól szemlélteti a parabolás ábra.*

A síkbeli polárkoordináta-rendszert a következőképpen értelmezzük. Helyezzük az O kezdőpontot a kúpszelet egyik fókuszába. A síkbeli kezdőirányt (vagy más a szóval polártengelyirányt) a fenti ábrának megfelelően vegyük fel oly módon, hogy az legyen ellentétes az O-ból a kúpszelet legközelebbi pontjába mutató iránnyal. Mint ismeretes, egy síkbeli P ($P \neq O$) pont pozícióját meg lehet adni az $r = OP$ távolsággal és a φ forgásszöggel, amelyet a kezdőirány és az $\overrightarrow{OP}$ vektor határoznak meg. (Jelölés: $P(r, \varphi)$.)

A kúpszeletek kanonikus egyenletét véve alapul alkalmas transzformációkkal igazolható, hogy a $P(r,\varphi)$ pont rajta van az e excentricitású és p paraméterű kúpszeleten akkor és csak akkor, ha polárkoordinátáira fennáll az

$$r = \frac{p}{1 - e\,\cos\varphi} \tag{1}$$

egyenlőség. Ezt mondjuk a kúpszelet polárkoordinátás egyenletének. Az egyenlet bizonyítása fellelhető a *Hajós György* által írt *Bevezetés a geometriába* c. tankönyv 42. fejezetének végén.

Fontos itt megjegyezni, hogy a hiperbola esetében, vagyis amikor $e > 1$, az (1) egyenlet a kúpszeletnek csak azon ágát írja le, amelyik közelebb van az O fókuszhoz. A hiperbola másik ágának polárkoordinátás egyenlete $r = \dfrac{p}{-1 - e\,\cos\varphi}$.

Tömegpont mozgása centrális gravitációs erőtérben

A továbbiakban alkalmazni fogjuk a térbeli vektorokkal kapcsolatos műveleteket és a velük kapcsolatos összefüggéseket. Valamely $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorok skaláris szorzatát $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$, vektoriális szorzatát pedig $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ fogja jelölni.

Amennyiben a térbeli vektoroknál rögzítünk egy $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ortonormált bázist, akkor azok V tere azonosítható a valós számhármasok $\mathbb{R}^3$ vektorterével.

Vegyünk a térben egy olyan koordináta-rendszert, amely úgynevezett inerciarendszert ad. Tegyük fel, hogy az O kezdőpontban egy igen nagy M tömegű, mozdulatlan test van elhelyezve. A térben egy olyan tömegpont mozgását szeretnénk leírni, amelyre csak a O-beli test gravitációs vonzereje hat és amelynek m tömege elhanyagolható az O kezdőpontban elhelyezett test M tömegéhez képest ($m << M$). Feltesszük azt is, hogy a tömegpontnak az O-beli testre kifejtett gravitációs vonzereje (a mérhetőség határait figyelembe véve) nem mozdítja azt el az O kezdőpontból, továbbá az M tömegű test mérete kicsi a tömegpont O-tól mért távolságához képest.

Tetszőleges t ($t \in \mathbb{R}$) időpillanatban a tömegpont helyvektora legyen $\boldsymbol{\gamma}(t)$. Ezzel a hozzárendeléssel egy C^∞-osztályú $\boldsymbol{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ leképezést kapunk. Ezen $\boldsymbol{\gamma}$ vektorfüggvény $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ deriváltja adja a tömegpont sebességvektorát, a $\boldsymbol{\gamma}''(t)$ másodrendű derivált pedig a gyorsulásvektort a t pillanatban.

A továbbiakban végig feltesszük, hogy a mozgó tömegpontra csupán a kezdőpontban elhelyezett M tömegű test gravitációs vonzereje hat. Jelölje $\mathbf{F}(t)$ ezt a tömegpontra kifejtett gravitációs erőt. A Newton-féle gravitációs törvény szerint $\mathbf{F}(t)$ kifejezhető az

$$\mathbf{F}(t) = -k \cdot \frac{m\,M}{\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|^3}\,\boldsymbol{\gamma}(t) \tag{2}$$

összefüggéssel, amelyben k az úgynevezett gravitációs állandó. (Mint ismeretes, ennek közelítő értéke az SI mértékegység-rendszerben $k \approx 6,67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{m^3}{kg \cdot s^2}$.)

A dinamika alaptörvénye szerint az m tömegű tömegpont $\boldsymbol{\gamma}''(t)$ gyorsulására fennáll $m\,\boldsymbol{\gamma}''(t) = \mathbf{F}(t)$. Ebből a (2) összefüggés alapján a

$$\boldsymbol{\gamma}''(t) = -\frac{k\,M}{\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|^3}\,\boldsymbol{\gamma}(t) \tag{3}$$

egyenlőséget nyerjük. Azt kaptuk, hogy a $\boldsymbol{\gamma}''(t)$ gyorsulásvektor párhuzamos (és ellentétes irányú) a $\boldsymbol{\gamma}(t)$ helyvektorral.

Fizikai tanulmányokból már ismeretes, hogy a $\mathbf{P}(t) = m\,(\boldsymbol{\gamma}(t) \times \boldsymbol{\gamma}'(t))$ vektor adja a tömegpontnak az O kezdőpontra vonatkozó perdületét (más szóval impulzusmomentumát) a t pillanatban. Tekintsük most az

$$\mathbf{L}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t) \times \boldsymbol{\gamma}'(t) = \frac{1}{m}\,\mathbf{P}(t) \tag{4}$$

kifejezéssel leírt $\mathbf{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt, melyet nevezzünk el sebességmomentumnak. Az alábbiakban belátjuk, hogy az $\mathbf{L}$ értéke konstans.

1. Állítás. *A centrális gravitációs erőtérben mozgó tömegpont* $\mathbf{L}$ *sebességmomentumvektora állandó.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy az $\mathbf{L}$ vektorfüggvény deriváltja eltűnik. Ugyanis, ez esetben a Lagrange-féle középértéktételből adódik, hogy az $\mathbf{L}$ értéke konstans. A (3) egyenlőség szerint a $\boldsymbol{\gamma}(t)$, $\boldsymbol{\gamma}''(t)$ vektorok párhuzamosak, tehát a vektoriális szorzatuk $\mathbf{0}$. Ily módon az $\mathbf{L}$ vektorfüggvény deriváltjára a Lebniz-szabály alapján teljesül

$$\mathbf{L}'(t) = \boldsymbol{\gamma}'(t) \times \boldsymbol{\gamma}'(t) + \boldsymbol{\gamma}(t) \times \boldsymbol{\gamma}''(t) = \mathbf{0}$$

tetszőleges t pillanatban. $\square$

Tegyük fel, hogy valamely t_0 pillanatban a tömegpont $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$ helyvektora és a $\boldsymbol{\gamma}'(t_0)$ sebességvektor párhuzamosak. Ekkor (3) következtében a tömegpont pályája az O origón és a $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$ ponton áthaladó egyenesre esik, továbbá az $\mathbf{L} = \boldsymbol{\gamma}(t)\times\boldsymbol{\gamma}'(t)$ sebességmomentumvektor eltűnik, azaz $\mathbf{L} = \mathbf{0}$. Ebben az igen speciális esetben, *amikor a pálya egy egyenesre esik*, megtörténhet, hogy a tömegpont ütközik az O kezdőpontba helyezett M tömegű testtel. Nem nehéz igazolni, hogy az ütközés csak akkor marad el, ha a $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$, $\boldsymbol{\gamma}'(t_0)$ vektorok ellentétes irányúak és teljesül az $\|\boldsymbol{\gamma}'(t_0)\|^2 - \dfrac{2\,k\,M}{\|\boldsymbol{\gamma}(t_0)\|} \geq 0$ egyenlőtlenség. (A későbbi tárgyalás alapján ez majd könnyen belátható lesz.)

A továbbiakban végig feltesszük, hogy a sebességmomentum-vektorra fennáll $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$. *Ennek következtében a* $\boldsymbol{\gamma}(t)$, $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ *vektorok vektorok lineárisan függetlenek bármely* t *pillanatban.* A következő állítás szerint a tömegpont egy síkmozgást végez.

2. Állítás. *A centrális gravitációs erőtérben mozgó tömegpont pályája benne van azon síkban, amely illeszkedik az* O *kezdőpontra és merőleges az* $\mathbf{L}$ *vektorra.*

Bizonyítás. Tekintsük a térben azt az S síkot, amely illeszkedik az O kezdőpontra és merőleges az $\mathbf{L}$ momentumvektorra. Az $\mathbf{L} = \boldsymbol{\gamma}(t) \times \boldsymbol{\gamma}'(t)$ egyenlőség miatt az $\mathbf{L}$ vektor tetszőleges t mellett merőleges a $\boldsymbol{\gamma}(t)$ helyvektorra, vagyis a skaláris szorzatukra fennáll $\langle \boldsymbol{\gamma}(t), \mathbf{L} \rangle = 0$. Emiatt a $\boldsymbol{\gamma}(t)$ helyvektorú pont benne van az S síkban. Tehát a tömegpont végig ebben az S síkban mozog. $\square$

Kepler II. törvénye

Az előbbiek során már beláttuk, hogy a centrális gravitációs erőtérben mozgó tömegpont pályája benne van az O origón átmenő és az $\mathbf{L}$ vektorra merőleges síkban. A továbbiakban alkalmazzuk az $L = \|\mathbf{L}\|$ jelölést a konstans sebességmomentum-vektor hosszára.

Az O centrumból a tömegpontba húzott szakaszt mondjuk sugárszakasznak. $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ teljesülése miatt a tömegpont $\boldsymbol{\gamma}(t)$ helyvektora egy forgást ír le az S síkban. A mozgás során valamely t_1 és t_2 ($t_1 < t_2$) időpontok között ez a sugárszakasz egy olyan síkbeli szektortartományt ír le, amelynek van területe. (Ha a sugárszakasz valamely tartományt többszörösen ír le a $[t_1, t_2]$ időszakasz alatt, akkor annak területét többszörösen vesszük figyelembe.) A tartomány területére vonatkozik az alábbi kijelentés.

3. Állítás. *A sugárszakasz által a t_1 és t_2 időpontok között leírt síkidom területe*

$$A(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \cdot L(t_2 - t_1)\,. \tag{5}$$

Bizonyítás.
Vezessük be az $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvényt, amelyre fennáll $r(t) = \|\boldsymbol{\gamma}(t)\| = \langle \boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\gamma}(t) \rangle^{1/2}$. Eszerint r a tömegpont O kezdőponttól való távolságát adja meg az idő függvényében.

A sugárszakasz által végzett forgás szögsebességét egy t pillanatban az alábbi módon definiáljuk. Jelölje $\alpha(u)$ a $\boldsymbol{\gamma}(t)$ és $\boldsymbol{\gamma}(t+u)$ vektorok szögét. *A $\boldsymbol{\gamma}$ vektorfüggvény t-beli szögsebességén az* $\omega(t) = \lim_{u \to 0} \dfrac{\alpha(u)}{|u|}$ *határértéket értjük.* Emiatt azt mondhatjuk, hogy az $\omega(t)$ szögsebesség a tömegpont $\boldsymbol{\gamma}$ helyvektorának irányváltozási sebessége a t pillanatban.

A vektorok $\alpha(u)$ szögének szinusza kifejezhető a $\sin \alpha(u) = \dfrac{\|\boldsymbol{\gamma}(t) \times \boldsymbol{\gamma}(t+u)\|}{\|\boldsymbol{\gamma}(t)\| \cdot \|\boldsymbol{\gamma}(t+u)\|}$ alakban. Könnyű belátni, hogy a határértékre fennáll

$$\lim_{u \to 0} \frac{\alpha(u)}{|u|} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin \alpha(u)}{|u|} = \lim_{u \to 0} \Big(\frac{1}{\|\boldsymbol{\gamma}(t)\| \cdot \|\boldsymbol{\gamma}(t+u)\|} \cdot \|\boldsymbol{\gamma}(t) \times (1/u)(\boldsymbol{\gamma}(t+u) - \boldsymbol{\gamma}(t))\| \Big).$$

Vegyük észre, hogy $\lim_{u \to 0} \frac{1}{u} (\boldsymbol{\gamma}(t+u) - \boldsymbol{\gamma}(t)) = \boldsymbol{\gamma}'(t)$. Eszerint a $\boldsymbol{\gamma}$ leképezés szögsebességére teljesül

$$\omega(t) = \frac{\|\boldsymbol{\gamma}(t) \times \boldsymbol{\gamma}'(t)\|}{\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|^2} = \frac{\|\boldsymbol{\gamma}(t) \times \boldsymbol{\gamma}'(t)\|}{r(t)^2}. \tag{6}$$

Az Analízisből ismeretes, hogy a sugárszakasz által leírt síkbeli szektortartomány területét az

$$A(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \cdot \int_{t_1}^{t_2} r(u)^2 \cdot \omega(u)\, du$$

integrál adja meg. A (6) összefüggés szerint pedig fennáll $r(u)^2 \cdot \omega(u) = \|\boldsymbol{\gamma}(u) \times \boldsymbol{\gamma}'(u)\|$. Ebből már következik, hogy a sugárszakasz által leírt síkidom területe

$$A(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \|\boldsymbol{\gamma}(u) \times \boldsymbol{\gamma}'(u)\|\, du = \frac{1}{2} \cdot \int_{t_1}^{t_2} L\; du = \frac{1}{2} \cdot L(t_2 - t_1).$$

□

A 3. Állításból már következik az alábbi eredmény.

1. Tétel (Kepler II. törvénye). *A gravitációs centrumból a tömegpontba húzott sugárszakasz egyenlő időközök alatt egyenlő területű síkidomokat ír le.*

A pálya tengelyirányának kijelölése a mozgás síkjában

Bevezettük az $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az $r(t) = \|\boldsymbol{\gamma}(t)\| = \langle \boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\gamma}(t) \rangle^{1/2}$ összefüggéssel. Világos, hogy ennek deriváltjára fennáll az $r'(t) = \dfrac{\langle \boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\gamma}'(t) \rangle}{\langle \boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\gamma}(t) \rangle^{1/2}}$ egyenlőség.
Azt már igazoltuk, hogy a tömegpont egy síkgörbét ír le. Az alábbiakban megadunk egy olyan vektort, amely a leírt pálya szimmetriatengelyének az irányába mutat.

Tekintsük az

$$\mathbf{E}(t) = \frac{\boldsymbol{\gamma}(t)}{\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|} + \frac{1}{k\,M}\,(\mathbf{L} \times \boldsymbol{\gamma}'(t)) \tag{7}$$

kifejezéssel leírt $\mathbf{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt. Emlékezzünk rá, hogy k jelöli a gravitációs állandót és M az O-beli test tömegét. Vegyük észre, hogy $\mathbf{E}(t)$ merőleges az $\mathbf{L} = \boldsymbol{\gamma}(t) \times \boldsymbol{\gamma}'(t)$ sebességmomentumra, tehát $\mathbf{E}(t)$ benne van a mozgás S síkjában. Be fogjuk látni, hogy az $\mathbf{E}$ vektorfüggvény konstans. Az $\mathbf{E}$ függvény deriválásánál alkalmazzuk a szorzatfüggvényekre vonatkozó Leibniz-szabályt. Ily módon az

$$\mathbf{E}'(t) = \frac{1}{\langle \boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\gamma}(t) \rangle^{3/2}} \Big(\langle \boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\gamma}(t) \rangle\, \boldsymbol{\gamma}'(t) - \langle \boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\gamma}'(t) \rangle\, \boldsymbol{\gamma}(t) \Big) + \frac{1}{k\,M} \big(\mathbf{L} \times \boldsymbol{\gamma}''(t) \big)$$

összefüggést kapjuk. A fenti egyenlet jobb oldalán szereplő második tagnál alkalmazzuk a (3) egyenlőséget, továbbá a vektoriális szorzásra vonatkozó kifejtési tételt. Eszerint teljesül

$$\begin{aligned} \frac{1}{k\,M} \big(\mathbf{L} \times \boldsymbol{\gamma}''(t) \big) &= \frac{1}{k\,M} \Big(\frac{k\,M}{\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|^3}\, \boldsymbol{\gamma}(t) \times \mathbf{L} \Big) = \frac{1}{\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|^3} \Big(\boldsymbol{\gamma}(t) \times (\boldsymbol{\gamma}(t) \times \boldsymbol{\gamma}'(t)) \Big) \\ &= \frac{1}{\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|^3} \Big(\langle \boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\gamma}'(t) \rangle\, \boldsymbol{\gamma}(t) - \langle \boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\gamma}(t) \rangle\, \boldsymbol{\gamma}'(t) \Big). \end{aligned}$$

Az előbbi két egyenletből már következik, hogy $\mathbf{E}'(t) = \mathbf{0}$ bármely t mellett. Ily módon már igazoltuk is az alábbi kijelentést.
4. Állítás. *A (7) összefüggéssel leírt* $\mathbf{E}$ *vektorfüggvény konstans.*

Amennyiben $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$, akkor ezen $\mathbf{E}$ vektorral ki tudunk tüntetni egy irányt a mozgás S síkjában. Azonban először azt a speciális esetet vizsgáljuk majd meg, amikor $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

Az egyenletes körmozgás speciális esete

Tegyük fel, hogy a (7) kifejezéssel értelmezett $\mathbf{E}$ vektor eltűnik, azaz $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ teljesül. Ekkor fennáll a

$$\frac{\boldsymbol{\gamma}(t)}{\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|} = \frac{1}{k\,M}\,(\boldsymbol{\gamma}'(t) \times \mathbf{L})$$

egyenlőség. Ennek mindkét oldalát szorozzuk meg skalárisan a $\boldsymbol{\gamma}(t)$ vektorral. Azt kapjuk, hogy teljesül

$$\frac{\langle \boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\gamma}(t) \rangle}{\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|} = \frac{1}{k\,M}\, \langle \boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\gamma}'(t) \times \mathbf{L} \rangle\,.$$

Alkalmazva a három vektor vegyes szorzatával kapcsolatos felcserélési tételt az

$$\|\boldsymbol{\gamma}(t)\| = \frac{1}{k\,M}\, \langle \boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\gamma}'(t) \times \mathbf{L} \rangle = \frac{1}{k\,M}\, \langle \boldsymbol{\gamma}(t) \times \boldsymbol{\gamma}'(t), \mathbf{L} \rangle = \frac{L^2}{k\,M}$$

egyenlőséget nyerjük. Eszerint a tömegpont O-tól mért $r(t) = \|\boldsymbol{\gamma}(t)\|$ távolsága állandó. A fenti összefüggés alapján a tömegpont az O centrumú és $r = \dfrac{L^2}{k\,M}$ sugarú körpályán mozog az $\mathbf{L}$-re merőleges S síkban.

Mivel az $r(t)^2 = \langle \boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\gamma}(t)\rangle$ kifejezés is konstans, ennek deriválásával adódik, hogy $\langle \boldsymbol{\gamma}'(t), \boldsymbol{\gamma}(t)\rangle = 0$, tehát a $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ sebességvektor mindig merőleges $\boldsymbol{\gamma}(t)$-re. Emiatt teljesül $L = r \cdot \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|$. Ebből már következik, hogy a $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ sebességvektor $\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|$ nagysága is állandó. A fentiek alapján igaz a következő kijelentés.

5. Állítás. *Amennyiben fennáll $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, akkor a tömegpont egyenletes körmozgást végez az O kezdőpont körül.*

A tömegpont sebességének nagyságára vezessük be a $v(t) = \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|$ jelölést.

Megjegyzés. Egyenletes körmozgás esetén a sebességmomentum nagysága $L = r\,v$, ahol r jelöli a körpálya sugarát és v a konstans sebességet. Ily módon az $r = \dfrac{L^2}{k\,M}$ kifejezésből a $v^2 = \dfrac{k\,M}{r}$ összefüggés adódik a sebességre. Az r, v értékek ismeretében tehát kiszámíthatjuk M értékét is az $M = \dfrac{v^2\,r}{k}$ képlettel.

Megjegyzés. Amennyiben a Földnek a Nap körüli forgását körmozgással közelítjük, akkor a Föld sebességének közelítő értéke $v \approx 3 \cdot 10^4\, m/s$, a pálya sugara pedig $r \approx 1,5 \cdot 10^{11}\, m$. Korábban már említettük, hogy a gravitációs állandó $k \approx 6,67 \cdot 10^{-11}\, \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$. Eszerint a Nap tömegének becsült értéke $M \approx 2 \cdot 10^{30}\, kg$.

Egyébként a Föld által leírt ellipszispálya numerikus excentricitása igen kicsi, konkrétan $e_F = 0,0167 = 1,67 \cdot 10^{-2}$, tehát a körpálya egy igen jó közelítést ad.

Kepler I. törvénye

A továbbiakban feltesszük, hogy $\mathbf{E} \neq 0$ teljesül. Jelölje ezen vektor hosszát e, azaz legyen $e = \|\mathbf{E}\|$. A tömegpont mozgásának S síkjában tekintsük azt a polárkoordináta-rendszert, amelynél $\mathbf{E}$ adja meg a tengelyirányt és az $\mathbf{E}$, $\mathbf{L} \times \mathbf{E}$ merőleges vektorpár határozza meg a pozitív forgásirányt.

Egy síkbeli P $(P \neq O)$ pont pozícióját egyértelműen meghatározza az O kezdőponttól mért $r = OP$ távolsága és az $\mathbf{E}$, $\overrightarrow{OP}$ vektorok előjeles forgásszöge.

Eddigi ismereteink birtokában már igazolni tudjuk az alábbi tételt.

2. Tétel (Kepler I. törvénye). *A mozgó tömegpont pályája egy kúpszeleten van. Ezen kúpszelet egyik fókuszpontja megegyezik az O centrummal, amelyben az M tömegű test van. A tömegpont pályája aszerint lesz ellipszis, parabola vagy hiperbolaág, hogy $\|\mathbf{E}\| < 1$, $\|\mathbf{E}\| = 1$ vagy $\|\mathbf{E}\| > 1$ teljesül.*

Bizonyítás.

Az $\mathbf{E}$ vektort definiáló (7) egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg skalárisan a $\boldsymbol{\gamma}(t)$ helyvektorral. Ekkor a

$$\langle \boldsymbol{\gamma}(t), \mathbf{E}\rangle = \|\boldsymbol{\gamma}(t)\| + \frac{1}{k\,M}\,\langle \boldsymbol{\gamma}(t), \mathbf{L} \times \boldsymbol{\gamma}'(t)\rangle = \|\boldsymbol{\gamma}(t)\| - \frac{1}{k\,M}\,\langle \boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\gamma}'(t) \times \mathbf{L}\rangle$$

összefügéshez jutunk. Mivel fennáll $\langle \boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\gamma}'(t) \times \mathbf{L}\rangle = \langle \boldsymbol{\gamma}(t) \times \boldsymbol{\gamma}'(t), \mathbf{L}\rangle = \|\mathbf{L}\|^2$, ebből a

$$\langle \boldsymbol{\gamma}(t), \mathbf{E}\rangle = \|\boldsymbol{\gamma}(t)\| - \frac{L^2}{k\,M}$$

egyenlet adódik. Jelölje $\varphi(t)$ a kezdőirányt adó $\mathbf{E}$ vektor és a $\boldsymbol{\gamma}(t)$ vektor előjeles szögét. Fejezzük ki a $\langle\boldsymbol{\gamma}(t), \mathbf{E}\rangle$ skaláris szorzatot a két vektor hosszával és a bezárt szög koszinuszával. Ily módon a fenti egyenletből az

$$r(t) \cdot \|\mathbf{E}\| \cdot \cos\varphi(t) = r(t) - \frac{L^2}{k\,M}$$

összefüggést nyerjük, amelyben $r(t) = \|\boldsymbol{\gamma}(t)\|$ az O centrumból a tömegponthoz húzott sugárszakasz hossza. Eszerint a tömegpont $r(t)$, $\varphi(t)$ síkbeli polárkoordinátáira teljesül

$$r(t)\big(1 - \|\mathbf{E}\| \cdot \cos\varphi(t)\big) = \frac{L^2}{k\,M}\,. \tag{8}$$

Alkalmazzuk a $p = \dfrac{L^2}{k\,M}$ és $e = \|\mathbf{E}\|$ jelöléseket. Ez esetben (8)-ból azt kapjuk, hogy az $r(t)$, $\varphi(t)$ koordinátákra fennáll az

$$r(t) = \frac{p}{1 - e \cdot \cos\varphi(t)}$$

egyenlőség bármely t pillanatban. Eszerint a tömegpont pályája megegyezik az (1) egyenlettel meghatározott kúpszelettel, és ezen kúpszelet egyik fókusza az O kezdőpont.

A leírt pálya $e < 1$ fennállása esetén ellipszis, $e > 1$ esetén hiperbolaág, $e = 1$ esetén pedig parabola. $\square$

A fenti bizonyításban szereplő (8) összefüggésből következik az alábbi kijelentés.

1. Következmény. *A tömegpont által leírt kúpszelet paramétere* $p = \dfrac{L^2}{k\,M}$, *a numerikus excentricitása pedig* $e = \|\mathbf{E}\|$.

Kepler III. törvénye az ellipszispályán mozgó égitestekre

Tegyük fel, hogy a tömegpont ellipszispályát ír le, azaz a (7) kifejezéssel megadott $\mathbf{E}$ vektor hosszára fennáll $\|\mathbf{E}\| < 1$.

Az ellipszispálya egyszeri befutásának idejét jelölje T. Ezt mondjuk a tömegpont keringési idejének, illetve az O körüli keringés periódusidejének. A tömegpont által leírt ellipszis nagytengelyének félhosszát jelölje a, a kistengely félhosszát pedig jelölje b.

3. Tétel. *A tömegpont által leírt ellipszis nagytengelyének a félhosszával és a T keringési idővel fennáll az*

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k\,M}{4\,\pi^2} \tag{9}$$

összefüggés, amelyben M a centrális gravitációs erőteret létrehozó test tömege.

Bizonyítás.

Ismeretes, hogy az ellipszis területe $A = a\,b\,\pi$, ahol b a kistengely félhossza. A teljes ellipszist a T keringési idő alatt írja le az O centrumot a tömegponttal összekötő sugárszakasz. A 3. Állításban szereplő (5) kifejezés alapján teljesül az

$$a\,b\,\pi = \frac{1}{2}\,L\,T$$

egyenlőség. Ezt négyzetre emelve és felhasználva, hogy az ellipszis paramétere $p = b^2/a$ az

$$a^3\, p\, \pi^2 = \frac{1}{4}\, L^2\, T^2$$

egyenletet nyerjük. Korábban azt kaptuk, hogy fennáll $p = \dfrac{L^2}{k\, M}$. Emiatt a fenti egyenletből következik

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{1}{4}\, \frac{L^2}{p\, \pi^2} = \frac{k\, M}{4\, \pi^2}. \qquad \square$$

A fentiek során igazolt (9) összefüggésből már következik az alábbi tétel.

4. Tétel (Kepler III. törvénye). *A Naprendszerben a Nap körül ellipszispályán mozgó égitestek keringési idejeinek négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint a leírt ellipszisek félnagytengelyeinek köbei.*

Megjegyzés. A Naprendszerbeli bolygóknál az ellipszispályák a félnagytengelyeire és a T keringési időkre vonatkozó hányados közelítő értéke $\dfrac{a^3}{T^2} \approx 3,38 \cdot 10^{18}\, \dfrac{m^3}{s^2}$.

A pálya típusának és a tömegpont mechanikai energiájának kapcsolata

A továbbiakban is azt a tárgyaljuk, hogy miként mozog az m tömegű tömegpont a O centrumba helyezett M tömegű test gravitációs erőterében. Ezt követően is feltesszük, hogy a konstans $\mathbf{L} = \boldsymbol{\gamma}(t) \times \boldsymbol{\gamma}'(t)$ sebességmomentumra fennáll $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$.

A mozgó tömegpont t pillanatbeli mozgási (vagy más szóval kinetikus) energiáján a $K(t) = \frac{1}{2}\, m \cdot \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|^2$ értéket értjük. Ha a sebességvektor nagyságára a $v(t) = \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|$ jelölést alkalmazzuk, akkor a mozgási energia a $K(t) = \frac{1}{2}\, m\, v(t)^2$ kifejezéssel írható fel.

Azt a munkát, amelyet az O-beli test gravitációs tere végez a tömegponton mialatt az egy adott pontból *végtelen távol* kerül az O kezdőponttól, a tömegpont adott helyzethez tartozó potenciális energiájának mondjuk. Nem nehéz belátni, hogy ennek értéke csakis az adott pont O-tól mért távolságától függ. Igazolható, hogy a $\boldsymbol{\gamma}(t)$ helyvektorú ponthoz tartozó potenciális energia értékét az $U(t) = U(\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|) = -k \cdot \dfrac{m\, M}{\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|}$ összefüggés adja meg, amelyben k jelöli a gravitációs állandót. Az előjel azért negatív, mert a gravitációs erőtér negatív munkát végez, mialatt a tömegpont a $\boldsymbol{\gamma}(t)$ pontból *végtelen távol* kerül az O kezdőponttól.

A mozgási energia és a potenciális energia $H(t) = K(t) + U(t)$ összegét mondjuk a tömegpont mechanikai energiájának. A fentieknek megfelelően a centrális gravitációs erőtérbe helyezett tömegpontnak a t pillanatbeli mechanikai energiája a

$$H(t) = \frac{1}{2}\, m \cdot \langle \boldsymbol{\gamma}'(t), \boldsymbol{\gamma}'(t) \rangle - k \cdot \frac{m\, M}{\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|} \tag{10}$$

érték. Korábban már beláttuk, hogy a tömegpont egy kúpszelet mentén mozog. A következő állítás szerint $H(t)$ kapcsolatban van az $\mathbf{E}$ vektor hosszával.

6. Állítás. *A pálya tengelyirányát meghatározó $\mathbf{E}$ vektor hossza és a $H(t)$ mechanikai energia között fennáll az*

$$\|\mathbf{E}\|^2 - 1 = \frac{2\, L^2}{k^2\, m\, M^2}\, H(t) \tag{11}$$

összefüggés.

Bizonyítás. Vegyük az állításban szereplő

$$\mathbf{E} = \frac{\boldsymbol{\gamma}(t)}{\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|} + \frac{1}{k\,M}\,(\mathbf{L} \times \boldsymbol{\gamma}'(t))$$

vektort. Mivel $\dfrac{\boldsymbol{\gamma}(t)}{\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|}$ egy egységvektor, az $\mathbf{E}$ önmagával vett skaláris szorzatára igaz

$$\langle \mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle = 1 + \frac{2}{k\,M\,\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|}\,\langle \boldsymbol{\gamma}(t), \mathbf{L} \times \boldsymbol{\gamma}'(t) \rangle + \frac{1}{k^2\,M^2}\,\langle \mathbf{L} \times \boldsymbol{\gamma}'(t), \mathbf{L} \times \boldsymbol{\gamma}'(t) \rangle.$$

Amennyiben az egyenlet jobb oldalának második tagjánál alkalmazzuk a felcserélési tételt, a harmadik tagnál pedig felhasználjuk, hogy $\mathbf{L}$ és $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ merőlegesek egymásra, akkor azt kapjuk, hogy teljesül

$$\langle \mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle = 1 - \frac{2}{k\,M\,\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|}\,\langle \mathbf{L}, \mathbf{L} \rangle + \frac{1}{k^2\,M^2}\,\|\mathbf{L}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|^2\,.$$

Ebből már következik, hogy fennáll az

$$\langle \mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle - 1 = \frac{2\,L^2}{k^2\,m\,M^2}\left(\frac{1}{2}\,m \cdot \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|^2 - k \cdot \frac{m\,M}{\|\boldsymbol{\gamma}(t)\|}\right)$$

összefüggés, amely éppen a (11) egyenletnek felel meg. □

Az alábbi tétel szerint a mechanikai energia előjelétől függ, hogy a tömegpont milyen kúpszeletet ír le mozgása során.

5. Tétel. *A centrális gravitációs erőtérben mozgó tömegpont mechanikai energiája állandó. A tömegpont által leírt kúpszelet aszerint lesz ellipszis, parabola vagy hiperbolaág, hogy a tömegpont H mechanikai energiájára $H < 0$, $H = 0$ vagy $H > 0$ teljesül.*

Bizonyítás.

Mivel az $\mathbf{E}$ vektor konstans, (11) összefüggésből következik, hogy a (10) kifejezéssel értelmezett $H(t)$ mechanikai energia is állandó.

A (11) egyenlőség szerint a mozgó tömegpont által leírt kúpszelet $e = \|\mathbf{E}\|$ numerikus excentricitására teljesül

$$e^2 = 1 + \frac{2\,L^2}{k^2\,m\,M^2}\,H\,.$$

Ebből adódóan valóban a H mechanikai energia előjele dönti el, hogy $e < 1$, $e = 1$ vagy $e > 1$ teljesül. Mint ismeretes, e értékétől függ, hogy milyen típusú kúpszelet lesz a tömegpont (8) egyenlettel leírt pályája. □

Megjegyzés. A fenti tétel szerint a tömegpont pályája akkor ellipszis, ha $H < 0$.

Az egyenletes körmozgás (amikor $\mathbf{E} = \mathbf{0}$) egy speciális esetet jelent. Ekkor a kör r sugarával és a konstans v sebességgel fennáll $H = -\dfrac{k\,m\,M}{2\,r} = -\dfrac{1}{2}\,m\,v^2$.