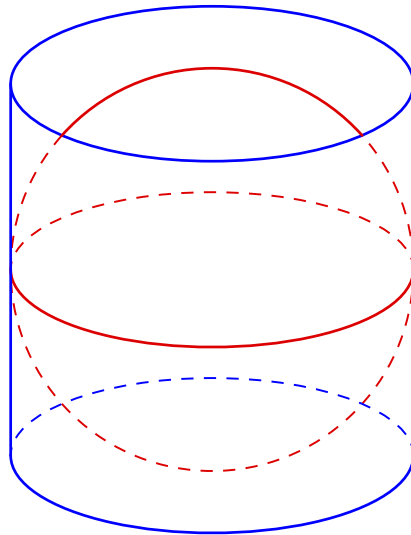


Verhóczy László

# Geometriai transzformációk

előadásjegyzet

matematikatanári szakos hallgatóknak



ELTE TTK Matematikai Intézet

Geometriai Tanszék

2020

## 1) Az egybevágósági és a hasonlósági transzformációk

Ebben a fejezetben részletesen tárgyaljuk a síkbeli és a térbeli egybevágósági transzformációkat. Többek között megadjuk a síkbeli egybevágóságok osztályozási tételét.

A korábban már bevezetett jelöléseket alkalmazzuk. Ennek megfelelően  $X$  a tér pontjainak halmazát jelöli. A  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  távolságfüggvény alapján értelmezzük a tér pontjainak távolságát. Valamely  $P, Q$  pontok távolságát  $d(P, Q)$  vagy egyszerűbben  $PQ$  fogja jelölni. A két pont összekötő szakaszát  $\overline{PQ}$ , a  $P$  kezdőpontú és  $Q$  végpontú irányított szakaszt pedig  $\overrightarrow{PQ}$  jelöli majd.

A tér szabad vektorainak terét  $\mathcal{V}$  fogja jelölni. A szabad vektorokat félkövér betűkkel jelöljük. Az  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  vektorok skaláris szorzatára az  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ , vektoriális szorzatukra pedig az  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  jelölést használjuk.

### Az egybevágósági transzformációk alapvető tulajdonságai

Idézzük fel a térbeli egybevágósági transzformáció fogalmát.

**1.1. Definíció.** Egybevágósági transzformáción (rövidebben egybevágóságon) egy olyan  $\varphi : X \rightarrow X$  bijektív leképezést értünk, amelynél bármely  $P, Q \in X$  pontokra fennáll a  $d(P, Q) = d(\varphi(P), \varphi(Q))$  összefüggés.

**Megjegyzés.** Az egybevágósági transzformációkra legegyszerűbb példa a pontra tükrözés és az adott vektorral történő eltolás.

Az eltolást korábban már értelmeztük. Eszerint a térnek az  $\mathbf{u}$  vektorral való eltolásán azt az  $\varepsilon : X \rightarrow X$  leképezést értjük, ahol tetszőleges  $P$  pont  $P' = \varepsilon(P)$  képre fennáll  $\overrightarrow{PP'} = \mathbf{u}$ .

**Megjegyzés.** Azt az egybevágósági transzformációt, amely minden pontot fixen hagy, *id* fogja jelölni. A fenti 1.1. Definícióból adódik, hogy igazak az az alábbi kijelentések.

(1) Ha  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$  térbeli egybevágósági transzformációk, akkor a kompozíciójukkal nyert  $\varphi_2 \circ \varphi_1 : X \rightarrow X$  leképezés is egy egybevágóság. Ez a  $\varphi_2 \circ \varphi_1$  egybevágósági transzformáció tetszőleges  $P \in X$  pontot a  $\varphi_2(\varphi_1(P))$  pontba képez. Tehát először a  $\varphi_1$  transzformációt hajtjuk végre, majd ezt követően a  $\varphi_2$  egybevágóságot.

(2) Ha  $\varphi$  egy térbeli egybevágóság, akkor a  $\varphi^{-1} : X \rightarrow X$  inverz leképezés is egy egybevágósági transzformáció.

**1.2. Definíció.** Legyenek adva a  $\varphi_2$  és  $\varphi_1$  térbeli egybevágósági transzformációk. Ezek szorzatán a  $\varphi_2 \circ \varphi_1 : X \rightarrow X$  egybevágóságot (azaz a két leképezés kompozícióját) értjük.

**Megjegyzés.** Könnyű belátni, hogy amennyiben  $\varphi_1, \varphi_2$  és  $\varphi_3$  térbeli egybevágóságok, akkor szorzataikra fennáll a  $\varphi_3 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1) = (\varphi_3 \circ \varphi_2) \circ \varphi_1$  egyenlőség. Ugyanis, mindkét zárójelzés esetében egy  $P$  pont képe egyazon  $\varphi_3(\varphi_2(\varphi_1(P)))$  pont lesz.

**Megjegyzés.** A távolságtartás miatt az egybevágóságokat szokás a tér izometriáinak (vagy izometrikus leképezéseinek) is nevezni. A leképezések kompozíciójára (mint szorzásműveletre) nézve a térbeli egybevágóságok egy csoportot alkotnak, amelyet a továbbiakban  $Iso(X)$  fog jelölni.

Eddigi ismereteink alapján már igazolni tudjuk az alábbi tételt.

**1.3. Tétel.** Tetszőleges  $\varphi : X \rightarrow X$  egybevágóságra igazak az alábbi kijelentések:

- (1) Egyenest egyenesbe, szakaszt szakaszba képez.
- (2) Bármely síknak a  $\varphi$  szerinti képe sík.
- (3) A  $\varphi$  egybevágóság párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe képez.
- (4) Ha valamely  $A, B, C, D$  pontokra fennáll az  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  összefüggés, akkor az  $A' = \varphi(A), B' = \varphi(B), C' = \varphi(C), D' = \varphi(D)$  képpontokkal teljesül  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$ .

### Az egybevágóság által indukált lineáris leképezés a szabad vektorok terén

Az 1.3. Tételben szereplő (4) kijelentés alapján az egybevágósági transzformációhoz hozzá lehet rendelni egy olyan leképezést, amely vektort vektorba képez. Emlékezzünk rá, hogy az euklideszi tér szabad vektorainak terét  $\mathcal{V}$  jelöli.

**1.4. Definíció.** Legyen adott egy  $\varphi : X \rightarrow X$  egybevágóság. A  $\varphi$  által a szabad vektorok terén indukált leképezésen azt a  $\hat{\varphi} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  függvényt értjük, ahol tetszőleges  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$  vektor képére fennáll  $\hat{\varphi}(\mathbf{u}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$ .

**Megjegyzés.** A fenti definíció alapján egy  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  szabad vektornak a  $\hat{\varphi}(\mathbf{u})$  képét az alábbi módon nyerjük. Vesszünk egy olyan  $\overrightarrow{AB}$  irányított szakaszt, amely az  $\mathbf{u}$  vektort reprezentálja, vagyis amelyre igaz  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ . Ezt követően tekintjük az  $A, B$  pontok  $A' = \varphi(A), B' = \varphi(B)$  képeit. A képpontok által meghatározott  $\overrightarrow{A'B'}$  irányított szakasz adja meg az  $\mathbf{u}$  vektor  $\hat{\varphi}$  általi képét, vagyis fennáll  $\hat{\varphi}(\mathbf{u}) = \overrightarrow{A'B'}$ .

Fontosnak tartjuk megjegyezni, hogy az 1.3. Tétel (4) kijelentése szerint az így kijelölt  $\hat{\varphi}(\mathbf{u})$  vektor nem függ az  $\mathbf{u}$ -t reprezentáló irányított szakasz megválasztásától.

**Megjegyzés.** Könnyen belátható, hogy tetszőleges  $\varepsilon : X \rightarrow X$  eltolás esetén az indukált  $\hat{\varepsilon} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  leképezésre fennáll  $\hat{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$  bármely  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  vektor esetén.

Legyen a  $\tau : X \rightarrow X$  leképezés a tér tükrözése egy  $O$  pontra. Vegyük észre, hogy ekkor teljesül  $\hat{\tau}(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$  bármely  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  vektorra.

A fenti definícióval kapcsolatos az alábbi állítás, amely többek között kimondja, hogy a  $\hat{\varphi}$  leképezés megőrzi a vektorok skaláris szorzatát.

**1.5. Állítás.** Legyen adott egy  $\varphi$  térbeli egybevágóság. Az általa indukált  $\hat{\varphi} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  leképezésre tetszőleges  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$  vektorok és  $\lambda \in \mathbb{R}$  szám esetén igazak az alábbi összefüggések:

$$(1) \hat{\varphi}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \hat{\varphi}(\mathbf{u}) + \hat{\varphi}(\mathbf{v}), \quad (2) \hat{\varphi}(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \hat{\varphi}(\mathbf{u}), \quad (3) \hat{\varphi}(\mathbf{u}) \cdot \hat{\varphi}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Emellett  $\hat{\varphi}$  egy bijektív leképezés.

Célszerűnek tűnik megadni az alábbi definíciót is, amely a Lineáris algebra egyik alapvető fogalmáról szól.

**1.6. Definíció.** A szabad vektorok terén legyen adott egy  $\alpha : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  leképezés. Az  $\alpha$ -t lineáris leképezésnek (vagy lineáris transzformációnak) mondjuk, ha tetszőleges  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$  vektorok és  $\lambda \in \mathbb{R}$  szám esetében teljesülnek az alábbi összefüggések:

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u}) + \alpha(\mathbf{v}), \quad \alpha(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \alpha(\mathbf{u}).$$

Amennyiben az  $\alpha$  lineáris leképezés bijektív, akkor  $\alpha$ -t lineáris izomorfizmusnak nevezzük.

## A síkbeli egybevágóságok

A térben vegyünk egy  $\sigma$  síkot. A síkbeli egybevágóság fogalma megfelel a térbeli egybevágóság fogalmának.

**1.7. Definíció.** A  $\sigma$  sík egybevágósági transzformációján egy olyan  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  bijektív leképezést értünk, amelynél tetszőleges  $P, Q \in \sigma$  pontok esetén fennáll  $d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q)$ .

**Megjegyzés.** Világos, hogy az eltolások és az elforgatások síkbeli egybevágósági transzformációkra. Célszerű itt megjegyezni, hogy a  $\sigma$  síknak egy  $C$  pontra történő tükrözése megegyezik a  $C$  körüli,  $\pi$  szögű elforgatással.

**Megjegyzés.** Az 1.3. Tételnek megfelelően a síkbeli egybevágóság egyenest egyenesbe, szakaszt szakaszba képez, továbbá megőrzi az egyenesek párhuzamosságát. Mivel a paralelogramma egybevágósággal nyert képe paralelogramma, igaz az 1.3. Tétel (4) kijelentése is.

Értelmezzük most a síkbeli tengelyes tükrözést.

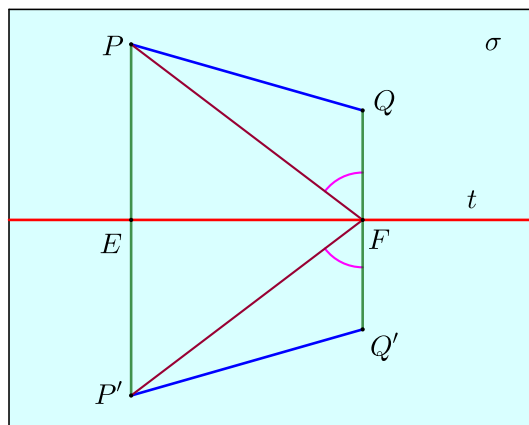
**1.8. Definíció.** A  $\sigma$  síkban legyen adott egy  $t$  egyenes. A síknak a  $t$  egyenesre történő tükrözésén azt a  $\tau : \sigma \rightarrow \sigma$  leképezést értjük, amely a  $t$  egyenes pontjait fixen hagyja és egy a  $t$ -re nem illeszkedő  $P$  pont  $\tau(P) = P'$  képét az alábbi feltételek határozzák meg.

- (1) A  $P'$  pont rajta van azon az egyenesen, amely merőleges  $t$ -re és áthalad  $P$ -n.
- (2) A merőleges egyenesnek a  $t$ -vel vett metszéspontja felezi a  $\overline{PP'}$  szakaszt.

Az egyenesre történő tükrözést tengelyes tükrözésnek is szokás nevezni.

**1.9. Állítás.** A tengelyes tükrözés egy egybevágósági transzformációja a síknak.

**Bizonyítás.** Tekintsük a  $t$  egyenesre történő  $\tau : \sigma \rightarrow \sigma$  tengelyes tükrözést. Legyenek  $P$



1. ábra. Szemléltető ábra a tengelyes tükrözéshez.

és  $Q$  valamely síkbeli pontok. Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor  $P$  és  $Q$  a  $t$  egyenes által határolt egyazon félsíkban vannak. A képpontok legyenek  $P' = \tau(P)$  és  $Q' = \tau(Q)$ .

A tükrözés definíciója következtében a  $\langle P, P' \rangle$  és  $\langle Q, Q' \rangle$  egyenesek derékszögben metszik el a  $t$  egyenest. A metszéspontokat jelölje  $E$  és  $F$ . Vegyük a  $\overline{PF}$  és  $\overline{P'F}$  szakaszokat is.

Világos, hogy a  $PEF\triangle$  és  $P'EF\triangle$  háromszögek egybevágóak, hiszen az  $EF$  oldal közös, fennáll  $EP = EP'$ , és az  $E$  csúcsbeli szögek derékszögek. Ebből viszont az következik, hogy  $PF = P'F$  és  $PFE\angle = P'FE\angle$  is teljesül. Vegyük észre, hogy emiatt fennáll a  $PFQ\angle = P'FQ'\angle$  egyenlőség is.

A  $PFQ\triangle$  és  $P'FQ'\triangle$  háromszögek ugyancsak egybevágóak egymással, mivel az  $F$  csúcsbeli szögeik egyenlőek, továbbá igaz  $FP = FP'$  és  $FQ = FQ'$ . Ennek következtében teljesül  $PQ = P'Q'$ .

Megfelelő háromszögek egybevágóságát felhasználva belátható, hogy a  $d(P, Q) = d(P', Q')$  egyenlőség akkor is fennáll, ha a  $P, Q$  pontok a  $t$  által határolt más-más félsíkban vannak.

A leírtak alapján a tengelyes tükrözés megőrzi a pontok távolságát.  $\square$

Az alábbi fogalom megfelel az 1.2. Definíciónak.

**1.10. Definíció.** Legyenek adva a  $\varphi_2 : \sigma \rightarrow \sigma$  és  $\varphi_1 : \sigma \rightarrow \sigma$  egyazon  $\sigma$  síkbeli egybevágósági transzformációk. Ezek szorzatán a  $\varphi_2 \circ \varphi_1 : \sigma \rightarrow \sigma$  síkbeli egybevágóságot (azaz a két leképezés kompozícióját) értjük.

Az alábbi állítás arra a kérdésre ad választ, hogy milyen egybevágóságot kapunk két tengelyes tükrözések szorzataként.

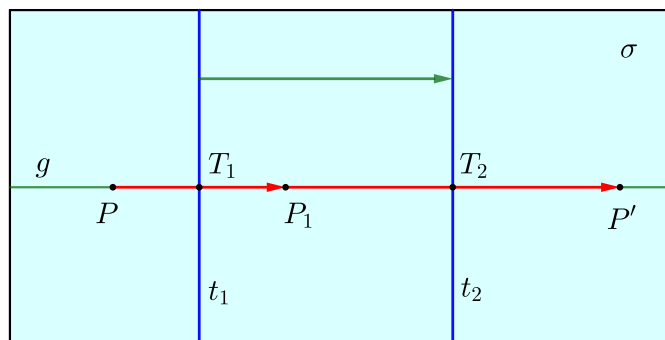
**1.11. Állítás.** A  $\sigma$  síkban legyenek adva a  $t_1, t_2$  ( $t_1 \neq t_2$ ) egyenesek. A  $t_1, t_2$  egyenesekre történő síkbeli tükrözéseket jelölje  $\tau_1$  és  $\tau_2$ .

(1) Ha a  $t_1, t_2$  egyenesek párhuzamosak, akkor a  $\tau_2 \circ \tau_1$  egybevágóság egy olyan eltolás a síkban, ahol az eltolás vektora merőleges a két egyenesre és hossza egyenlő a két egyenes távolságának a kétszeresével.

(2) Ha a  $t_1, t_2$  egyenesek metszik egymást egy  $C$  pontban, akkor  $\tau_2 \circ \tau_1$  egy olyan elforgatás  $C$  körül, amelynek szöge a két egyenes hajlásszögének a kétszerese.

**Bizonyítás.**

(1) Tegyük fel, hogy a  $t_1, t_2$  egyenesek párhuzamosak egymással. Vegyük a  $\sigma$  sík egy  $P$



2. ábra. Két tengelyes tükrözés szorzata egy eltolás, ha  $t_1$  és  $t_2$  párhuzamosak.

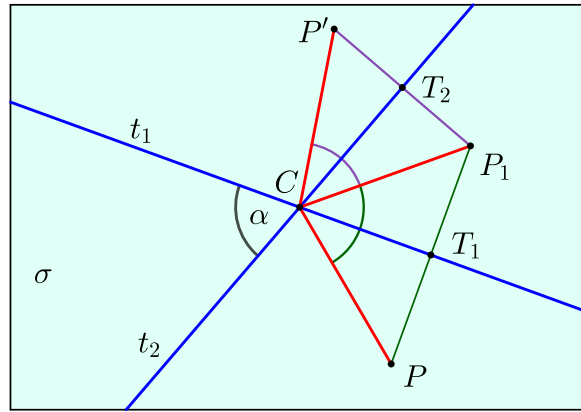
pontját. Jelölje  $g$  a  $P$ -n átmenő és a  $t_1, t_2$  tengelyekre merőleges egyenest. A  $g$  metszse el a  $T_1, T_2$  pontokban a  $t_1, t_2$  egyeneseket.

Tekintsük a  $P_1 = \tau_1(P)$  és  $P' = \tau_2(P_1) = \tau_2 \circ \tau_1(P)$  pontokat. A  $T_1$  és  $T_2$  pontok a  $\overline{PP_1}$  és  $\overline{P_1P'}$  szakaszok felezőpontjai. Ennek következtében a vektorokra fennáll  $\overrightarrow{PP_1} = 2 \cdot \overrightarrow{T_1P_1}$  és  $\overrightarrow{P_1P'} = 2 \cdot \overrightarrow{P_1T_2}$ . Ebből a

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1P'} = 2 \cdot \overrightarrow{T_1P_1} + 2 \cdot \overrightarrow{P_1T_2} = 2 \cdot (\overrightarrow{T_1P_1} + \overrightarrow{P_1T_2}) = 2 \cdot \overrightarrow{T_1T_2}$$

összefüggést nyerjük. Vegyük észre, hogy eszerint a  $\overrightarrow{PP'}$  vektor független a síkbeli  $P$  pont megválasztásától. Tehát a tengelyes tükrözések  $\tau_2 \circ \tau_1$  szorzata egy eltolás a tengelyekre merőleges irányban a  $2\overrightarrow{T_1T_2}$  vektorral.

(2) Tegyük fel, hogy a  $t_1, t_2$  egyenesek metszik egymást egy  $C$  pontban. A két egyenes hajlásszögét jelölje  $\alpha$ . Vegyünk a síkban egy  $P$  pontot és tükrözzük az a  $t_1$  egyenesre,



3. ábra. Két tengelyes tükrözés szorzata egy forgatás, ha  $t_1$  és  $t_2$  metszőek.

majd az így nyert pontot tükrözzük a  $t_2$ -re. Ezúttal is alkalmazzuk a  $P_1 = \tau_1(P)$  és  $P' = \tau_2(P_1) = \tau_2 \circ \tau_1(P)$  jelöléseket a képpontokra. A mellékelt 31. ábrának megfelelően az  $\overline{PP_1}$  és  $\overline{P_1P'}$  szakaszok metszsek el a  $t_1, t_2$  tengelyeket a  $T_1, T_2$  pontokban. Világos, hogy a  $C$  pontot mindkét tükrözés fixen hagyja, vagyis  $\tau_2 \circ \tau_1(C) = C$ . Mivel a tükrözések egybevágóságok, fennáll  $CP = CP_1 = CP'$ . Belátható, hogy az ábrán feltüntetett esetben a szögekre teljesül

$$\begin{aligned} \sphericalangle PCP' &= \sphericalangle PCP_1 + \sphericalangle P_1CP' = 2 \cdot \sphericalangle T_1CP_1 + 2 \cdot \sphericalangle P_1CT_2 \\ &= 2 \cdot (\sphericalangle T_1CP_1 + \sphericalangle P_1CT_2) = 2 \cdot \sphericalangle T_1CT_2 = 2\alpha. \end{aligned}$$

Tehát a  $\sphericalangle PCP'$  szög bármely  $P$  ( $P \neq C$ ) pont esetében megegyezik az  $\alpha$  hajlásszög kétszeresével. Mindezekből már következik, hogy a  $\tau_2 \circ \tau_1$  egybevágóság egy elforgatás a  $C$  pont körül  $2\alpha$  szöggel.  $\square$

**Megjegyzés.** A fenti 1.11. Állítással kapcsolatban vegyük észre, hogy a  $\tau_2 \circ \tau_1$  és  $\tau_1 \circ \tau_2$  egybevágóságok egyetlen speciális esettől eltekintve nem azonosak. (A speciális eset az, amikor  $t_1$  és  $t_2$  merőlegesek egymásra.)

Tegyük fel, hogy a tengelyek párhuzamosak. A  $t_1$  egyenes egy  $T_1$  pontjából a  $t_2$ -höz húzott merőleges talppontja legyen  $T_2$ . Ekkor a  $\tau_2 \circ \tau_1$  szorzatnál az eltolás vektora  $2\overrightarrow{T_1T_2}$ , míg a  $\tau_1 \circ \tau_2$  szorzat esetében az eltolás vektora  $-2\overrightarrow{T_1T_2}$ .

Kivételt képez az az eset, amikor a  $t_1$  és  $t_2$  tengelyek merőlegesek egymásra. Ekkor a  $\tau_2 \circ \tau_1$  és  $\tau_1 \circ \tau_2$  egybevágóságok azonosak a  $C$  metszéspontra való tükrözéssel.

Van egy olyan síkbeli egybevágóság, amelyek nem sorolható sem az elforgatások, sem a tengelyes tükrözések, sem pedig az eltolások közé.

**1.12. Definíció.** A  $\sigma$  síkban legyen adva egy  $t$  egyenes és egy vele párhuzamos  $\mathbf{u}$  ( $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ) vektor. A  $t$  egyenesre való  $\tau$  tükrözés és az  $\mathbf{u}$  vektorral történő  $\varepsilon$  eltolás  $\varepsilon \circ \tau$  szorzatát csúsztatva tükrözésnek mondjuk.

**Megjegyzés.** Az előző definícióval kapcsolatban vegyük észre, hogy a  $t$  egyenes és az  $\mathbf{u}$  vektor párhuzamossága miatt a tengelyes tükrözés és az eltolás sorrendje felcserélhető, vagyis fennáll  $\varepsilon \circ \tau = \tau \circ \varepsilon$ .

Jelölje  $\mathcal{V}_\sigma$  a  $\sigma$ -val párhuzamos szabad vektorok (vagyis a  $\sigma$ -beli irányított szakaszokkal reprezentált vektorok) halmazát. Egy  $\varphi$  síkbeli egybevágóságnál egy tetszőleges  $P$  pont  $\varphi(P)$  képére alkalmazzuk a  $P'$  jelölést is. Az 1.3. Tétel (4) kijelentése alapján értelmezni lehet az alábbi fogalmat.

**1.13. Definíció.** A  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  egybevágóság által a síkbeli vektorok  $\mathcal{V}_\sigma$  terén indukált leképezésen azt a  $\hat{\varphi} : \mathcal{V}_\sigma \rightarrow \mathcal{V}_\sigma$  függvényt értjük, ahol tetszőleges  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$  vektor képére fennáll  $\hat{\varphi}(\mathbf{u}) = \overrightarrow{A'B'}$ .

### A síkbeli egybevágóságok osztályozása

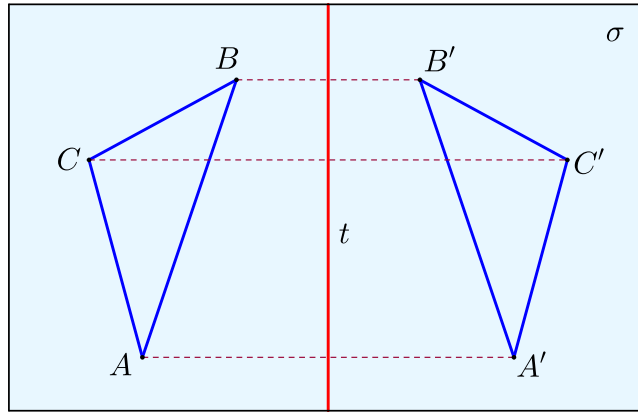
Mint ismeretes, a térben az irányítás fogalmát úgy vezettük be, hogy az ortogonális irányhármasokat két osztályba soroltuk. Eszerint vannak jobbkezes és balkezes ortogonális irányhármasok.

A síkot úgy lehet irányítani, hogy kitüntetjük az általa határolt két féltér egyikét és vesszük azt a síkra merőleges félegyenest, amely a kitüntetett féltérbe mutat. Ily módon a síkbeli zászlókat két osztályba lehet sorolni. Konkrétan, egy síkbeli zászló akkor tartozik az első osztályhoz, ha a zászló rúdjának irányába mutató félegyenes, a zászló lapjára mutató félegyenes és a kitüntetett féltérbe mutató félegyenes egy jobbkezes irányhármast ad.

**1.14. Definíció.** A  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  síkbeli egybevágósági transzformációt irányítástartónak mondjuk, ha  $\varphi$  a síkbeli zászlók két osztályát önmagukba képezi.

Amennyiben a  $\varphi$  egybevágóság felcseréli a síkbeli zászlók két osztályát, akkor  $\varphi$ -t irányításváltónak nevezzük.

**Megjegyzés.** Szemléletesen az irányítástartás, illetve az irányításváltás, az alábbi módon magyarázható el a középiskolában. Vegyünk egy  $ABC\Delta$  háromszöget és annak egy  $\varphi$  egybevágóság szerinti  $A'B'C'\Delta$  képét. Az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  ponthármasok ebben a sorrendben meghatároznak egy-egy forgásirányt a síkban. Ha ez a két forgásirány megegyezik, akkor a  $\varphi$  egybevágóság irányítástartó. Amennyiben a két forgásirány ellentétes, akkor  $\varphi$  irányításváltó.



4. ábra. A tengelyes tükrözésnél az  $A, B, C$  és az  $A', B', C'$  ponthármasokhoz tartozó forgásirányok ellentétesek.

**Megjegyzés.** Legyenek  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$  egybevágósági transzformációk a  $\sigma$  síkban. Vegyük észre, hogy amennyiben  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$  egyaránt irányítástartó vagy irányításváltó, akkor a  $\varphi_2 \circ \varphi_1$  egybevágóság irányítástartó.

Ha viszont a két egybevágóság közül az egyik irányítástartó és a másik irányításváltó, akkor a  $\varphi_2 \circ \varphi_1$  szorzat egy irányításváltó egybevágóság.

**Megjegyzés.** Világos, hogy az eltolások irányítástartóak. Azt is könnyű belátni, hogy a tengelyes tükrözések irányításváltó síkbeli egybevágóságok. (Lásd a 4. ábrát.)

Korábban már beláttuk, hogy egy síkbeli elforgatást mindig elő lehet állítani két tengelyes tükrözés szorzataként. Emiatt az elforgatások irányítástartóak. Vegyük észre, hogy a csúsztatva tükrözés egy irányításváltó egybevágóság.

A következő állítás fontos szerepet játszik a síkbeli egybevágóságok osztályozási tételének bizonyításában.

**1.15. Állítás.** A  $\sigma$  síkban legyenek adva az  $A_1, B_1$  ( $A_1 \neq B_1$ ) és  $A_2, B_2$  ( $A_2 \neq B_2$ ) pontpárok, melyekre fennáll  $A_1B_1 = A_2B_2$ . Két olyan  $\sigma$ -beli egybevágóság van, amely az  $A_1$  pontot az  $A_2$ -be, a  $B_1$  pontot pedig a  $B_2$ -be viszi.

A két egybevágóság közül az egyik irányítástartó, a másik pedig irányításváltó.

A következő tétel osztályozza a síkbeli egybevágóságokat.

**1.16. Tétel.** Legyen adott egy  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  síkbeli egybevágósági transzformáció.

(1) Ha a  $\varphi$  irányítástartó, akkor a  $\varphi$  vagy egy elforgatás, vagy pedig egy eltolás.

(2) Ha a  $\varphi$  irányításváltó, akkor a  $\varphi$  egybevágóság vagy egy tengelyes tükrözés, vagy pedig egy csúsztatva tükrözés.



## A síkbeli egybevágóságok analitikus leírása

Legyen adva a térben egy  $\sigma$  sík. Jelölje  $\mathcal{V}_\sigma$  a  $\sigma$ -val párhuzamos szabad vektorok (vagyis a  $\sigma$ -beli irányított szakaszokkal reprezentált vektorok) halmazát.

Rögzítsünk a  $\sigma$  síkban egy  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$  Descartes-féle koordináta-rendszert. Mint ismertes,  $O$  a kezdőpont és a merőleges  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  egységvektorok a koordináta-rendszer alapvektorai. Legyenek  $E_1, E_2$  a sík azon pontjai, melyek helyvektoraira fennáll  $\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{i}$  és  $\overrightarrow{OE_2} = \mathbf{j}$ . A síkot irányítsuk oly módon, hogy az  $O$  körüli  $\pi/2$  szögű elforgatás az  $E_1$  pontot az  $E_2$  pontba vigye. Ez azt jelenti, hogy az  $O, E_1, E_2$  pontháromhoz tartozó  $\mathcal{Z}(O, E_1, E_2)$  síkbeli zászló a zászlók első osztályához tartozik.

Tekintsünk egy  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  egybevágósági transzformációt a  $\sigma$  síkban. Az 1.13. Definíciónak megfelelően  $\varphi$  indukál egy  $\hat{\varphi} : \mathcal{V}_\sigma \rightarrow \mathcal{V}_\sigma$  leképezést, amelyet a  $\hat{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$  összefüggés ír le tetszőleges  $A, B \in \sigma$  pontokra. Az 1.4. Állításnak megfelelően a  $\hat{\varphi}$  indukált leképezésre teljesülnek az

$$\hat{\varphi}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \hat{\varphi}(\mathbf{u}) + \hat{\varphi}(\mathbf{v}), \quad \hat{\varphi}(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \hat{\varphi}(\mathbf{u}), \quad \hat{\varphi}(\mathbf{u}) \cdot \hat{\varphi}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

összefüggések.

Fejezzük ki a  $\hat{\varphi}(\mathbf{i}), \hat{\varphi}(\mathbf{j})$  ortonormált képvektorokat az  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  bázisvektorok lineáris kombinációjaként az

$$\hat{\varphi}(\mathbf{i}) = a_{11} \mathbf{i} + a_{21} \mathbf{j}, \quad \hat{\varphi}(\mathbf{j}) = a_{12} \mathbf{i} + a_{22} \mathbf{j}$$

egyenletek formájában. Világos, hogy az ezekben szereplő együtthatók egyértelműek.

**1.17. Definíció.** A fenti kifejezések együtthatóiból képzett  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  mátrixot nevezzük a  $\hat{\varphi}$  leképezés  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  bázisra vonatkozó mátrixának.

**Megjegyzés.** Mivel a  $\hat{\varphi}$  indukált leképezés megőrzi a skaláris szorzatot, az  $\mathbf{A}$  mátrix oszlopainak megfelelő  $a_{11} \mathbf{i} + a_{21} \mathbf{j}$  és  $a_{12} \mathbf{i} + a_{22} \mathbf{j}$  vektorok egymásra merőleges egységvektorok. Alkalmazzuk most az  $a = a_{11}$  és  $b = a_{21}$  jelölést. A fentiek alapján az  $\mathbf{A}$  mátrix előáll vagy az  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  alakban, vagy pedig az  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$  alakban olyan  $a, b$  valós számokkal, melyekre fennáll az  $a^2 + b^2 = 1$  összefüggés.

Az algebrai tanulmányokból már ismeretes, hogy az  $\mathbf{A}$  mátrix transzponáltján az  $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$  mátrixot értjük. Vegyük a  $2 \times 2$ -es  $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  egységmátrixot. A könnyebb áttekinthetőségérdekében a valamely  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  vektorok skaláris szorzatát a továbbiakban  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  fogja jelölni  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  helyett.

A fentiek alapján már könnyen igazolni lehet az alábbi kijelentést.

**1.18. Állítás.** Legyen adva egy tetszőleges  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  síkbeli egybevágóság. A  $\hat{\varphi}$  indukált leképezés  $\mathbf{A}$  mátrixára teljesül az  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$  összefüggés.

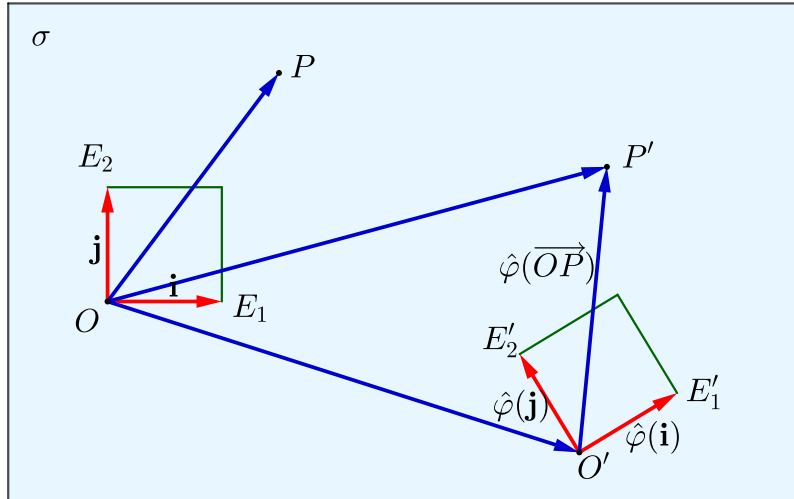
**Bizonyítás.**

A leírtaknak megfelelően a  $\hat{\varphi}$  indukált leképezés megőrzi a síkbeli vektorok hosszát és skaláris szorzatát. Emiatt  $\hat{\varphi}(\mathbf{i})$  és  $\hat{\varphi}(\mathbf{j})$  olyan egységvektorok, amelyek merőlegesek egymásra.

Ennek ismeretében közvetlen számolással adódik, hogy teljesül

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{11} + a_{21} a_{21} & a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} \\ a_{12} a_{11} + a_{22} a_{21} & a_{12} a_{12} + a_{22} a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \hat{\varphi}(\mathbf{i}), \hat{\varphi}(\mathbf{i}) \rangle & \langle \hat{\varphi}(\mathbf{i}), \hat{\varphi}(\mathbf{j}) \rangle \\ \langle \hat{\varphi}(\mathbf{j}), \hat{\varphi}(\mathbf{i}) \rangle & \langle \hat{\varphi}(\mathbf{j}), \hat{\varphi}(\mathbf{j}) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

□



5. ábra. Szemléltető ábra az 1.18. és 1.19. Állítások igazolásához.

Az egybevágósági transzformációnál a képpont koordinátáit az alábbiak szerint lehet kifejezni a kiindulási pont koordinátáiból.

**1.19. Állítás.** Legyen adott egy  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  egybevágóság. Az  $O$  kezdőpont  $O' = \varphi(O)$  képének koordinátái legyenek  $(b_1, b_1)$  és a  $\hat{\varphi}$  leképezést az  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  bázisra vonatkozóan írja le az  $\mathbf{A}$  mátrix. Ekkor tetszőleges  $P(x, y)$  pont  $P' = \varphi(P)$  képének  $(x', y')$  koordinátáira fennáll a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

mátrixegyenlet.

**Bizonyítás.**

Vegyünk egy  $\sigma$ -beli  $P$  pontot, amelynek helyvektorát állítsuk elő az  $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  alakban. A  $P' = \varphi(P)$  képpont koordinátapárja legyen  $(x', y')$ , ami annyit jelent, hogy igaz  $\overrightarrow{O'P'} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}$ . Vegyük észre, hogy fennáll

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'P'} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{OO'} + \hat{\varphi}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OO'} + \hat{\varphi}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \\ &= \overrightarrow{OO'} + x\hat{\varphi}(\mathbf{i}) + y\hat{\varphi}(\mathbf{j}). \end{aligned}$$

Ily módon  $\overrightarrow{OO'} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j}$  ismeretében azt kapjuk, hogy teljesül

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'} &= b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + x(a_{11} \mathbf{i} + a_{21} \mathbf{j}) + y(a_{12} \mathbf{i} + a_{22} \mathbf{j}) \\ &= (a_{11}x + a_{12}y + b_1) \mathbf{i} + (a_{21}x + a_{22}y + b_2) \mathbf{j}.\end{aligned}$$

Mivel  $\overrightarrow{OP'}$  egyértelműen áll elő az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  bázisvektorok lineáris kombinációjaként, így fennáll

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2.\end{aligned}$$

Ez a két egyenlet pedig egyenértékű az alábbi mátrixegyenlettel

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Ily módon az állítás bizonyítást nyert.  $\square$

Célszerűnek tűnik megadni a következő fogalmat is, amellyel már bizonyára találkozott az olvasó az algebrai tanulmányaiban.

**1.20. Definíció.** Egy  $n \times n$ -es  $\mathbf{A}$  valós mátrixot ortogonálisnak mondunk, ha a transzponáltjával fennáll az  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$  összefüggés, ahol  $\mathbf{E}$  az  $n$ -edrendű egységmátrixot jelöli ( $n \geq 2$ ).

Emlékezzünk rá, hogy a tekintett  $\sigma$  síkban rögzítve van egy derékszögű koordináta-rendszer. Igazolható a következő állítás is.

**1.21. Állítás.** Legyen adott egy  $2 \times 2$ -es ortogonális  $\mathbf{A}$  mátrix, továbbá valamely  $b_1$ ,  $b_2$  valós számok. Tekintsük azt a  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  leképezést, ahol tetszőleges  $P(x, y)$  pont  $P' = \varphi(P)$  képének  $(x', y')$  koordinátáit az

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

mátrixegyenlet adja meg. Ekkor a  $\varphi$  leképezés egy síkbeli egybevágóság.

### Síkbeli egybevágóságok indukált leképezésének mátrixa

Korábban már beláttuk, hogy az *id* helybenhagyás mellett mindössze négyféle síkbeli egybevágóság van: eltolás, elforgatás, tengelyes tükrözés, csúsztatva tükrözés.

Amennyiben egy  $\varepsilon : \sigma \rightarrow \sigma$  eltolást veszünk, akkor a  $\hat{\varepsilon}$  indukált leképezésre fennáll  $\hat{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$  bármely  $\mathbf{u}$  vektorra. Emiatt ennek mátrixa azonos az  $\mathbf{E}$  egységmátrixszal.

A  $\sigma$  síkban legyen adott egy  $C$  pont, továbbá egy  $\alpha$  ( $-\pi < \alpha \leq \pi$ ) előjeles szög. Tekintsük a  $C$  körüli,  $\alpha$  szögű  $\varrho : \sigma \rightarrow \sigma$  elforgatást. Mivel a  $\pi/2$  szögű elforgatás az  $\mathbf{i}$  bázisvektort a  $\mathbf{j}$ -be viszi, továbbá  $\mathbf{j}$ -t a  $-\mathbf{i}$  vektorba képezi, a  $\hat{\varrho}(\mathbf{i})$ ,  $\hat{\varrho}(\mathbf{j})$  vektorokra fennáll

$$\hat{\varrho}(\mathbf{i}) = \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}, \quad \hat{\varrho}(\mathbf{j}) = \cos \alpha \mathbf{j} + \sin \alpha (-\mathbf{i}) = -\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j}.$$

Eszerint a  $\hat{\varrho}$  indukált lineáris leképezést az  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  mátrix írja le.

Tekintsünk a  $\sigma$  síkban egy  $t$  egyenest. Legyen a  $\tau : \sigma \rightarrow \sigma$  egybevágóság a  $t$  egyenesre történő tükrözés. Vegyünk az egyik olyan  $\mathbf{w}$  egységvektort, amely párhuzamos a  $t$ -vel. Amennyiben a  $\mathbf{w}$ -t az  $\mathbf{i}$  alapvektor  $\beta$  szögű elforgatásával nyerjük, akkor teljesül  $\mathbf{w} = \cos\beta \mathbf{i} + \sin\beta \mathbf{j}$ . Ez esetben a  $\hat{\tau}(\mathbf{i})$  vektor megegyezik az  $\mathbf{i}$  egységvektor  $2\beta$  szögű elforgatottjával, azaz fennáll  $\hat{\tau}(\mathbf{i}) = \cos(2\beta) \mathbf{i} + \sin(2\beta) \mathbf{j}$ . A  $\hat{\tau}(\mathbf{i})$ ,  $\hat{\tau}(\mathbf{j})$  vektorok egy olyan ortonormált bázist képeznek a  $\mathcal{V}_\sigma$  vektortérben, amely a második bázisosztályhoz tartozik. Emiatt a  $\hat{\tau}(\mathbf{j})$  képvektor  $(-1)$ -szerese a  $\mathbf{j}$   $2\beta$  szögű elforgatottjának, vagyis igaz  $\hat{\tau}(\mathbf{j}) = \sin(2\beta) \mathbf{i} - \cos(2\beta) \mathbf{j}$ . Ily módon azt kapjuk, hogy a  $\hat{\tau} : \mathcal{V}_\sigma \rightarrow \mathcal{V}_\sigma$  indukált lineáris leképezés  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  bázisra vonatkozó mátrixára teljesül  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix}$ .

Vezessük be a  $w_1 = \cos\beta$ ,  $w_2 = \sin\beta$  jelölést. A szögfüggvényekre vonatkozó addíciós képletek alkalmazásával a fenti kifejezésből azt kapjuk, hogy a  $\hat{\tau}$  leképezés mátrixa a  $\mathbf{w} = w_1 \mathbf{i} + w_2 \mathbf{j}$  egységvektor koordinátaival is felírható az  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2(w_1)^2 - 1 & 2w_1w_2 \\ 2w_1w_2 & 1 - 2(w_2)^2 \end{pmatrix}$  alakban.

**Megjegyzés.** Amennyiben a  $\varphi$  egybevágóság egy csúsztatva tükrözés, akkor az egy  $t$  egyenesre történő  $\tau$  tükrözés és egy  $\varepsilon$  eltolás szorzata. Belátható, hogy ekkor a  $\hat{\varphi}$  leképezés mátrixa megegyezik  $\hat{\tau}$  mátrixával.

**Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy amennyiben a  $\varphi$  síkbeli egybevágóság irányítástartó, akkor az  $\mathbf{A}$  mátrix determinánsára fennáll  $\det \mathbf{A} = 1$ . Ha a  $\varphi$  egybevágósági transzformáció irányításváltó, akkor  $\det \mathbf{A} = -1$  teljesül.

## A térbeli egybevágóságok áttekintése

A térbeli egybevágóságokra eddig a pontra való tükrözés és az eltolás szolgáltak példaként. A következőkben a térbeli egybevágóságok további osztályait fogjuk értelmezni.

Analitikus geometriai tanulmányaink során a jobbkezes és a balkezes ortogonális irányhármasok alapján már két osztályba soroltuk a térbeli zászlókat. Világos, hogy az egybevágóság ortogonális irányhármasot ortogonális irányhármasba képez.

**1.22. Definíció.** Legyen adva egy  $\varphi : X \rightarrow X$  egybevágósági transzformáció. A  $\varphi$ -t irányítástartó egybevágóságnak mondjuk, ha a jobbkezes és a balkezes ortogonális irányhármasok osztályait önmagukba képezi. A  $\varphi$ -t irányításváltó egybevágóságnak nevezzük, ha a jobbkezes és a balkezes ortogonális irányhármasok osztályait felcseréli.

**Megjegyzés.** Könnyű belátni, hogy az eltolás irányítástartó, a pontra tükrözés pedig egy irányításváltó térbeli egybevágóság.

A térbeli egybevágóságok egyik alapvető osztályát képezik a síkra történő tükrözések.

**1.23. Definíció.** Legyen adva a térben egy  $\sigma$  sík. A  $\sigma$  síkra történő tükrözésen azt a  $\tau : X \rightarrow X$  leképezést értjük, amely a  $\sigma$  sík pontjait fixen hagyja és egy a  $\sigma$ -ra nem illeszkedő  $P$  pont  $P' = \tau(P)$  képét az alábbi feltételek határozzák meg.

- (1) A  $P'$  pont rajta van azon az egyenesen, amely merőleges  $\sigma$ -ra és áthalad  $P$ -n.
- (2) A merőleges egyenesnek a  $\sigma$ -val vett metszéspontja felezi a  $\overline{PP'}$  szakaszt.

Az 1.9. Állítás bizonyítását követve lehet igazolni az alábbi kijelentést.

**1.24. Állítás.** A síkra történő tükrözés egy irányításváltó egybevágósági transzformáció.

Az irányított síkban a pont körüli elforgatást (egy előjeles szöggel) az Analitikus geometria c. jegyzetben már értelmeztük. Ezzel kapcsolatos a következő térbeli transzformáció fogalma.

**1.25. Definíció.** Legyen adott a térben egy  $t$  egyenes, amelyen ki van jelölve az egyik irányítás egy vele párhuzamos  $\mathbf{v}$  ( $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ) vektorral. Az irányított  $t$  egyenes körüli  $\alpha$  ( $-\pi < \alpha \leq \pi$ ) előjeles szögű elforgatáson azt a  $\varrho : X \rightarrow X$  bijektív leképezést értjük, amely a  $t$  egyenes pontjait fixen hagyja, egy  $P$  ( $P \notin t$ ) pont  $P' = \varrho(P)$  képét pedig az alábbi módon nyerjük:

A  $P$  ponton áthaladó és a  $t$ -re merőleges  $\mu$  síknak a  $t$ -vel vett metszéspontját jelölje  $C$ . Ezen a  $\mu$  síkon vegyük a  $\mathbf{v}$  merőleges vektor által meghatározott irányítást. A  $P' = \varrho(P)$  pont megegyezik  $P$ -nek a  $\mu$  síkbeli,  $C$  pont körüli,  $\alpha$  szögű elforgatottjával.

**Megjegyzés.** A fenti definícióban szereplő  $\varrho$  térbeli transzformációra a tengely körüli forgatás elnevezést is szokás használni. A  $t$  egyenest nevezzük a forgatás tengelyének.

**Megjegyzés.** A  $t$  tengely körüli  $\alpha = \pi$  szögű elforgatást a  $t$  egyenesre történő térbeli tükrözésnek is mondjuk. Ezen  $\varrho : X \rightarrow X$  transzformációnál a fixen hagyott pontok halmaza  $t$ . Egy a  $t$ -re nem illeszkedő  $P$  pont esetén a  $\langle P, \varrho(P) \rangle$  egyenes derékszögben metszi a  $t$  egyenest, és a metszéspont a  $\overline{P\varrho(P)}$  szakasz felezőpontja.

Evidens, hogy az  $\alpha = 0$  szögű elforgatás éppen az  $id_X$  identikus leképezést adja.

**Megjegyzés.** Amennyiben az 1.25. Definícióban szereplő  $\varrho : X \rightarrow X$  elforgatás szögére igaz  $\alpha \neq 0$  és  $\alpha \neq \pi$ , akkor a  $t$  tengelyre nem illeszkedő  $P$  pont  $P' = \varrho(P)$  képét az alábbi

feltételek szintén meghatározzák:

- (1) A  $P'$  pont rajta van a  $P$ -n áthaladó, a  $t$ -re merőleges  $\mu$  síkon.
- (2) A  $C = \mu \cap t$  metszésponttal fennáll  $CP = CP'$  és  $\angle PCP' = |\alpha|$ .
- (3) Ha  $\alpha > 0$ , akkor a  $\mathbf{v}$ ,  $\overrightarrow{CP}$ ,  $\overrightarrow{CP'}$  vektorok (ebben a sorrendben) egy jobbrendszert alkotnak. Amennyiben  $\alpha < 0$ , akkor a  $\mathbf{v}$ ,  $\overrightarrow{CP}$ ,  $\overrightarrow{CP'}$  vektorok egy balrendszert képeznek.

Felvetődik a kérdés, hogy az egyenes körüli elforgatás vajon megőrzi-e a pontok távolságát. Erre a következő állítás alapján adhatunk választ. Ennek bizonyítása analóg az 1.11. Állítás igazolásával.

**1.26. Állítás.** *A térben legyenek adva a  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ( $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ) síkok. A  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  síkokra történő tükrözéseket jelölje  $\tau_1$  és  $\tau_2$ .*

(1) *Ha a  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  síkok párhuzamosak, akkor a  $\tau_2 \circ \tau_1$  egybevágóság egy eltolás a térben. Az eltolás vektora merőleges a két síkra és hossza egyenlő a két egyenes távolságának a kétszeresével.*

(2) *Ha a  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  egyenesek metszik egymást egy  $t$  egyenesben, akkor  $\tau_2 \circ \tau_1$  egy elforgatás a  $t$  tengely körül. Az elforgatás szöge a két sík hajlásszögének a kétszerese.*

Az 1.26. Állítás ismeretében az alábbi a kijelentést tehetjük.

**1.27. Következmény.** *A tengely körüli elforgatás egy irányítástartó térbeli egybevágóság.*

Az irányítástartó egybevágóságokat nevezik mozgásoknak. Ezek fontos szerepet játszanak a mechanikában a merev testek mozgásainak tanulmányozása során.

**1.28. Definíció.** *Legyen adott a térben egy  $t$  egyenes és egy azzal párhuzamos  $\mathbf{u}$  ( $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ) vektor. Egy a  $t$  tengely körüli  $\varrho$  elforgatás és a  $\mathbf{u}$  vektorral való  $\varepsilon$  eltolás  $\varepsilon \circ \varrho$  szorzatát csavarmozgásnak mondjuk.*

Igazolni a következő alapvető tételt is, melyet ezúttal bizonyítás nélkül mondunk ki.

**1.29. Tétel.** *Legyen a  $\varphi : X \rightarrow X$  leképezés egy irányítástartó térbeli egybevágóság. Ekkor a  $\varphi$  transzformáció vagy egy eltolás, vagy egy egyenes körüli elforgatás, vagy pedig egy csavarmozgás.*

**Megjegyzés.** *A fenti tételből már következik, hogy ha egy térbeli irányítástartó egybevágóságnak van fixpontja, akkor az egy tengely körüli elforgatás.*

## A hasonlósági transzformációk

Mint ismeretes, egy  $\eta : X \rightarrow X$  bijektív leképezést térbeli hasonlóságnak mondunk a  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) aránnyal, ha tetszőleges  $A, B$  pontokra fennáll a  $d(\eta(A), \eta(B)) = \lambda \cdot d(A, B)$  összefüggés.

Könnyű belátni, hogy amennyiben  $\eta_1$  és  $\eta_2$  hasonlósági transzformációk a  $\lambda_1, \lambda_2$  arányokkal, akkor az  $\eta_2 \circ \eta_1 : X \rightarrow X$  szorzat-leképezés is egy hasonlóság a  $\lambda_1 \lambda_2$  aránnyal.

A hasonlósági transzformációk tulajdonságainak vizsgálatánál kiemelt szerepet játszanak a középpontos hasonlóságok. Evidens, hogy amennyiben a  $\kappa : X \rightarrow X$  transzformáció az  $O$  centrumú  $\lambda$  előjeles arányú középpontos hasonlóság, akkor a  $\kappa^{-1}$  inverz-leképezés éppen az  $O$  centrumú,  $1/\lambda$  arányú középpontos hasonlóságot adja.

Az egyik alapvető tétel szerint egy tetszőleges  $\eta$  hasonlóság előáll egy  $\varphi$  egybevágóság és egy  $\kappa$  középpontos hasonlóság szorzataként, azaz teljesül  $\eta = \kappa \circ \varphi$ . Ennek következtében egy  $\eta$  hasonlóságra is igazak az 1.3. Tételben szereplő (1)–(4) kijelentések. Ily módon értelmezni lehet a hasonlóság által a szabad vektorok terén indukált leképezést is.

**1.30. Definíció.** Az  $\eta : X \rightarrow X$  hasonlósági transzformáció által a szabad vektorok terén indukált leképezésen azt az  $\hat{\eta} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  függvényt értjük, ahol tetszőleges  $A, B \in X$  pontokra fennáll  $\hat{\eta}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\eta(A)\eta(B)}$ .

Nem nehéz belátni, hogy az  $\hat{\eta}$  indukált leképezés egy olyan lineáris izomorfizmus a  $\mathcal{V}$  vektortéren, amely megőrzi a vektorok hajlásszögét.

Ugyancsak könnyen igazolható az alábbi kijelentés. Ha a  $\kappa$  transzformáció egy középpontos hasonlóság a  $\lambda$  előjeles aránnyal, akkor tetszőleges  $\mathbf{u}$  vektorra teljesül  $\hat{\kappa}(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}$ , tehát az indukált leképezésre fennáll  $\hat{\kappa} = \lambda \cdot id_{\mathcal{V}}$ .

Akárcsak az egybevágóságok esetében a hasonlóságok között is értelmezni lehet az irányítástartó és az irányításváltó transzformációkat.

## A síkbeli hasonlósági transzformációk osztályozása

A továbbiakban a síkbeli hasonlóságokat vizsgáljuk.

Legyen adva a tér egy  $\sigma$  síkja. Egy  $\eta : \sigma \rightarrow \sigma$  bijektív leképezést a  $\sigma$  síkbeli hasonlóságnak mondunk a  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) aránnyal, ha bármely  $A, B \in \sigma$  pontokra teljesül a  $d(\eta(A), \eta(B)) = \lambda \cdot d(A, B)$  egyenlőség.

Evidens, hogy az egybevágósági transzformációk is hasonlóságok a  $\lambda = 1$  aránnyal. A végső célunk megmutatni, hogy az egybevágóságoktól különböző síkbeli hasonlóságoknak mindössze két osztályuk van. Először a két síkbeli hasonlóság fogalmát értelmezzük.

**1.31. Definíció.** A  $\sigma$  síkban legyen adott egy  $C$  pont. Legyen a  $\varrho : \sigma \rightarrow \sigma$  leképezés egy  $C$  körüli elforgatás, továbbá a  $\kappa : \sigma \rightarrow \sigma$  transzformáció egy a  $C$  centrumú középpontos hasonlóság valamely  $\lambda > 0$  aránnyal. Ekkor az elforgatás és a középpontos hasonlóság  $\kappa \circ \varrho$  szorzatát forgatva nyújtásnak nevezzük.

**Megjegyzés.** Nyilvánvaló, hogy a  $\kappa \circ \varrho$  forgatva nyújtás egy síkbeli hasonlóság a  $\lambda$  aránnyal. Vegyük észre, hogy fennáll  $\kappa \circ \varrho = \varrho \circ \kappa$ , vagyis a forgatás és a nyújtás sorrendje felcserélhető. Emiatt ezt a hasonlóságot szokás nyújtva forgatásnak is nevezni.

**Megjegyzés.** A síkbeli középpontos hasonlóságokat tekinthetjük olyan forgatva nyújtásoknak, ahol az elforgatás szöge vagy  $\alpha = 0$ , vagy pedig  $\alpha = \pi$ .

**1.32. Definíció.** A  $\sigma$  síkban legyen adott egy  $t$  egyenes és azon egy  $C$  pont. Legyen a  $\tau : \sigma \rightarrow \sigma$  leképezés a  $t$  egyenesre történő tükrözés, továbbá  $\kappa : \sigma \rightarrow \sigma$  egy a  $C$  centrumú középpontos hasonlóság valamely  $\lambda > 0$  aránnyal. Ekkor a tengelyes tükrözés és a középpontos hasonlóság  $\kappa \circ \tau$  szorzatát tükrözve nyújtásnak nevezzük.

**Megjegyzés.** Evidens, hogy a  $\kappa \circ \tau$  tükrözve nyújtás egy síkbeli hasonlóság a  $\lambda$  aránnyal. Könnyű belátni, hogy fennáll a  $\kappa \circ \tau = \tau \circ \kappa$  összefüggés, vagyis a tengelyes tükrözés és a nyújtás sorrendje felcserélhető. Emiatt ezt a hasonlóságot szokás nyújtva tükrözésnek is nevezni.

### A síkbeli hasonlóság analitikus leírása

A továbbiakban feltesszük, hogy a tekintett  $\sigma$  síkban rögzítve van egy  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$  derékszögű koordináta-rendszer.

Legyen adott egy  $\eta : \sigma \rightarrow \sigma$  síkbeli hasonlóság, amelynek aránya  $\lambda$ . Tekintsük az  $O$  centrumú és  $\lambda$  arányú  $\kappa : \sigma \rightarrow \sigma$  középpontos hasonlóságot. Ekkor a  $\varphi = \kappa^{-1} \circ \eta$  transzformáció egy síkbeli egybevágóság, amellyel teljesül  $\eta = \kappa \circ \varphi$ . Az alábbi kijelentés igazolása egyszerű.

**1.33. Állítás.** Tekintsünk a síkban egy  $P(x, y)$  pontot. A  $P^\vee = \varphi(P)$  pont koordinátái legyenek  $(x^\vee, y^\vee)$ , a  $P' = \eta(P)$  képpont koordinátái pedig  $(x', y')$ . Ekkor fennáll

$$x' = \lambda x^\vee \quad \text{és} \quad y' = \lambda y^\vee.$$

A  $\varphi$  egybevágóság analitikusan az (1.1) mátrixegyenlettel írható le. Az abban szereplő együtthatókat alkalmazva tekintsük most a  $\tilde{a}_{rs} = \lambda a_{rs}$ ,  $\tilde{b}_r = \lambda b_r$  ( $r, s = 1, 2$ ) valós számokat. A fenti állítás szerint a  $P' = \eta(P)$  képpont  $(x', y')$  koordinátáira teljesül az alábbi mátrixegyenlet

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{pmatrix}.$$

### A síkbeli hasonlósági transzformációk osztályozása

Legyen  $\eta$  egy hasonlóság a  $\lambda$  aránnyal. Ekkor tetszőleges  $A, B$  pontok  $A' = \eta(A)$ ,  $B' = \eta(B)$  képeivel fennáll az  $\frac{A'B'}{AB} = \lambda$  egyenlőség. Ebből már látható, hogy amennyiben  $\lambda \neq 1$ , vagyis az  $\eta$  nem egybevágóság, akkor az  $\eta$  egy hasonlóságnak nem lehet két fixpontja. Az alábbi tétel szerint viszont az ilyen esetben mindig van egy fixpont. A bizonyítás a hasonlóság analitikus leírásán és a Cramer-szabályon alapul.

**1.34. Tétel.** Legyen adva egy olyan  $\eta : \sigma \rightarrow \sigma$  síkbeli hasonlóság, amely nem egybevágóság. Ekkor az  $\eta$  hasonlóságnak egyértelműen létezik fixpontja.

A következő tétel már megadja a síkbeli hasonlóságok osztályozását.

**1.35. Tétel.** Legyen az  $\eta : \sigma \rightarrow \sigma$  leképezés egy olyan síkbeli hasonlóság, amely nem egybevágóság. Ekkor az  $\eta$  vagy egy forgatva nyújtás, vagy pedig egy tükrözve nyújtás.



## 2) Kerület és terület

### Síkbeli topológiai alapfogalmak

Tekintsünk egy  $\sigma$  síkot, abban egy  $O$  pontot és egy  $r$  pozitív valós számot. Mint ismeretes, az  $O$  középponttal és  $r$  sugárral meghatározott  $\sigma$ -beli körvonalon (vagy más szóval körön) a  $k_\sigma(O, r) = \{ P \in \sigma \mid OP = r \}$  alakzatot értjük.

A körvonal kapcsán vezessük be a körlemez fogalmát.

**2.1. Definíció.** Az  $\mathcal{L}_\sigma(O, r) = \{ P \in \sigma \mid OP \leq r \}$  alakzatot az  $O$  középponttal és  $r$  sugárral vett  $\sigma$ -beli zárt körlemeznek mondjuk.

Az  $O$  középponttal és  $r$  sugárral meghatározott  $\sigma$  síkbeli nyílt körlemezen az  $\mathcal{N}_\sigma(O, r) = \{ P \in \sigma \mid d(O, P) < r \}$  ponthalmazt értjük.

**2.2. Definíció.** Legyen adott egy  $\mathcal{A}$  alakzat a  $\sigma$  síkban. Egy  $P \in \mathcal{A}$  pontot az  $\mathcal{A}$  ponthalmaz síkbeli belső pontjának nevezünk, ha van olyan  $r > 0$  szám, hogy fennáll  $\mathcal{N}_\sigma(P, r) \subset \mathcal{A}$ .

Egy  $\sigma$ -beli  $Q$  pontot az  $\mathcal{A}$  alakzat határpontjának mondunk, ha tetszőleges  $r > 0$  szám esetén teljesül  $\mathcal{N}_\sigma(Q, r) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$  és  $\mathcal{N}_\sigma(Q, r) \cap (\sigma \setminus \mathcal{A}) \neq \emptyset$ .

**Megjegyzés.** A továbbiakban egy  $\sigma$  síkbeli  $\mathcal{A}$  alakzat belső pontjainak halmazát  $Int_\sigma(\mathcal{A})$ , határpontjainak halmazát pedig  $Bd(\mathcal{A})$  fogja jelölni.

**2.3. Definíció.** A  $\sigma$  síkban lévő  $\mathcal{A}$  alakzatot nyíltnek mondjuk, ha az összes pontja belső pont (vagyis ha fennáll  $Int_\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ ).

Az  $\mathcal{A}$  alakzatot zártnak nevezzük, amennyiben a  $\sigma \setminus \mathcal{A}$  ponthalmaz nyílt.

**Megjegyzés.** Könnyen belátható, hogy az  $\mathcal{L}_\sigma(O, r)$  zárt körlemezrel kapcsolatban fennállnak az  $Int_\sigma(\mathcal{L}_\sigma(O, r)) = \mathcal{N}_\sigma(O, r)$  és  $Bd(\mathcal{L}_\sigma(O, r)) = k_\sigma(O, r)$  összefüggések.

Nem nehéz igazolni, hogy egy  $\sigma$  síkbeli  $\mathcal{A}$  alakzat zárt pontosan akkor, ha tartalmazza az összes határpontját, vagyis ha fennáll a  $Bd(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$  összefüggés.

### A sokszögek kerülete

Tekintsünk egy  $\mathcal{P}$  töröttvonalat vagy más szóval poligont, melynek csúcsai legyenek az  $A_1, \dots, A_{n+1}$  pontok. A  $\mathcal{P}$  poligon megegyezik az  $\overline{A_i A_{i+1}}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) szakaszok uniójával, és ezeket a szakaszokat mondjuk a  $\mathcal{P}$  töröttvonal oldalainak.

**2.4. Definíció.** A  $\mathcal{P}$  töröttvonal hosszán a  $h(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n A_i A_{i+1}$  pozitív számot értjük.

**Megjegyzés.** A háromszög-egyenlőtlenségből adódik, hogy egy töröttvonal hossza nem lehet kisebb kezdőpontjának és végpontjának távolságánál. Ha a fent említett  $\mathcal{P}$  töröttvonal nem egyetlen szakasz, akkor hosszára fennáll a  $h(\mathcal{P}) > A_1 A_{n+1}$  egyenlőtlenség.

Emlékezzünk rá, hogy sokszögvonalon egy olyan egyszerű zárt töröttvonalat értünk, amely benne van egy síkban. Tekintsünk egy  $\mathcal{S}$  sokszögvonalat, a tartalmazó síkot pedig jelölje  $\sigma$ . Ez a síkot két poligonálisan összefüggő tartományra osztja fel és a korlátos tartományt mondjuk az  $\mathcal{S}$  sokszögvonal által sokszögtartománynak (vagy rövidebben sokszögnek). A továbbiakban ezt a sokszöget is  $\mathcal{S}$  fogja jelölni. A megkülönböztetés abban lesz, hogy az egyik esetben sokszögvonalról, a másik esetben pedig sokszögről szólunk.

**2.5. Definíció.** Legyen adott egy  $n$  oldalú  $\mathcal{S}$  sokszög, melynek csúcsai az  $A_1, \dots, A_n$  pontok. Ennek kerületén a  $K(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{n-1} A_i A_{i+1} + A_n A_1$  pozitív számot értjük.

**Megjegyzés.** A fenti definíció szerint a sokszög kerülete megegyezik az öt határoló sokszög vonal hosszával.

Az alábbi kijelentés teljesülését könnyű belátni.

**2.6. Állítás.** Legyen adott egy  $\mathcal{S}$  sokszög és egy  $\eta : X \rightarrow X$  térbeli hasonlóság, amelynek aránya  $\lambda$ . Ekkor a hasonlósági transzformáció által nyert  $\mathcal{S}' = \eta(\mathcal{S})$  sokszög kerületére fennáll  $K(\mathcal{S}') = \lambda \cdot K(\mathcal{S})$ .

### Konvex sokszögek kerülete

Egy  $\sigma$  síkban vegyünk egy  $n$  oldalú  $\mathcal{S}$  konvex sokszöget, melynek csúcsai az  $A_1, \dots, A_n$  pontok. Tekintsük ezen sokszög  $e_1 = \langle A_1, A_2 \rangle, \dots, e_n = \langle A_n, A_1 \rangle$  oldalegyeneseit. Ezek a  $\sigma$  síkot két félsíkra bontják fel. Mivel az  $\mathcal{S}$  sokszög konvex, az  $e_i$  egyenes által határolt egyik félsíkban benne van a sokszög. Jelölje  $\mathcal{F}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) azt az  $e_i$  oldalegyenes által határolt félsíkot, amely tartalmazza az  $\mathcal{S}$  sokszöget. Vegyük észre, hogy az oldalegyenesekhez rendelt félsíkok metszete megegyezik az  $\mathcal{S}$  konvex sokszöggel, vagyis fennáll az  $\mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i$  összefüggés.

A következő állítás azt mondja ki, hogy ha adva van két olyan konvex sokszög, ahol az egyik tartalmazza a másikat, akkor a külső sokszög kerülete nagyobb a belső sokszög kerületénél.

**2.7. Állítás.** Legyen adott egy  $\mathcal{S}_b$  konvex sokszög és egy másik  $\mathcal{S}_k$  konvex sokszög, amely tartalmazza  $\mathcal{S}_b$ -t. Ezen sokszögek kerületeire fennáll a  $K(\mathcal{S}_b) \leq K(\mathcal{S}_k)$  egyenlőtlenség.

### Bizonyítás.

Az  $\mathcal{S}_b$  belső konvex sokszög oldalainak száma legyen  $n$ , az oldalegyenesei pedig legyenek  $e_1, \dots, e_n$ . Tekintsük az oldalegyenesek által határolt azon  $\mathcal{F}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) félsíkokat, amelyek tartalmazzák az  $\mathcal{S}_b$  sokszöget. A  $\mathcal{S}_b$  sokszög előáll ezen félsíkok metszeteként, vagyis teljesül  $\mathcal{S}_b = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ .

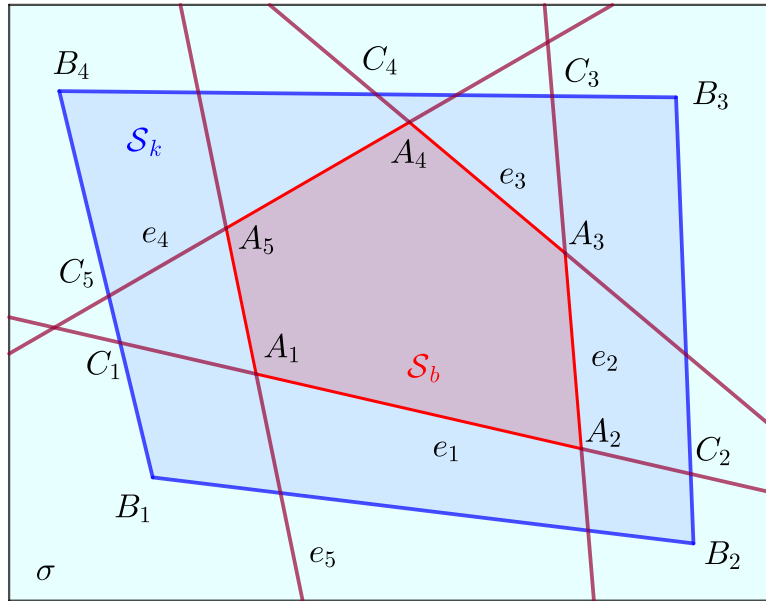
Rekurzív eljárással értelmezünk egy  $n + 1$  elemű  $\mathcal{P}_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) sokszögsorozatot. Ennek 0-adik eleme (más szóval a kiindulási eleme) legyen a  $\mathcal{P}_0 = \mathcal{S}_k$  sokszög. Az  $(i - 1)$ -edik sokszög meghatározása után a sorozatban az  $i$ -edik sokszög pedig legyen a  $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_{i-1} \cap \mathcal{F}_i$  metszet. Tehát a  $\mathcal{P}_{i-1}$  sokszögből úgy nyerjük a  $\mathcal{P}_i$  sokszöget, hogy azt elmetsszük (vagy más szóval elvágjuk)  $\mathcal{F}_i$  félsíkkal.

Ezzel az eljárással egy olyan  $\mathcal{S}_k = \mathcal{P}_0 \supset \mathcal{P}_1 \supset \dots \supset \mathcal{P}_{n-1} \supset \mathcal{P}_n = \mathcal{S}_b$  sokszögsorozatot kapunk, amelynek kiindulási eleme a  $\mathcal{S}_k$  külső sokszög és utolsó eleme a  $\mathcal{S}_b$  belső sokszög.

Vegyük észre, hogy amennyiben fennáll  $\mathcal{P}_i \neq \mathcal{P}_{i-1}$ , akkor a  $\mathcal{P}_i$  sokszögnek van egy olyan oldala van, amely nincs rajta a  $\mathcal{P}_{i-1}$  sokszöget határoló sokszög vonalon. Ezen oldal végpontjai a  $\mathcal{P}_{i-1}$  poligonra esnek, és egy olyan töröttvonal köti őket össze, amely rajta van a  $\mathcal{P}_{i-1}$  sokszög határán, de ezen töröttvonal szakaszai már nincsenek benne a  $\mathcal{P}_i$  sokszöget határoló sokszög vonalban. Mivel a vágásnál létrejövő új oldal hossza kisebb mint az elhagyásra kerülő töröttvonal hossza, azt kapjuk, hogy ez esetben fennáll a  $K(\mathcal{P}_{i-1}) > K(\mathcal{P}_i)$  egyenlőtlenség.

Mivel az egyenlőtlenség igaz a sokszögsorozatot bármely két szomszédos tagjára, azt kapjuk hogy teljesül a  $K(\mathcal{S}_k) \geq K(\mathcal{S}_b)$  összefüggés.  $\square$

**Megjegyzés.** A bizonyításhoz mellékelt ábrán  $\mathcal{S}_b = A_1A_2A_3A_4A_5$  a belső konvex sokszög és  $\mathcal{S}_k = B_1B_2B_3B_4$  a külső sokszög. A sorozatban szereplő sokszögek:  $\mathcal{P}_0 = \mathcal{S}_k$ ,  $\mathcal{P}_1 = C_1C_2B_3B_4$ ,  $\mathcal{P}_2 = C_1A_2C_3B_4$ ,  $\mathcal{P}_3 = C_1A_2A_3C_4B_4$ ,  $\mathcal{P}_4 = C_1A_2A_3A_4C_5$ ,  $\mathcal{P}_5 = \mathcal{S}_b$ .



6. ábra. Illusztráció a 2.7. Állítás bizonyításához.

**Megjegyzés.** Könnyű megmutatni, a 2.7. Állításból nem hagyható el az a feltétel, hogy a tartalmazott  $\mathcal{S}_b$  sokszög konvex.

Amennyiben  $\mathcal{S}_b \subset \mathcal{S}_k$  és a két konvex sokszög nem azonos, akkor  $K(\mathcal{S}_b) < K(\mathcal{S}_k)$  teljesül.

#### A korlátos konvex síkidom kerülete

**2.8. Definíció.** Egy síkbeli konvex alakzatot konvex síkidomnak mondunk, ha nincs olyan egyenes, amely az alakzatot tartalmazza.

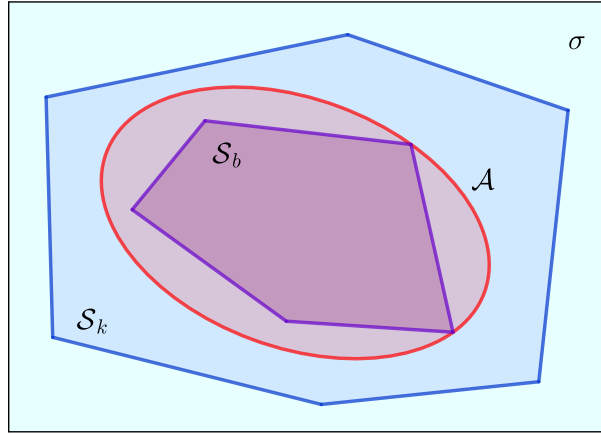
**2.9. Definíció.** Legyen adott egy  $\mathcal{A}$  korlátos konvex síkidom. Egy  $\mathcal{S}$  sokszöget az  $\mathcal{A}$  síkidom egy belső sokszögének mondunk, ha benne van az  $\mathcal{A}$  alakzatban.

Amennyiben az  $\mathcal{S}$  sokszög tartalmazza az  $\mathcal{A}$  síkidomot, akkor  $\mathcal{S}$ -t az  $\mathcal{A}$  síkidom egy külső sokszögének nevezzük.

**Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy a konvex síkidomnak mindig vannak belső pontjai. Nyilvánvaló, hogy a konvex sokszögek és a körlemezek korlátos konvex síkidomok.

Amennyiben az  $\mathcal{A}$  alakzat egy korlátos konvex síkidom, akkor nyilván vannak olyan konvex sokszögek, amelyek az  $\mathcal{A}$ -t tartalmazzák. A 2.7. Állítást alkalmazva adódik, hogy amennyiben vesszük az  $\mathcal{A}$  által tartalmazott konvex sokszögek kerületeit, akkor az így nyert valós számhalmaz felülről korlátos. Ugyanis, bármely az  $\mathcal{A}$  síkidomot tartalmazó konvex sokszög kerülete egy felső korlát.

**2.10. Definíció.** Legyen adott egy  $\mathcal{A}$  korlátos konvex síkidom. Tekintsük az  $\mathcal{A}$  által tartalmazott összes konvex sokszöget és azok kerületeinek halmazát. Ezen valós számhalmaz felső határát az  $\mathcal{A}$  korlátos konvex síkidom kerületének mondjuk és  $K(\mathcal{A})$ -val jelöljük.



7. ábra. Az  $\mathcal{A}$  korlátos konvex síkidom egy  $\mathcal{S}_b$  belső és egy  $\mathcal{S}_k$  külső sokszöge.

**Megjegyzés.** Mint ismeretes, egy felülről korlátos valós számhalmaz felső határát szuprémumnak szokás nevezni. Eszerint az  $\mathcal{A}$  korlátos konvex síkidom kerületén a

$$K(\mathcal{A}) = \sup \{ K(\mathcal{S}_b) \mid \mathcal{S}_b \text{ belső konvex sokszöge az } \mathcal{A}\text{-nak} \}$$

pozitív számot értjük.

**2.11. Definíció.** Legyen  $\mathcal{A}$  egy olyan korlátos konvex síkidom, amely zárt. Az  $\mathcal{A}$  határpontjaiból álló  $\mathcal{G} = Bd(\mathcal{A})$  alakzatot az  $\mathcal{A}$  síkidom határgörbéjének mondjuk.

Az  $\mathcal{A}$  síkidomba beírt sokszögön egy olyan konvex sokszöget értünk, amelynek összes csúcsa rajta van az  $\mathcal{A}$  határgörbéjén.

**Megjegyzés.** Világos, hogy az  $\mathcal{A}$  zárt konvex síkidom tartalmazza a beírt sokszögeket. Belátható, hogy az  $\mathcal{A}$  bármely belső sokszöge benne van egy beírt sokszögben. Emiatt a beírt konvex sokszögek kerületeinek szuprémuma is megegyezik a  $K(\mathcal{A})$  kerülettel.

**2.12. Definíció.** Legyen  $\mathcal{A}$  egy olyan korlátos konvex síkidom, amely zárt. Ezen síkidom  $\mathcal{G} = Bd(\mathcal{A})$  határgörbéjének hosszán (vagy más szóval annak ívhosszán) a  $K(\mathcal{A})$  pozitív számot értjük.

### A $\pi$ szám geometriai értelmezése

A  $\pi$  szám geometriai értelmezése a körök hasonlóságán alapul.

Azt könnyen be tudjuk látni, hogy bármely két körlemez hasonló. Legyen adott két körlemez, melyek sugara  $r_1$  és  $r_2$ . Ekkor vegyünk egy olyan egybevágóságot, amely az első kör centrumát és síkját a második kör centrumába és síkjába képezi. Ezt követően tekintsük azt a középpontos hasonlóságot, amelynek centruma a második kör középpontja és aránya  $\frac{r_2}{r_1}$ . Evidens, hogy a két leképezés szorzata egy olyan hasonlóságot ad, amely az első kört a második körbe viszi.

Nyilvánvaló, hogy egy  $r$  sugarú kör bármely átmérő-szakaszának  $2r$  a hossza. Emiatt a kör átmérőjén inkább a  $2r$  hosszt szokták érteni.

Amennyiben nem kívánjuk hangsúlyozni, hogy egy körlemez mely síkban van és melyik pont a centruma, akkor a körlemez egyszerűen csak  $\mathcal{L}$ -el jelöljük.

**2.13. Tétel.** *A körlemez kerületének és átmérőjének hányadosa nem függ a körlemez megválasztásától.*

**Bizonyítás.**

Legyen adott két körlemez  $\mathcal{L}_1$  és  $\mathcal{L}_2$ , amelyek sugara  $r_1$  és  $r_2$ . Tekintsünk egy olyan  $\eta$  hasonlósági transzformációt, amely az első körlemez a másodikba képezi. Evidens, hogy az  $\eta$  hasonlóságnak a  $\lambda = \frac{r_2}{r_1}$  szám az aránya.

Legyen  $\mathcal{S}_b$  az  $\mathcal{L}_1$  körlemeznek egy tetszőleges belső konvex sokszöge. Ekkor az  $\mathcal{S}'_b = \eta(\mathcal{S}_b)$  konvex sokszöget tartalmazza az  $\mathcal{L}_2$  körlemez és fennáll  $K(\mathcal{S}'_b) = \frac{r_2}{r_1} \cdot K(\mathcal{S}_b)$ . Vegyük észre azt is, hogy az  $\mathcal{L}_2$  körlemez bármely belső konvex sokszöge előáll az  $\mathcal{L}_1$  egy belső konvex sokszögének az  $\eta$  transzformáció szerinti képeként.

Ezek alapján a belső konvex sokszögek kerületeinek szuprémumára teljesül a

$$\sup \{ K(\mathcal{S}'_b) \mid \mathcal{S}'_b \text{ konvex sokszög, } \mathcal{S}'_b \subset \mathcal{L}_2 \} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \sup \{ K(\mathcal{S}_b) \mid \mathcal{S}_b \text{ konvex sokszög, } \mathcal{S}_b \subset \mathcal{L}_1 \}$$

összefüggés, amelyből  $K(\mathcal{L}_2) = \frac{r_2}{r_1} \cdot K(\mathcal{L}_1)$  következik. Ez pedig azt mutatja, hogy fennáll a  $\frac{K(\mathcal{L}_2)}{2r_2} = \frac{K(\mathcal{L}_1)}{2r_1}$  egyenlőség.  $\square$

A 2.13. Tétel ismeretében már definiálni tudjuk a  $\pi$  számot.

**2.14. Definíció.** *A  $\pi$  számon a körlemez kerületének és átmérőjének a hányadosát értjük.*

A fenti tételből és definícióból már következik, hogy igaz az alábbi kijelentés.

**2.15. Következmény.** *Egy  $r$  sugarú körlemez kerületének az értéke  $2\pi r$ .*

**Megjegyzés.** Tekintsünk egy  $r$  sugarú  $\mathcal{L}$  körlemez. Könnyű belátni, hogy a körbe beírt szabályos hatszögek kerülete  $6r$ , továbbá a kör köré írt szabályos hatszögek kerülete  $4\sqrt{3}r$ .

Ily módon azt nyerjük, hogy a  $\pi = \frac{K(\mathcal{L})}{2r}$  számra fennáll  $3 < \pi < 2\sqrt{3}$ .

Egyébként már bizonyított, hogy a  $\pi$  nem racionális szám (sőt nem is algebrai szám).

**Megjegyzés.** Mivel egy  $r$  sugarú  $\mathcal{L}$  körlemez határgörbéje egy  $r$  sugarú körvonal, annak ívhossza szintén  $2\pi r$ .

## A sokszögek területének értelmezése

**2.16. Definíció.** Egy síkbeli alakzatot általános sokszögnek mondunk, ha előáll véges sok konvex sokszög uniójaként.

**Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy amennyiben két általános sokszög  $\mathcal{S}_1$  és  $\mathcal{S}_2$  egyazon síkban van, akkor azok  $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$  uniója szintén egy általános sokszög.

**Megjegyzés.** Mivel egy konvex sokszög mindig felbontható véges sok háromszögre, az általános sokszög létrejön véges sok háromszög uniójaként is. Nyilvánvaló továbbá, hogy az általános sokszög nem feltétlenül ad poligonálisan összefüggő alakzatot.

Ha két általános sokszög egyazon síkban van, akkor azok uniója szintén egy általános sokszög.

## A sokszögek területfüggvényére vonatkozó feltételek

Legyen  $\mathcal{H}$  az összes általános sokszög halmaza. Olyan  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  valós függvényt keresünk, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek.

- (1) Tetszőleges  $\mathcal{S}$  általános sokszög esetén fennáll  $T(\mathcal{S}) > 0$ .
- (2) Ha az  $\mathcal{S}$  és  $\tilde{\mathcal{S}}$  sokszögek egymással egybevághóak, akkor  $T(\mathcal{S}) = T(\tilde{\mathcal{S}})$ .
- (3) Ha  $\mathcal{S}_1$  és  $\mathcal{S}_2$  egyazon síkba eső olyan sokszögek, melyeknek nincs közös belső pontjuk, akkor uniójuk területére fennáll  $T(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) = T(\mathcal{S}_1) + T(\mathcal{S}_2)$ .
- (4) Amennyiben az  $\mathcal{N}$  sokszög egy 1 oldalhosszúságú négyzet, akkor  $T(\mathcal{N}) = 1$ .

Igazolható az alábbi tétel, amely egyébként kézenfekvőnek látszik.

**2.17. Tétel.** Egyértelműen létezik egy olyan  $T$  valós függvény a sokszögek  $\mathcal{H}$  halmazán, amelyre teljesülnek a fenti (1)–(4) feltételek.

**Megjegyzés.** A tétel teljes bizonyítása bizonyítása megtalálható a Hajós György által írt *Bevezetés a geometriába* c. tankönyv 20. fejezetében.

**2.18. Definíció.** Tetszőleges  $\mathcal{S}$  sokszög területén a  $T(\mathcal{S})$  függvényértéket értjük.

**Megjegyzés.** Könnyű belátni, hogy amennyiben egy  $\mathcal{S}_1$  sokszöget tartalmaz egy  $\mathcal{S}_2$  sokszög (vagyis  $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ ), akkor területükre fennáll  $T(\mathcal{S}_1) \leq T(\mathcal{S}_2)$ .

**Megjegyzés.** Mivel bármely sokszög előáll véges sok olyan háromszög uniójaként, melyeknek nincs közös belső pontjuk, alapvető fontosságú számunkra az a kérdés, hogy miként lehet kiszámítani egy háromszög területét.

## A téglalap és a háromszög területe

Először a téglalap területére vonatkozó közismert formulát vezetjük le a területfüggvényre kiszabott (1)–(4) feltételekből. Ehhez szükségünk van az alábbi állításra.

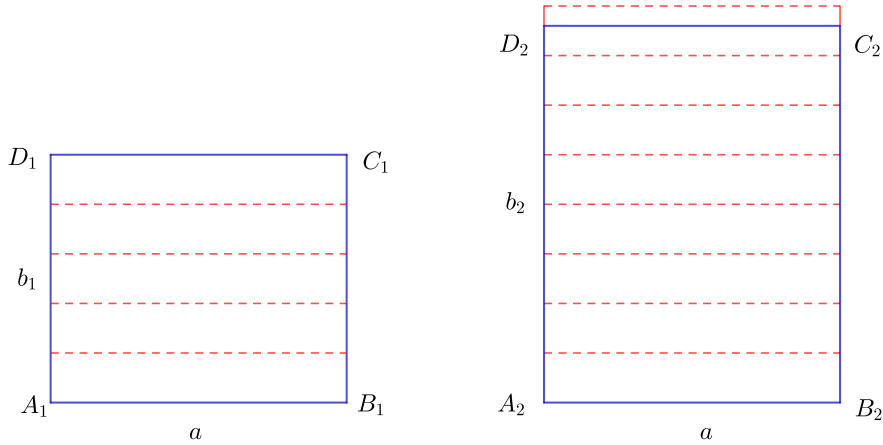
**2.19. Állítás.** Legyenek  $\mathcal{S}_1$  és  $\mathcal{S}_2$  olyan téglalapok, melyek egyik a oldalhossza egyenlő. Ha ezen téglalapoknál a másik oldalhossz  $b_1$  és  $b_2$ , akkor területükre fennáll a

$$T(\mathcal{S}_2) = \frac{b_2}{b_1} \cdot T(\mathcal{S}_1) \text{ összefüggés.}$$

**Bizonyítás.**

Vegyünk egy  $n$  ( $n \geq 2$ ) pozitív egész számot. Az első téglalap  $b_1$  oldalát osszuk fel  $n$  egyenlő részre. Az osztáspontokon át húzzunk párhuzamosakat a másik oldallal. Ily módon a téglalapot felosztjuk  $n$  számú olyan téglalapra, amelyek oldalhosszai  $a$  és  $b_1/n$ .

A területfüggvényre vonatkozó (2) és (3) feltételekből következik, hogy ezen téglalapok területének értéke  $\frac{1}{n} \cdot T(\mathcal{S}_1)$ . Vegyük most azt az egyértelműen létező  $k$  nemnegatív egész számot, amellyel fennáll a  $k \cdot \frac{b_1}{n} \leq b_2 < (k+1) \cdot \frac{b_1}{n}$  összefüggés. Amennyiben ezt megszorozzuk az  $\frac{1}{b_1}$  pozitív számmal az kapjuk, hogy a két oldalhossz hányadosára igaz  $\frac{k}{n} \leq \frac{b_2}{b_1} < \frac{k+1}{n}$ .



8. ábra. Téglalapok felosztása ( $n = 5$  és  $k = 7$  eset).

A fentiek szerint a  $b_1/n$  hossz  $k$ -szor lehet felmérni a másik  $\mathcal{S}_2$  téglalap  $b_2$  oldalára. A felmérésekkel osztáspontokat lehet kijelölni ezen az oldalon. Hosszabbítsuk meg az oldalszakaszt és jelöljük ki a  $(k+1)$ -edik osztáspontot is. Ha párhuzamosakat húzunk a másik oldallal, akkor ez esetben is olyan téglalapokat kapunk, amelyek oldalhosszai  $a$  és  $b_1/n$ . Világos, hogy bármely két ilyen téglalap egymással egybevágó, tehát ezek területe  $\frac{T(\mathcal{S}_1)}{n}$ . A mellékelt ábra szerint  $k$  számú keskeny téglalap uniójaként adódik egy olyan téglalap, amelyet  $\mathcal{S}_2$  tartalmaz. Ugyanakkor,  $k+1$  számú keskeny téglalap uniójaként már egy olyan téglalapot nyerünk, amely az  $\mathcal{S}_2$ -t tartalmazza. Mivel ezen téglalapok területe  $\frac{k}{n} \cdot T(\mathcal{S}_1)$  és  $\frac{k+1}{n} \cdot T(\mathcal{S}_1)$ , az  $\mathcal{S}_2$  téglalap területére teljesül a

$$\frac{k}{n} \cdot T(\mathcal{S}_1) \leq T(\mathcal{S}_2) < \frac{k+1}{n} \cdot T(\mathcal{S}_1)$$

egyenlőtlenség. Ha ezt megszorozzuk a  $\frac{1}{T(\mathcal{S}_1)}$  pozitív számmal, akkor azt kapjuk, hogy fennáll

$$\frac{k}{n} \leq \frac{T(\mathcal{S}_2)}{T(\mathcal{S}_1)} < \frac{k+1}{n}.$$

Vegyük észre, hogy a fenti összefüggések szerint a  $\frac{b_2}{b_1}$  és  $\frac{T(\mathcal{S}_2)}{T(\mathcal{S}_1)}$  hányadosok egyaránt a  $\frac{k}{n}$ ,  $\frac{k+1}{n}$  racionális számok közé esnek. Ily módon a különbségük abszolút értékére igaz

$$\left| \frac{T(\mathcal{S}_2)}{T(\mathcal{S}_1)} - \frac{b_2}{b_1} \right| < \frac{1}{n}.$$

Mivel ez az egyenlőtlenség bármilyen nagy  $n$  pozitív egész számra fennáll, a két hányados különbsége csakis 0 lehet, azaz teljesül  $\frac{T(\mathcal{S}_2)}{T(\mathcal{S}_1)} = \frac{b_2}{b_1}$ . Ebből viszont már következik az állításban szereplő összefüggés.  $\square$

**2.20. Tétel.** *Ha egy  $\mathcal{S}$  téglalap oldalhosszai  $a$  és  $b$ , akkor a területe  $T(\mathcal{S}) = a \cdot b$ .*

**Bizonyítás.**

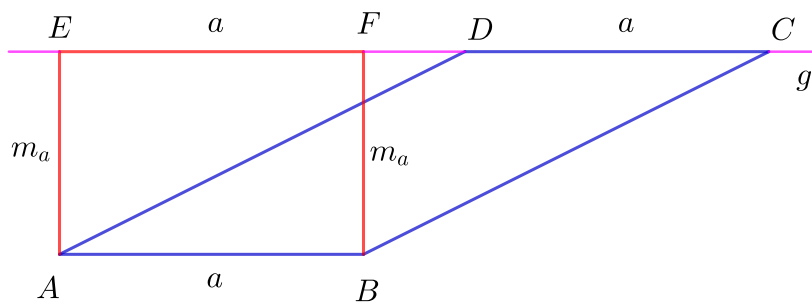
Vegyünk egy  $\mathcal{N}$  négyzetet az 1 oldalhosszal, és egy olyan  $\tilde{\mathcal{S}}$  téglalapot, amelynek oldalhosszai 1 és  $a$ . Alkalmazzuk az 2.19. Állításban megadott összefüggést az  $\mathcal{N}$ ,  $\tilde{\mathcal{S}}$  téglalapokra, melyek egyik oldalhossza egyaránt 1. Eszerint fennáll  $T(\tilde{\mathcal{S}}) = \frac{a}{1} \cdot T(\mathcal{N}) = a$ .

Ha ennek ismeretében a 2.19. Állítást az  $\tilde{\mathcal{S}}$ ,  $\mathcal{S}$  téglalapokra alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy  $T(\mathcal{S}) = \frac{b}{1} \cdot T(\tilde{\mathcal{S}}) = ba$  teljesül.  $\square$

**2.21. Állítás.** *Legyen adott egy olyan  $\mathcal{P}$  paralelogramma, amelynek egyik oldala  $a$  és a hozzá tartozó magasság  $m_a$ . Ez esetben a területére teljesül  $T(\mathcal{P}) = a \cdot m_a$ .*

**Bizonyítás.**

A  $\mathcal{P}$  paralelogramma csúcsai legyenek sorrendben  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  és tegyük fel, hogy  $a = AB$ . Tekintsük a  $CD$  oldalt tartalmazó  $g$  egyenest. Az  $A$ ,  $B$  csúcsokból a  $g$ -hez húzott merőleges szakaszok talppontjait jelölje  $E$  és  $F$ . Világos, hogy fennáll  $AE = m_a$ . Azt



9. ábra. A paralelogramma területének meghatározása.

kellene belátnunk, hogy a  $\mathcal{P} = ABCD$  paralelogramma és az  $\mathcal{S} = ABFE$  téglalap területe megegyezik. Tekintsük a mellékelt ábrát. Vegyük észre, hogy az  $AED$  és  $BFC$  derékszögű



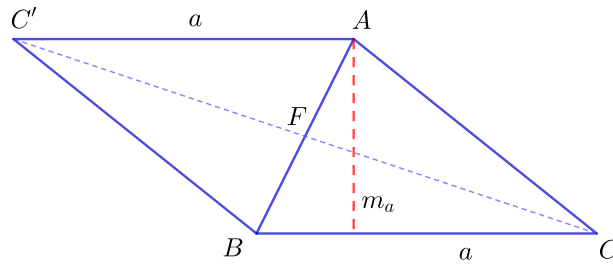
háromszögek egybevágóak, és emiatt a területük egyenlő. Jelölje  $\mathcal{Z}$  az  $ABCE$  trapéz. Ezt kétféle módon felosztva azt kapjuk, hogy a területére teljesül  $T(\mathcal{Z}) = T(\mathcal{S}) + T(BFC\Delta)$  és  $T(\mathcal{Z}) = T(\mathcal{P}) + T(AED\Delta)$ . Mivel a két háromszög területe egyenlő, ezen összefüggésekből már következik  $T(\mathcal{P}) = T(\mathcal{S}) = a m_a$ .  $\square$

**Megjegyzés.** Tekintsünk egy  $ABC$  háromszöget, melynek oldalai  $a, b, c$  és magasságai  $m_a, m_b, m_c$ . Ha a háromszögben behúzzuk a magasságszakaszokat, akkor olyan derékszögű háromszögeket találunk, amelyek között vannak egymással hasonló háromszögek. Ezek alkalmazásával (a területfogalom felhasználása nélkül) igazolható, hogy fennáll az  $a m_a = b m_b = c m_c$  összefüggés.

**2.22. Tétel.** Legyen adva egy  $ABC$  háromszög. Tekintsük az  $A$  csúccsal szemközti  $a$  oldalt és a hozzá tartozó  $m_a$  magasságot. Ekkor a háromszög területére fennáll  $T(ABC\Delta) = \frac{1}{2} a m_a$ .

**Bizonyítás.**

Hajtsunk végre tükrözést az  $AB$  oldal  $F$  felezőpontjára. Ezen centrális tükrözésnél a  $C$  csúcs képe legyen a  $C'$  pont. Világos, hogy a  $\mathcal{P} = BCAC'$  négyszög egy olyan paralelogramma, amelynek egyik oldala  $a = BC$  és ezen oldalhoz tartozó magassága  $m_a$ . A



10. ábra. A háromszög területének meghatározása.

$\mathcal{P} = BCAC'$  paralelogramma az  $AB$  oldalával felosztható az egymással egybevágó  $ABC$  és  $BAC'$  háromszögekre. Mivel az egybevágó háromszögek területe egyenlő, azt kapjuk, hogy fennáll  $2 \cdot T(ABC\Delta) = T(\mathcal{P}) = a m_a$ , ami már igazolja tételünket.  $\square$

**Megjegyzés.** Egy tetszőleges  $\mathcal{S}$  általános sokszög előáll véges sok olyan háromszög uniójaként, ahol az előállításban szereplő bármely két különböző háromszögnek nincs közös belső pontja. Ily módon az összetevő háromszögek területeinek összege megadja a  $T(\mathcal{S})$  terület értékét.

Ugyancsak a háromszögekre történő felbontás alkalmazásával lehet igazolni a következő állítást is.

**2.23. Állítás.** Legyen adott egy  $\mathcal{S}$  sokszög és egy  $\eta : X \rightarrow X$  hasonlósági transzformáció, amelynek aránya  $\lambda$ . Ez esetben az  $\mathcal{S}' = \eta(\mathcal{S})$  sokszög területére fennáll  $T(\mathcal{S}') = \lambda^2 \cdot T(\mathcal{S})$ .

**Bizonyítás (2.23. Állítás).**

Az  $\mathcal{S}$  sokszöget osszuk fel véges sok olyan háromszögre, melyeknek páronként nincs közös belső pontjuk. Világos, hogy a felbontásban szereplő háromszögek területeinek az összege egyenlő az  $\mathcal{S}$  sokszög  $T(\mathcal{S})$  területével. Ha vesszük ezen háromszögeknek az  $\eta$  hasonlósággal nyert képeit, akkor azok az  $\mathcal{S}' = \eta(\mathcal{S})$  képsokszögnek egy felbontását adják.

Tekintsük az  $\mathcal{S}$  sokszög felosztásában az egyik  $ABC$  háromszöget, melynek az  $A$  csúccsal szemközti oldalát jelölje  $a$ , az  $a$  oldalhoz tartozó magasság pedig ezúttal legyen  $m$ . A 2.22. Tétel szerint a háromszög területe  $T(ABC\Delta) = \frac{1}{2} a m$ .

Vegyük az  $A' = \eta(A)$ ,  $B' = \eta(B)$ ,  $C' = \eta(C)$  képpontokat és az  $A'B'C'$  háromszöget. A hasonlóság szögtartó, emiatt az  $ABC$  háromszög  $BC$  oldalhoz tartozó magasságszakaszának képe az  $A'B'C'$  háromszögnek lesz a magasságszakasza. Ily módon azt kapjuk, hogy a képháromszögben a  $B'C'$  oldal hossza  $a' = \lambda \cdot a$ , a hozzá tartozó magasság pedig  $m' = \lambda \cdot m$ . Ennek következtében teljesül

$$T(A'B'C'\Delta) = \frac{1}{2} a' m' = \frac{1}{2} (\lambda a) (\lambda m) = \lambda^2 \cdot T(ABC\Delta).$$

Mivel a fenti összefüggés igaz a felbontásában szereplő összes háromszögre, az  $\mathcal{S}$  és  $\mathcal{S}'$  sokszögek területére fennáll  $T(\mathcal{S}') = \lambda^2 \cdot T(\mathcal{S})$ .  $\square$

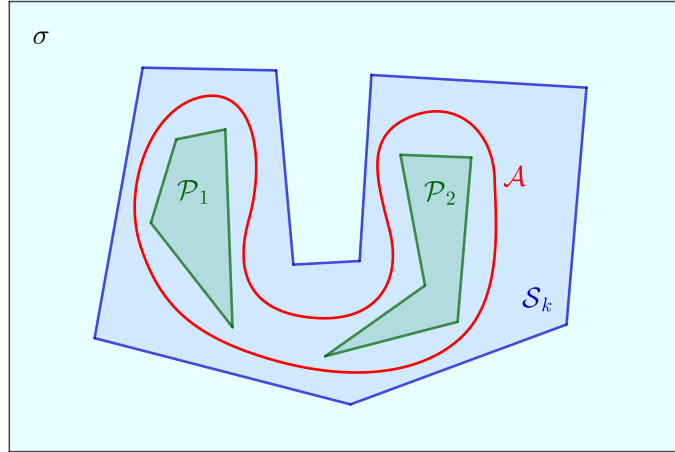
**Korlátos síkbeli alakzatok területe**

Az eddigiek során az általános sokszögek területét értelmeztük, illetve azt vizsgáltuk, hogy miként lehet meghatározni a téglalap és a háromszög területét. Mint ismeretes, egy  $\mathcal{S}$  sokszög területére a  $T(\mathcal{S})$  jelölést alkalmaztuk. Az alábbiakban azt tárgyaljuk, hogy a sokszögek területét felhasználva miként lehet definiálni a korlátos síkbeli alakzatok területét.

Legyen  $\mathcal{A}$  egy olyan korlátos alakzat, amely benne van egy síkban. Azon sokszögeket, amelyek tartalmazzák  $\mathcal{A}$ -t, az  $\mathcal{A}$  alakzat külső sokszögeinek mondjuk. Amennyiben az  $\mathcal{A}$ -nak van síkbeli belső pontja, akkor léteznek olyan sokszögek is, amelyeket az  $\mathcal{A}$  tartalmaz, és ezeket nevezzük az  $\mathcal{A}$  alakzat belső sokszögeinek. Világos, hogy egy külső sokszög az összes belső sokszöget tartalmazza, és egy külső sokszög területe nem lehet kisebb egy belső sokszög területénél.

A továbbiakban, ha veszünk egy  $\mathcal{R}$  korlátos valós számhalmazt, akkor annak alsó határát, vagy más szóval az infimumát,  $\inf \mathcal{R}$  fogja jelölni. Az  $\mathcal{R}$  számhalmaz felső határára, vagy más szóval a szuprémumára, a  $\sup \mathcal{R}$  jelölést fogjuk használni.

A belső és külső sokszögek területei alapján bármely  $\mathcal{A}$  korlátos síkbeli alakzathoz hozzá tudunk rendelni két nemnegatív számot az alábbi definíció szerint.



11. ábra. Az  $\mathcal{A}$  korlátos síkidom egy  $\mathcal{S}_k$  külső és egy  $\mathcal{S}_b = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$  belső sokszöge.

**2.24. Definíció.** Legyen adott egy  $\mathcal{A}$  korlátos síkbeli alakzat. Ennek belső területmértékén (rövidebben belső mértékén) a

$$t_1(\mathcal{A}) = \sup \{ T(\mathcal{S}_b) \mid \mathcal{S}_b \text{ általános sokszög, } \mathcal{S}_b \subset \mathcal{A} \} \cup \{0\}$$

nemnegatív számot értjük. A

$$t_2(\mathcal{A}) = \inf \{ T(\mathcal{S}_k) \mid \mathcal{S}_k \text{ általános sokszög, } \mathcal{A} \subset \mathcal{S}_k \}$$

számot az  $\mathcal{A}$  korlátos síkbeli alakzat külső területmértékének mondjuk.

**Megjegyzés.** Amennyiben az  $\mathcal{A}$  síkbeli alakzatnak nincs belső pontja (például amikor az  $\mathcal{A}$  egy síkbeli töröttvonal), akkor nincs olyan sokszög, amelyet az  $\mathcal{A}$  tartalmaz. Ez esetben  $t_1(\mathcal{A}) = 0$  teljesül a fenti definíció alapján.

**Megjegyzés.** Ha egy  $\mathcal{S}$  általános sokszöget veszünk, akkor annak  $t_1(\mathcal{S})$  belső mértéke és  $t_2(\mathcal{S})$  külső mértéke egyaránt megegyezik az  $\mathcal{S}$  sokszög  $T(\mathcal{S})$  területével.

**Megjegyzés.** Világos, hogy bármely  $\mathcal{A}$  korlátos síkidom esetén a fennáll a  $t_1(\mathcal{A}) \leq t_2(\mathcal{A})$  egyenlőtlenség a belső és a külső területmértékre.

**2.25. Definíció.** Legyen adva egy  $\mathcal{A}$  korlátos síkbeli alakzat. Azt mondjuk, hogy az  $\mathcal{A}$  alakzatnak van területe, ha annak a belső területmértéke és a külső területmértéke egyenlő, vagyis ha teljesül a  $t_1(\mathcal{A}) = t_2(\mathcal{A})$  egyenlőség.

Az egyenlőség fennállása esetén az  $\mathcal{A}$  síkbeli alakzat területén a  $t_1(\mathcal{A}) = t_2(\mathcal{A})$  számot értjük. A területre a  $T(\mathcal{A})$  jelölést alkalmazzuk.

**Megjegyzés.** Amennyiben a  $t_1(\mathcal{A}) < t_2(\mathcal{A})$  egyenlőtlenség teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az  $\mathcal{A}$  korlátos síkbeli alakzatnak nincs területe.

Az alábbi állítás bizonyítása kézenfekvő a 2.24. Definíció alapján. Emiatt a leírásától most eltekintünk.

**2.26. Állítás.** Legyen adott két olyan korlátos síkbeli alakzat  $\mathcal{A}$  és  $\mathcal{B}$ , amelyek egybevágóak egymással. Ha az  $\mathcal{A}$  ponthalmaznak van területe, akkor a  $\mathcal{B}$  alakzatnak is van területe és fennáll  $T(\mathcal{A}) = T(\mathcal{B})$ .

A 2.23. Állításból pedig az alábbi kijelentés következik.

**2.27. Állítás.** *Legyen adva egy olyan  $\mathcal{A}$  korlátos síkbeli alakzat, amelynek van területe. Tekintsünk egy  $\eta : X \rightarrow X$  hasonlóságot, amelynek aránya  $\lambda$ . Ekkor az  $\mathcal{A}' = \eta(\mathcal{A})$  képalakzatnak is van területe és  $T(\mathcal{A}') = \lambda^2 \cdot T(\mathcal{A})$  teljesül.*

**Példa olyan korlátos síkbeli alakzatra, amelynek nincs területe**

Egy  $\sigma$  síkban rögzítsünk egy  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$  derékszögű koordináta-rendszert. Ily módon egy tetszőleges  $P \in \sigma$  ponthoz hozzárendelhető a koordinátákból álló  $(x_P, y_P)$  számpár. Jelölje  $\mathbb{Q}$  a racionális számok halmazát. Tekintsük a  $\sigma$ -beli

$$\mathcal{F} = \{ P \in \sigma \mid 0 \leq x_P \leq 1, 0 \leq y_P \leq 1 \} \cup \{ P \in \sigma \mid x_P \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, 1 \leq y_P \leq 2 \}$$

korlátos ponthalmazt, melyet egy négyzet és végtelen sok (1 hosszúságú) szakasz egyesítésével nyerünk.

Vegyük észre, hogy az 1 oldalú  $\mathcal{N} = \{ P \in \sigma \mid 0 \leq x_P \leq 1, 0 \leq y_P \leq 1 \}$  négyzet olyan belső sokszöge az  $\mathcal{F}$ -nek, amely az  $\mathcal{F}$  összes belső sokszögét tartalmazza. Emiatt az  $\mathcal{F}$  belső mértéke  $t_1(\mathcal{F}) = 1$ .

Ugyanakkor az  $\mathcal{S} = \{ P \in \sigma \mid 0 \leq x_P \leq 1, 0 \leq y_P \leq 2 \}$  téglalap lesz a  $\mathcal{F}$ -t tartalmazó legszűkebb sokszög, mivel az  $\mathcal{S}$ -t az  $\mathcal{F}$  összes külső sokszöge tartalmazza. Mivel ezen  $\mathcal{S}$  téglalap területe 2, az  $\mathcal{F}$  külső mértékére igaz  $t_2(\mathcal{F}) = 2$ . Tehát a külső mérték nagyobb a belső mértéknél, vagyis az  $\mathcal{F}$  síkbeli alakzatnak nincs területe.

Megjegyezzük, hogy a fenti  $\mathcal{F}$  síkbeli alakzatot racionális fésűnek is szokás nevezni.

**Két megjegyzés a terület fogalmára vonatkozóan**

**Megjegyzés.** Felvetődik a kérdés, hogy vajon lehet-e kritériumot adni a terület létezésére. Természetesen igenlő a válasz. Bizonyítható, hogy egy  $\mathcal{A}$  korlátos síkbeli alakzatnak akkor és csak akkor van területe, ha a határpontjaiból álló  $Bd(\mathcal{A})$  ponthalmaz külső területmértékére fennáll  $t_2(Bd(\mathcal{A})) = 0$ . Ezen tétel hosszadalmas igazolására nem térünk ki.

**Megjegyzés.** Kézenfekvőnek tűnik az alábbi kijelentés helyessége, és az valóban igaz is. Azonban a bizonyítás ez esetben is időigényes lenne.

*Egy síkban legyen adva két olyan korlátos alakzat  $\mathcal{A}_1$  és  $\mathcal{A}_2$ , amelyeknek létezik területe és nincs közös belső pontja. Ekkor a két alakzat  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  uniójának is van területe és arra  $T(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = T(\mathcal{A}_1) + T(\mathcal{A}_2)$  teljesül.*

## A körlemez területe

A körlemez területét szabályos sokszögek alkalmazásával fogjuk meghatározni.

A továbbiakban feltesszük, hogy egy  $\sigma$  síkban adva van egy  $O$  centrumú és  $r$  sugarú  $\mathcal{L}$  körlemez, amelyet a  $k_\sigma(O, r)$  körvonal határol.

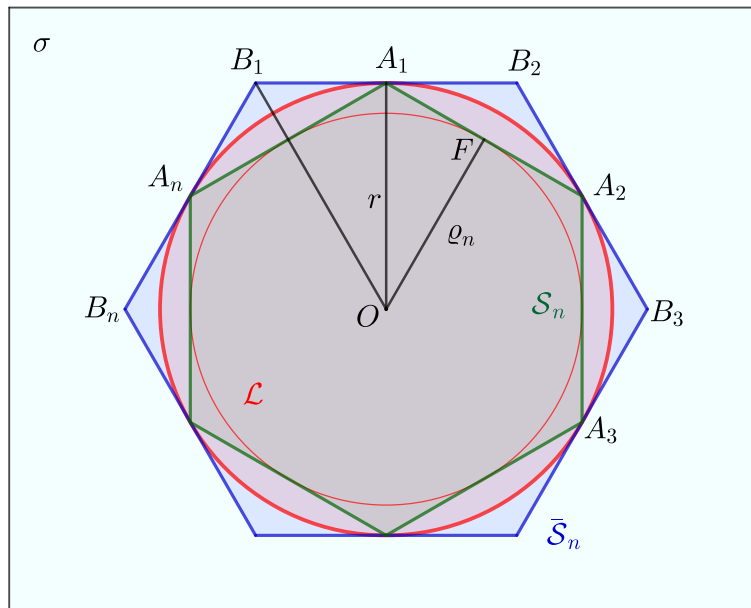
Jelölje  $\mathcal{S}_n$  ( $n \geq 3$ ) az  $\mathcal{L}$  körbe beírt  $n$  oldalú szabályos sokszöget, melynek összes csúcsa a körvonalon van. A kör köré írt  $n$  oldalú szabályos sokszöget jelölje  $\bar{\mathcal{S}}_n$ . Az  $\mathcal{S}_n$  sokszög oldalainak hossza legyen  $a_n$ , az  $\bar{\mathcal{S}}_n$  szabályos sokszög oldalhossza pedig legyen  $b_n$ .

Világos, hogy az  $\bar{\mathcal{S}}_4$  egy olyan négyzet, amelynek oldalhossza  $2r$  és kerülete  $K(\bar{\mathcal{S}}_4) = 8r$ . A 2.7. Állítás szerint ez egy felső korlátot ad a beírt sokszögek kerületeire, vagyis bármely  $n$  ( $n \geq 3$ ) egész szám esetén teljesül  $K(\mathcal{S}_n) = n a_n < 8r$ . Ebből pedig következik, hogy az  $a_n$  ( $n \geq 3$ ) számsorozatra fennáll  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**2.28. Lemma.** *A körbe írt és a kör köré írt szabályos sokszögek oldalaira teljesül a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$  összefüggés.*

**Bizonyítás.**

A mellékelt ábrának megfelelően az  $\mathcal{S}_n$  sokszög csúcsai legyenek az  $\bar{\mathcal{S}}_n$  oldalainak felezőpontjai. Vegyük észre, hogy a körbe írt  $\mathcal{S}_n = A_1 A_2 \dots A_n$  sokszög és a kör köré írt  $\bar{\mathcal{S}}_n = B_1 B_2 \dots B_n$  sokszög hasonlóak egymáshoz, a hasonlóságuk aránya pedig  $a_n/b_n$ .



12. ábra. A körbe írt  $\mathcal{S}_n = A_1 A_2 \dots A_n$  és a kör köré írt  $\bar{\mathcal{S}}_n = B_1 B_2 \dots B_n$  sokszög ( $n = 6$ ).

Tekintsük az  $\mathcal{S}_n$  szabályos sokszög beírt körét, melynek sugara legyen  $\rho_n$ . Jelölje  $F$  az  $A_1 A_2$  oldal felezőpontját, amelyre fennáll  $OF = \rho_n$ . Ha az  $OFA_1$  derékszögű háromszögre felírjuk a háromszög-egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy  $\rho_n + a_n/2 > r$ , vagyis

$r - a_n/2 < \varrho_n$ . Mivel fennáll az

$$r - a_n/2 < \varrho_n < r$$

összefüggés és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , a beírt körök sugaraiból képzett számsorozatra  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = r$  teljesül.

Világos, hogy az  $\mathcal{S}_n$ ,  $\bar{\mathcal{S}}_n$  szabályos sokszögek hasonlóságának  $\frac{a_n}{b_n}$  aránya megegyezik a  $\frac{\varrho_n}{r}$  hányadossal, vagyis  $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\varrho_n}{r}$ . Ezt oly módon is igazolhatjuk, ha felhasználjuk a  $OFA_1$  és  $OA_1B_1$  derékszögű háromszögek hasonlóságát. Figyelembe véve a leírtakat azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho_n}{r} = \frac{1}{r} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = \frac{1}{r} \cdot r = 1 \quad \text{teljesül. } \square$$

A kör területének meghatározásához szükségünk van az alábbi állításra, amely a szabályos sokszögek kerületével kapcsolatos.

**2.29. Állítás.** *A  $r$  sugarú körbe írt  $\mathcal{S}_n$  és a kör köré írt  $\bar{\mathcal{S}}_n$  szabályos sokszögek kerületeire fennállnak a  $\lim_{n \rightarrow \infty} K(\mathcal{S}_n) = 2\pi r$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} K(\bar{\mathcal{S}}_n) = 2\pi r$  összefüggések, amelyekben  $n$  ( $n \geq 3$ ) az oldalszámot jelöli.*

**Bizonyítás.**

Alkalmazzuk az előzőekben bevezetett jelöléseket. Legyen  $a_n$  az  $r$  sugarú  $\mathcal{L}$  körbe beírt  $\mathcal{S}_n$  szabályos sokszög oldalainak hossza,  $b_n$  pedig a kör köré írt  $\bar{\mathcal{S}}_n$  szabályos sokszög oldalainak hossza. Emiatt ezen sokszögek kerülete  $K(\mathcal{S}_n) = n a_n$  és  $K(\bar{\mathcal{S}}_n) = n b_n$ . A 2.28. Lemmát felhasználva adódik  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K(\mathcal{S}_n)}{K(\bar{\mathcal{S}}_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ .

Ismeretes, hogy az  $\mathcal{L}$  körlemez kerülete  $K(\mathcal{L}) = 2\pi r$ . Mivel ez megegyezik az  $\mathcal{L}$  által tartalmazott konvex sokszögek kerületeinek szuprémumával, a 2.7. Állítás szerint bármely  $n$  ( $n \geq 3$ ) egész szám esetén fennáll

$$K(\mathcal{S}_n) < 2\pi r < K(\bar{\mathcal{S}}_n).$$

Ha a fenti egyenlőtlenséget megszorozzuk az  $\frac{1}{K(\bar{\mathcal{S}}_n)}$  pozitív számmal,

$$\frac{K(\mathcal{S}_n)}{K(\bar{\mathcal{S}}_n)} < \frac{2\pi r}{K(\bar{\mathcal{S}}_n)} < 1$$

adódik. Ebből és a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K(\mathcal{S}_n)}{K(\bar{\mathcal{S}}_n)} = 1$  összefüggésből  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi r}{K(\bar{\mathcal{S}}_n)} = 1$  következik. Világos, hogy emiatt fennáll  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K(\bar{\mathcal{S}}_n)}{2\pi r} = 1$ , illetve  $\lim_{n \rightarrow \infty} K(\bar{\mathcal{S}}_n) = 2\pi r$ .

Ezt felhasználva a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K(\mathcal{S}_n)}{2\pi r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K(\mathcal{S}_n)}{K(\bar{\mathcal{S}}_n)} = 1$  összefüggéshez jutunk, amiből a  $\lim_{n \rightarrow \infty} K(\mathcal{S}_n) = 2\pi r$  határértéket nyerjük.  $\square$

**2.30. Tétel** *A  $r$  sugarú körlemez területe  $r^2 \pi$ .*

**Bizonyítás.**

Egy síkban vegyük az  $O$  centrumú és  $r$  sugarú  $\mathcal{L}$  körlemezt. A kör köré írt  $\bar{\mathcal{S}}_n = B_1 B_2 \dots B_n$  szabályos sokszöget osszuk fel a  $B_1 B_2 O \Delta$ ,  $B_2 B_3 O \Delta$ ,  $\dots$ ,  $B_n B_1 O \Delta$  háromszögekre. Világos, hogy ezek egymással egybevágóak és területük  $\frac{1}{2} b_n r$ . Emiatt az  $\bar{\mathcal{S}}_n$  sokszög területére  $T(\bar{\mathcal{S}}_n) = n(\frac{1}{2} b_n r) = \frac{1}{2} r(n b_n) = \frac{1}{2} r \cdot K(\bar{\mathcal{S}}_n)$  teljesül. Alkalmazva a 2.29. Állítást, eszerint fennáll

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(\bar{\mathcal{S}}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} r \cdot K(\bar{\mathcal{S}}_n) = \frac{1}{2} r (2 r \pi) = r^2 \pi.$$

Vegyük észre, hogy ennek következtében az  $\mathcal{L}$  körlemez külső területmértékére igaz  $t_2(\mathcal{L}) \leq r^2 \pi$ , mivel az  $\bar{\mathcal{S}}_n$  ( $n \geq 3$ ) sokszögek tartalmazzák  $\mathcal{L}$ -t.

A körbe írt  $\mathcal{S}_n = A_1 A_2 \dots A_n$  szabályos sokszöget szintén osszuk fel az  $A_1 A_2 O \Delta$ ,  $A_2 A_3 O \Delta$ ,  $\dots$ ,  $A_n A_1 O \Delta$  egyenlő szárú háromszögekre. Ezek területe pedig  $\frac{1}{2} a_n \varrho_n$ , ahol  $\varrho_n$  a sokszögbe beírt kör sugara. Erről a 2.28. Lemmában már beláttuk, hogy teljesül rá a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = r$  összefüggés. A felosztás alapján az  $\mathcal{S}_n$  sokszög területére fennáll  $T(\mathcal{S}_n) = n(\frac{1}{2} a_n \varrho_n) = \frac{1}{2} \varrho_n(n a_n) = \frac{1}{2} \varrho_n \cdot K(\mathcal{S}_n)$ . Ebből a 2.29. Állítást felhasználva a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(\mathcal{S}_n) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} K(\mathcal{S}_n) = \frac{1}{2} r (2 r \pi) = r^2 \pi$$

összefüggést kapjuk. Mivel az  $\mathcal{S}_n$  ( $n \geq 3$ ) szabályos sokszögek az  $\mathcal{L}$  körlemeznek belső sokszögei, a fenti határértékből következik, hogy az  $\mathcal{L}$  körlemez belső területmértékére fennáll  $t_1(\mathcal{L}) \geq r^2 \pi$ .

Ismeretes, hogy tetszőleges korlátos síkidom esetében a belső mérték nem lehet nagyobb a külső mértéknél. Emiatt a fenti összefüggések alapján  $t_1(\mathcal{L}) = t_2(\mathcal{L}) = r^2 \pi$  teljesül. Ezzel beláttuk, hogy az  $\mathcal{L}$  körlemeznek van területe és annak mértéke  $r^2 \pi$ .  $\square$

A következő tételt ezúttal bizonyítás nélkül közöljük.

**2.31. Tétel.** *Ha az  $\mathcal{A}$  korlátos síkbeli alakzat konvex, akkor az  $\mathcal{A}$ -nak van területe.*

**Megjegyzés.** A fenti tétel azt mondja ki, hogy egy konvex  $\mathcal{A}$  korlátos síkbeli alakzat esetében, mindig fennáll a  $t_1(\mathcal{A}) = t_2(\mathcal{A})$  összefüggés.

A körlemez is egy konvex alakzat. Azonban a kör területével kapcsolatos tétel bizonyításában nem használtuk ki a 2.30. Tételt.

## A körcikk területe

A továbbiakban a szögeket nem fokban, hanem radiánban mérjük. Tehát a derékszög mértékének a  $\pi/2$  valós számot választjuk a szögmérésnél megadott egyik feltételként.

Legyen adva egy  $\sigma$  síkban egy  $O$  centrumú és  $r$  sugarú  $\mathcal{L}$  zárt körlemez, melyet a  $k_\sigma(O, r)$  körvonal határol.

**2.32. Definíció.** A körvonalon vegyünk két pontot  $A$ -t és  $B$ -t. Tekintsük az  $AOB\angle$  szögvonallal határolt egyik szögtartományt. Az  $\mathcal{L}$  körlemez és az  $AOB\angle$  szögtartomány  $\mathcal{C} = \mathcal{L} \cap AOB\angle$  metszetét körcikknek mondjuk.

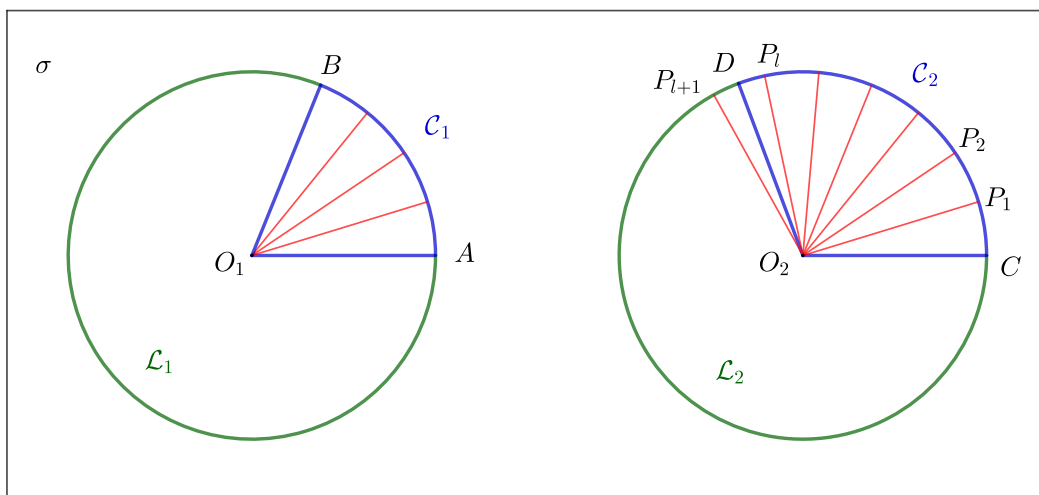
Az  $AOB\angle$  szöget a körcikk középponti szögének nevezzük. A kör  $O$  centruma a körcikk csúcsa.

**Megjegyzés.** Az  $AOB\angle$  szögtartomány és a  $k_\sigma(O, r)$  körvonal metszete a kör  $A, B$  pontokkal határolt egyik íve. A  $\mathcal{C}$  körcikket az  $OA, OB$  sugárszakaszok és az  $AB$  körív határolja. Ennek alapján is igazolható, hogy a körcikknek mindig van területe.

**2.33. Állítás.** Legyen adva két egyenlő sugarú körlemez  $\mathcal{L}_1$  és  $\mathcal{L}_2$ , továbbá két ezekből kimetszett körcikk  $\mathcal{C}_1$  és  $\mathcal{C}_2$ . Ha ezen körcikkek középponti szögeinek mértéke  $\alpha$  és  $\beta$ , akkor területükre fennáll a  $T(\mathcal{C}_2) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot T(\mathcal{C}_1)$  összefüggés.

**Bizonyítás.**

Feltehetjük, hogy a két körlemez egyazon  $\sigma$  síkban van. A sugaruk legyen  $r$ , a középpontokat pedig jelölje  $O_1$  és  $O_2$ . A  $\mathcal{C}_1$  és  $\mathcal{C}_2$  körcikkeket kimetsző szögtartományok legyenek  $AO_1B\angle$  és  $CO_2D\angle$ .



13. ábra. A  $\mathcal{C}_1$  és  $\mathcal{C}_2$  a körcikkek felosztása ( $n = 4$  eset).

Az  $AO_1B\angle$  szöget a 13. ábrának megfelelően osszuk fel  $n$  egyenlő részre. Ezek az  $\alpha/n$



mértékű szögek egybevágó kis körcikket metszenek ki  $\mathcal{C}_1$ -ből. Világos, hogy mivel ezek területei egyenlők, egy kis körcikknek a területe  $\frac{1}{n} \cdot T(\mathcal{C}_1)$ .

Vegyük most azt az egyértelműen létező  $l$  nemnegatív egész számot, amellyel fennáll a  $l \cdot \frac{\alpha}{n} \leq \beta < (l+1) \cdot \frac{\alpha}{n}$  összefüggés. Amennyiben ezt megszorozzuk az  $\frac{1}{\alpha}$  pozitív számmal azt kapjuk, hogy a két szögmérték hányadosára igaz  $\frac{l}{n} \leq \frac{\beta}{\alpha} < \frac{l+1}{n}$ . A  $CO_2D$  szög  $[O_2, C)$  szárához egymást követően  $l+1$  alkalommal mérjük föl a  $\alpha/n$  nagyságú szögeket. Az így nyert szögek másik szára által a körvonalból kimetszett pontokat jelölje  $P_1, \dots, P_l, P_{l+1}$ . Világos, hogy a  $P_iOP_{i+1}$  szögek által kimetszett körcikk területeinek mértéke is  $\frac{1}{n} \cdot T(\mathcal{C}_1)$ .

Vegyük észre, hogy a  $COP_l$  szöggel kimetszett körcikk tartalmazza  $\mathcal{C}_2$ , viszont a  $COP_{l+1}$  szöggel kimetszett körcikkben már benne van  $\mathcal{C}_2$ . Mivel ezek területei  $\frac{l}{n} \cdot T(\mathcal{C}_1)$  és  $\frac{l+1}{n} \cdot T(\mathcal{C}_1)$ , a  $\mathcal{C}_2$  körcikk területére teljesül az

$$\frac{l}{n} \cdot T(\mathcal{C}_1) \leq T(\mathcal{C}_2) < \frac{l+1}{n} \cdot T(\mathcal{C}_1)$$

egyenlőtlenség. Ha ezt megszorozzuk a  $\frac{1}{T(\mathcal{C}_1)}$  pozitív számmal, akkor azt kapjuk, hogy fennáll

$$\frac{l}{n} \leq \frac{T(\mathcal{C}_2)}{T(\mathcal{C}_1)} < \frac{l+1}{n}.$$

A fenti összefüggések szerint a  $\frac{\beta}{\alpha}$  és  $\frac{T(\mathcal{C}_2)}{T(\mathcal{C}_1)}$  hányadosok egyaránt az  $\frac{l}{n}$ ,  $\frac{l+1}{n}$  racionális számok közé esnek. Ily módon a különbségük abszolút értékére igaz

$$\left| \frac{T(\mathcal{C}_2)}{T(\mathcal{C}_1)} - \frac{\beta}{\alpha} \right| < \frac{1}{n}.$$

Mivel ez az egyenlőtlenség bármilyen nagy  $n$  pozitív egész számra fennáll, a két hányados különbsége csakis 0 lehet, azaz teljesül  $\frac{T(\mathcal{C}_2)}{T(\mathcal{C}_1)} = \frac{\beta}{\alpha}$ . Ebből viszont már következik az állításban szereplő összefüggés.  $\square$

A 2.33. Állítás. alapján már könnyen igazolni lehet a következő kijelentést.

**2.34. Állítás.** *Az  $r$  sugarú körlemezhez tartozó  $\alpha$  középponti szögű körcikk területe  $\frac{1}{2} r^2 \alpha$ .*

### 3) Síkbeli affin transzformációk

Korábban részletesen tárgyaltuk az egybevágósági és a hasonlósági transzformációkat. Ezek olyan transzformációk, amelyek egyenest egyenesbe képeznek és megőrzik azok párhuzamosságát. Emiatt a szabad vektorok terén indukálnak egy lineáris leképezést, amit fel tudunk használni a transzformációk analitikus leírása során.

Felvetődik a kérdés, hogy vajon vannak-e olyan síkbeli bijektív leképezések (más szóval transzformációk), amelyek egyenest egyenesbe képeznek, de nem hasonlósági transzformációk. Mint hamarosan látni fogjuk, a válasz igenlő.

#### A kollineáris ponthármas osztóviszonya

Az osztóviszony fogalmát már korábban bevezettük, de fontossága miatt célszerűnek tartjuk felidézni a vele kapcsolatos ismereteket.

Egy  $g$  egyenesen legyenek adva az egymástól különböző  $A$ ,  $B$ ,  $C$  pontok. Jelöljük ki a  $g$  egyenesen az egyik irányítást egy vele párhuzamos  $\mathbf{u}$  egységvektor rögzítésével. Ily módon az egyenesre eső irányított szakaszokhoz előjeles hosszát tudunk rendelni. Az  $\overrightarrow{AC}$  irányított szakasz előjeles hosszán az  $AC = \overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{u}$  skaláris szorzatot értjük. Eszerint amennyiben az  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\mathbf{u}$  vektorok iránya megegyezik, akkor fennáll  $AC = d(A, C)$ . Ha pedig  $\overrightarrow{AC}$  és az  $\mathbf{u}$  iránya ellentétes, akkor  $AC = -d(A, C)$  teljesül.

**3.1. Definíció.** Az egy egyenesre eső  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ponthármas osztóviszonyán az  $\overrightarrow{AC}$  és  $\overrightarrow{CB}$  irányított szakaszok előjeles hosszainak hányadosát, azaz az  $(ABC) = \frac{AC}{CB}$  számot értjük.

**Megjegyzés.** A kollineáris  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ponthármas osztóviszonya nem függ a tartalmazó egyenes irányításának megválasztásától. Ugyanis, ha az ellentétes irányítást vesszük, akkor  $\overrightarrow{AC}$  és  $\overrightarrow{CB}$  előjeles hossza egyaránt a  $(-1)$ -szeresére változik.

**Megjegyzés.** Egy  $g$  egyenesen rögzítsük az  $A$ ,  $B$  pontokat és  $C$  legyen a  $g$ -nek egy további pontja. Ha a  $C$  pont rajta van az  $\overline{AB}$  szakaszon, akkor az  $\overrightarrow{AC}$  és  $\overrightarrow{CB}$  irányított szakaszok iránya megegyezik, tehát fennáll  $(ABC) > 0$ . Amennyiben  $C$  nincs rajta van az  $\overline{AB}$  szakaszon, akkor az  $\overrightarrow{AC}$  és  $\overrightarrow{CB}$  iránya ellentétes, amiből  $(ABC) < 0$  adódik.

**Megjegyzés.** Egy  $g$  egyenesen rögzítsük az  $A$ ,  $B$  pontokat és  $P$  fussa be  $g$ -nek az összes többi pontját. Ekkor az  $(ABP)$  osztóviszony értéke felveszi a valós számok  $\mathbb{R}$  halmazának a 0-tól és  $-1$ -től különböző elemeit. Bármely  $u$  ( $u \neq 0$ ,  $u \neq -1$ ) valós számhoz pontosan egy olyan  $P$  pont van a  $g$  egyenesen, amelyre fennáll  $(ABP) = u$ .

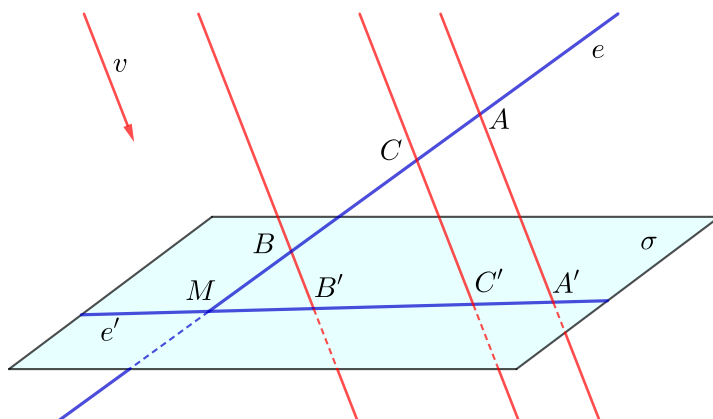
#### A paralel vetítés tulajdonságai

Amennyiben egy térbeli alakzatot síkbeli vetületével szeretnénk ábrázolni (vagy más szóval szemléltetni), akkor ahhoz többnyire paralel vetítést alkalmazunk. A paralel vetítéshez szükség van egy  $\sigma$  képsíkra és egy a vetítés irányát meghatározó  $v$  egyenesre, amely nem párhuzamos a  $\sigma$  síkkal.

Ez esetben a tér tetszőleges  $P$  pontjához vegyük a  $P$ -n átmenő és  $v$ -vel párhuzamos egyenest, majd annak  $P'$  metszéspontját a  $\sigma$  képsíkkal. Ezt a  $P'$  pontot mondjuk a  $P$  pont

$v$  irányú paralel vetületének a  $\sigma$  síkon. Egy görbe paralel vetületét úgy kapjuk meg, hogy kijelöljük az alakzat összes pontjának a vetületét a képsíkon és vesszük ezen képpontok unióját.

Vetítőegyenest (illetve vetítősíknak) nevezünk egy egyenest (illetve egy síkot), ha az párhuzamos a vetítés irányát megadó  $v$  egyenessel. Világos, hogy a vetítőegyenest vetülete egyetlen pont, a vetítősík képe pedig egy egyenes.



14. ábra. A paralel vetítés megőrzi az osztóviszonyt, azaz fennáll  $(A B C) = (A' B' C')$ .

A paralel vetítéssel kapcsolatban a következő megállapításokat tehetjük.

(1) Ha veszünk egy  $e$  egyenest, amely nem párhuzamos  $v$ -vel, akkor pontosan egy olyan sík van, amely tartalmazza az  $e$ -t és párhuzamos  $v$ -vel. Ezen síknak a  $\sigma$  képsíkkal vett metszésvonala adja az  $e$  egyenes  $e'$  képét.

(2) Ha az  $a$ ,  $b$  egyenesek párhuzamosak egymással és nem vetítőegyenestek, akkor az  $a'$ ,  $b'$  képeik is párhuzamosak egymással.

(3) Ha veszünk egy paralelogrammát, amelynek egyik oldalegyenese sem vetítőegyenest, akkor a vetületi négyszög is egy paralelogramma.

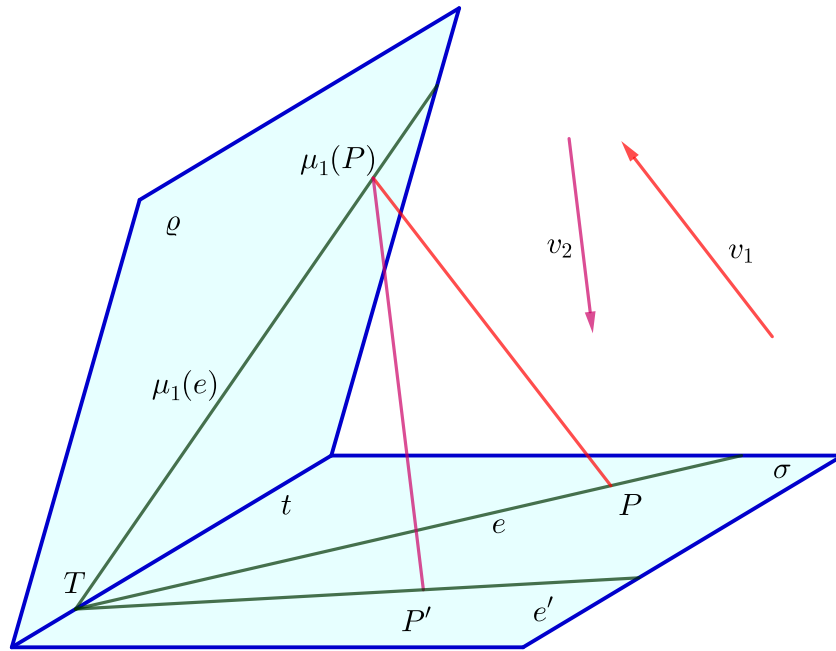
(4) A párhuzamos szelők tételéből következik, hogy a paralel vetítés megőrzi a kollineáris ponthármasok osztóviszonyát. Ugyanis, tekintsünk egy a  $v$ -vel nem párhuzamos  $e$  egyenest és azon az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  pontokat. Ha a tételt az  $e$ ,  $e'$  egyenesek szögére alkalmazzuk, akkor az előjeles szakaszok hányadosaiként nyert osztóviszonyokra fennáll az

$$(A B C) = \frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'} = (A' B' C') \quad \text{összefüggés. (Lásd a 14. ábrát.)}$$

(5) Legyen  $\varrho$  egy olyan sík, amely nem párhuzamos a vetítés irányát megadó  $v$  egyenessel. Ha a paralel vetítést leszűkítjük a  $\varrho$  síkra, akkor egy olyan  $\mu : \varrho \rightarrow \sigma$  bijektív leképezést kapunk, amely egyenestartó és megőrzi a kollineáris ponthármasok osztóviszonyát.

### Két paralel vetítés szorzataként nyert síkbeli transzformáció

Tekintsünk a térben a  $\sigma$ ,  $\varrho$  síkokat, amelyek egy  $t$  egyenesben metszik egymást. Vegyünk olyan  $v_1$ ,  $v_2$  egyeneseket, amelyek egyik síkkal sem párhuzamosak. Hajtsunk végre paralel vetítést a  $\sigma$  síkról a  $\varrho$  síkra  $v_1$  irányban. Ily módon egy  $\mu_1 : \sigma \rightarrow \varrho$  bijektív leképezést kapunk, amely egyenestartó, megőrzi az egyenesek párhuzamosságát és a kollineáris pont-hármasok osztóviszonyát. Ezt követően hajtsunk végre paralel vetítést a  $\varrho$  síkról a  $\sigma$  síkra  $v_2$  irányban. Az így nyert  $\mu_2 : \varrho \rightarrow \sigma$  bijektív leképezés is ugyanezen tulajdonságokkal rendelkezik.



15. ábra. Két paralel vetítés szorzataként nyert leképezés a  $\sigma$  síkban ( $P' = \mu_2(\mu_1(P))$ ).

Tekintsünk a síkok közötti paralel vetítések  $\varphi = \mu_2 \circ \mu_1$  szorzatát. Világos, hogy a  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  leképezés bijektív és megtartja a kollineáris ponthármasok osztóviszonyát. Vegyük észre, hogy a  $\varphi$  bijekció a  $t$  egyenes összes pontját fixen hagyja.

**Megjegyzés.** A 15. ábra szerinti  $\varphi$  leképezés nem lehet hasonlósági transzformáció. Ugyanis, a  $t$  egyenes pontjai fixen maradnak. Ha  $\varphi$  hasonlóság lenne, akkor emiatt az arányszámának  $\lambda = 1$  adódna, tehát  $\varphi$  egyúttal egybevágóság lenne. Márpedig csak két olyan síkbeli egybevágóság van, amelyek  $t$ -t fixen hagyják, konkrétan az  $id$  helybenhagyás és a  $t$  egyenesre történő tükrözés. Világos, hogy az ábrázolt  $\varphi = \mu_2 \circ \mu_1$  transzformáció ezektől különbözik.

Ezzel beláttuk, hogy vannak olyan egyenestartó és osztóviszonytartó bijektív leképezések a síkban, amelyek nem hasonlóságok.

## A síkbeli affin transzformációk alapvető tulajdonságai

Az alábbiakban bevezetjük a síkbeli affin transzformáció (vagy más szóval az affinitás) fogalmát. Jelöljük ki a térben egy  $\sigma$  síkot.

**3.2. Definíció.** Egy  $\sigma$  síkbeli affin transzformáción egy olyan  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  bijektív leképezést értünk, amely egyenest egyenesbe képez és megőrzi a kollineáris ponthármasok osztóviszonyát.

**Megjegyzés.** Az affin transzformációt rövidebben affinitásnak is szokás nevezni.

Világos, hogy a síkbeli hasonlósági (és egybevágósági) transzformációk egyúttal affin transzformációk is.

Az előzőek során a paralel vetítések alkalmazásával megmutattuk, hogy vannak olyan affin transzformációk, amelyek nem hasonlóságok.

Az alábbi állításban összefoglaljuk a síkbeli affinitások alapvető tulajdonságait.

**3.3. Állítás.** Legyen adott egy  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  affin transzformáció. Ekkor igazak az alábbi kijelentések.

- (1) A  $\varphi$  affinitás szakaszt szakaszba képez.
- (2) Párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe képez.
- (3) Ha valamely  $A, B, C, D$  pontokra fennáll az  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  összefüggés, akkor az  $A' = \varphi(A), B' = \varphi(B), C' = \varphi(C), D' = \varphi(D)$  képpontokkal teljesül  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$ .

**Bizonyítás.**

(1) Tekintsünk a  $\sigma$  síkban egy  $\overline{AB}$  szakaszt és a határpontok  $A' = \varphi(A), B' = \varphi(B)$  képpontjait. Vegyük az  $\overline{AB}$  szakasznak egy tetszőleges  $P$  belső pontját. Ekkor az  $A, B, P$  ponthármas osztóviszonyára fennáll  $(ABP) > 0$ . Mivel a  $\varphi$  affinitás megőrzi az osztóviszonyt, a képpontokra teljesül az  $(A'B'P') > 0$  egyenlőtlenség. Ez viszont azt jelenti, hogy a  $P' = \varphi(P)$  pont az  $\overline{A'B'}$  szakasznak lesz egy belső pontja. Ily módon azt kaptuk, hogy az  $\overline{AB}$  szakasz képe megegyezik az  $\overline{A'B'}$  szakasszal.

(2) Legyenek  $a$  és  $b$  párhuzamos egyenesek a  $\sigma$  síkban. Mivel a  $\varphi$  affinitás egy bijektív leképezés (vagyis különböző pontok képei különbözőek), az  $a' = \varphi(a)$  és  $b' = \varphi(b)$  képegyeneseknek nincs közös pontja, továbbá mindkettő benne van a  $\sigma$  síkban. Ez pedig azt jelenti, hogy  $a'$  és  $b'$  is párhuzamosak egymással.

(3) Az előzőekben már beláttuk, hogy  $\varphi$ -re teljesülnek az (1), (2) kijelentések. A párhuzamosság megtartása miatt a  $\varphi$  affin transzformáció paralelogrammát paralelogrammába képez, illetve egy szakasz felezőpontját a képszakasz felezőpontjába viszi. Ebből viszont már következik, hogy amennyiben az irányított szakaszokra fennáll az  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  egyenlőség, akkor a képpontokkal teljesül  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$ .  $\square$

Az előző állításban szereplő (3) kijelentés alapján az affin transzformáció is meghatároz egy leképezést a síkbeli vektorok  $\mathcal{V}_\sigma$  terén.

**3.4. Definíció.** A  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  affinitás által a síkbeli vektorok  $\mathcal{V}_\sigma$  terén indukált leképezésen azt a  $\hat{\varphi} : \mathcal{V}_\sigma \rightarrow \mathcal{V}_\sigma$  függvényt értjük, ahol tetszőleges  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$  vektor képére fennáll  $\hat{\varphi}(\mathbf{u}) = \overrightarrow{A'B'}$ .

A következő állítás igazolása ugyanúgy történik mint az egybevágóságok esetében. Emiatt a bizonyításra ezúttal nem térünk ki.

**3.5. Állítás.** Legyen adott egy  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  affin transzformáció. A  $\hat{\varphi}$  indukált leképezésre

tetszőleges  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}_\sigma$  vektorok és  $\lambda$  szám esetén teljesülnek az

$\hat{\varphi}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \hat{\varphi}(\mathbf{u}) + \hat{\varphi}(\mathbf{v}), \quad \hat{\varphi}(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \cdot \hat{\varphi}(\mathbf{u})$  összefüggések. Emellett  $\hat{\varphi}$  egy bijektív leképezés.

**Megjegyzés.** Az affin transzformációk (ellentétben a hasonlóságokkal) általában nem őrzik meg a szögek mértékét, más szóval nem szögtartóak.

### A síkbeli affinitások csoportja és annak részcsoportjai

A 3.2. Definíció alapján könnyű belátni, hogy amennyiben  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$  affin transzformációk a  $\sigma$  síkban, akkor a kompozíciójukkal nyert  $\varphi_2 \circ \varphi_1 : \sigma \rightarrow \sigma$  leképezés is affinitás.

Ha pedig  $\varphi$  egy affinitás a  $\sigma$  síkban, akkor a  $\varphi^{-1} : \sigma \rightarrow \sigma$  inverz leképezés is egy affin transzformáció.

**3.6. Definíció.** Legyenek adva a  $\sigma$  síkbeli  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$  affin transzformációk. Ezek szorzatán a  $\varphi_2 \circ \varphi_1 : \sigma \rightarrow \sigma$  affinitást értjük.

Könnyű belátni, hogy amennyiben  $\varphi_1, \varphi_2$  és  $\varphi_3$  affin transzformációk egy  $\sigma$  síkban, akkor szorzataikra fennáll a  $\varphi_3 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1) = (\varphi_3 \circ \varphi_2) \circ \varphi_1$  egyenlőség. Ezzel kapcsolatosan azt szokás mondani, hogy az affinitások körében értelmezett szorzás egy asszociatív művelet. Ez esetben is kitüntetett szerepet játszik az *id* identikus leképezés, amely a sík összes pontját fixen hagyja. Ezzel bármely  $\varphi$  affinitásra teljesülnek az  $id \circ \varphi = \varphi \circ id = \varphi$  és  $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = id$  összefüggések.

A fentiek alapján a leképezések kompozíciójára (mint szorzásműveletre) nézve a  $\sigma$  síkbeli affinitások egy csoportot alkotnak, amelyet a továbbiakban  $Aff(\sigma)$  fog jelölni.

Tekintsük most a  $\sigma$  síkbeli egybevágóságok (vagy más néven az izometriák)  $Iso(\sigma)$  csoportját, továbbá a síkbeli hasonlóságok  $Sim(\sigma)$  csoportját. (A jelölés ez esetben az angol *similarity* szóból ered.) Vegyük észre, hogy ezen transzformációcsoportok között fennáll az  $Iso(\sigma) \subset Sim(\sigma) \subset Aff(\sigma)$  tartalmazás.

### Tengelyes affinitások

Az affin transzformációk között kitüntetett szerepet játszanak az úgynevezett tengelyes affinitások. A fogalom értelmezése kézenfekvőnek tűnik.

**3.7. Definíció.** Egy  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  affin transzformációt tengelyesnek mondunk, ha van a síkban olyan  $t$  egyenes, amelynek összes pontját fixen hagyja  $\varphi$  (és fennáll  $\varphi \neq id$ ).

Ez esetben a  $t$  egyenest az affinitás tengelyének nevezzük.

**3.8. Állítás.** A  $\sigma$  síkban legyen adva egy  $t$  egyenes és az arra nem illeszkedő  $P, Q$  ( $P \neq Q$ ) pontok. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  tengelyes affinitás, amelynek  $t$  a tengelye és amelyre fennáll  $\varphi(P) = Q$ .

#### Bizonyítás.

A transzformáció létezésének igazolása. (Lásd a 16. ábrát.)

Vegyünk a térben egy olyan  $\varrho$  síkot, amely a  $t$  egyenesben metszi el a  $\sigma$  síkot. Jelöljük ki  $\varrho$ -ban egy olyan  $S$  pontot, amely nincs rajta  $t$ -n. Tekintsük a  $v_1 = \langle P, S \rangle$  és  $v_2 = \langle S, Q \rangle$  egyeneseket. Legyen  $\mu_1 : \sigma \rightarrow \varrho$  az a bijektív leképezés, amelyet úgy nyerünk, hogy a  $\sigma$  síkot rávetítjük a  $\varrho$  síkra a  $v_1$  egyenes irányában. Ezt követően vegyük azt a  $\mu_2 : \varrho \rightarrow \sigma$  bijektív leképezést, amelyet úgy kapunk, hogy a  $\varrho$  síkot rávetítjük a  $\sigma$  síkra a  $v_2$  egyenes irányában. Az előző 15. ábrán ez esetben  $S = \mu_1(P)$  és  $Q = \mu_2(S)$  teljesül.

Ezen paralel vetítések  $\mu_2 \circ \mu_1$  szorzata egy olyan affinitás a  $\sigma$  síkban, amely fixen hagyja a  $t$  egyenes pontjait és a  $P$  pontot a  $Q$  pontba képezi.

*A transzformáció egyértelműségének igazolása.*

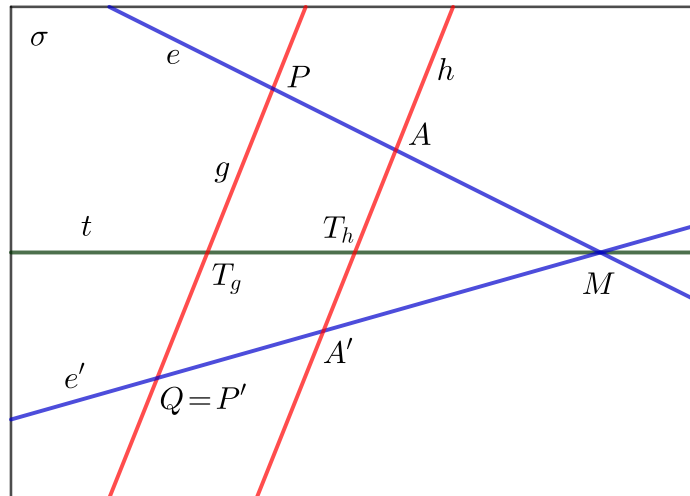
Legyen  $\varphi$  egy olyan tengelyes affinitás, amelynek a  $t$  egyenes a tengelye és a  $P$  pontot a  $Q$  pontba viszi. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a  $t$  tengely és a  $P, P' = Q$  pontpár már a sík bármely pontjának a képét meghatározza.

1. eset. Tegyük fel, hogy a  $P, Q$  pontok  $g$  összekötő egyenese elmettzi a  $t$  tengelyt egy  $T_g$  pontban. Mivel a  $T_g$  pontot  $\varphi$  fixen hagyja, a  $g = \langle T_g, P \rangle$  egyenes  $g'$  képe a képpontok  $\langle T_g, Q \rangle$  egyenese lesz, vagyis fennáll  $g' = g$ .

Vegyünk a síkban egy tetszőleges  $A$  pontot, amely nincs rajta  $g$ -n. Az  $A$  ponton átmenő és  $g$ -vel párhuzamos  $h$  egyenes metszse el a  $t$  tengelyt a  $T_h$  pontban. Ismeretes, hogy az affinitás párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe képez, tehát a  $h$  egyenes képe átmegegy a  $T_h$  ponton és párhuzamos a  $g' = g$  egyenessel. Ennek következtében a  $h$  egyenes képe is önmaga, azaz  $h' = h$  teljesül. Lásd a 16. ábrát.

Tegyük fel, hogy az  $e = \langle P, A \rangle$  egyenes az  $M$  pontban metszi el a  $t$  tengelyt. Világos, hogy ezen egyenes képe az  $e' = \langle Q, M \rangle$  egyenes. Mivel az  $A$  megegyezik a  $h, e$  egyenesek metszéspontjával, az  $A' = \varphi(A)$  pont csakis a  $h, e'$  egyenesek metszéspontja lehet.

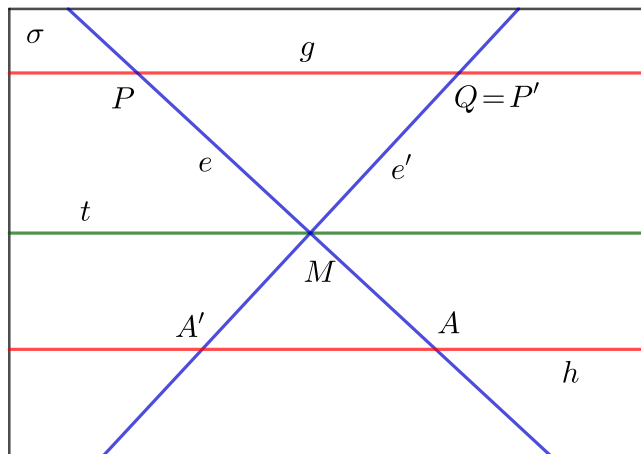
Amennyiben az  $e = \langle P, A \rangle$  egyenes párhuzamos  $t$ -vel, akkor annak  $e'$  képe a  $Q = P'$  ponton átmenő  $t$ -vel párhuzamos egyenes lesz, amely a  $h$  egyenest az  $A'$  pontban metszi el.



16. ábra. Az  $A$  pont képének kijelölése  $t$  és a  $P, Q = P'$  pontok ismeretében ( $g \nparallel t$  eset).

2. eset. Tegyük fel, hogy a  $P, Q = P'$  pontok  $g$  összekötő egyenese párhuzamos a  $t$  tengellyel. Mivel az affinitás megőrzi a párhuzamosságot, a  $g'$  képeggyenes átmegegy a  $Q$  ponton és párhuzamos  $t$ -vel. Legyen  $A$  egy olyan pont a  $\sigma$  síkon, amely nincs rajta  $g$ -n. Az  $A$  képét az affinitás egyenestartó és osztóviszonytartó tulajdonsága alapján ezúttal is ki

lehet jelölni. Az  $e = \langle A, P \rangle$  egyenes metsze el a  $t$  tengelyt az  $M$  pontban. Világos, hogy ennek képe az  $e' = \langle M, Q \rangle$  egyenes, hiszen  $M' = M$ . Mivel az affinitás osztóviszonytartó, az  $A'$  képpont az  $e'$  egyenesnek azon pontja, amelyre teljesül a  $(P M A) = (Q M A')$  összefüggés. Ilyen pont pedig csak egy van a  $e'$  egyenesen. A párhuzamos szelők tétele szerint ezt a pontot a  $g$ -vel párhuzamos  $h$  egyenes metszi ki az  $e'$  egyenesből.  $\square$



17. ábra. Az  $A$  pont képének kijelölése  $t$  és a  $P, Q = P'$  pontok ismeretében ( $g \parallel t$  eset).

Az előző 3.8. Állítás bizonyítása során az alábbi eredményt is igazoltuk.

**3.9. Következmény.** Legyen adott egy  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  tengelyes affinitás, melynek tengelye  $t$ . Vegyünk egy a  $t$ -re nem eső  $P$  pontot és annak  $P' = \varphi(P)$  képét. Ekkor a  $g = \langle P, P' \rangle$  egyenes iránya nem függ a síkbeli  $P$  pont megválasztásától.

A fenti 3.9. Következmény alapján egy újabb fogalmat tudunk bevezetni.

**3.10. Definíció.** A  $\varphi$  tengelyes affinitásnál legyen  $P$  egy olyan síkbeli pont, amely nincs a tengelyen.  $\varphi$  irányán a  $g = \langle P, P' \rangle$  egyenessel meghatározott irányt értjük.

Amennyiben az irány merőleges az affinitás tengelyére, akkor  $\varphi$ -t merőleges tengelyes affinitásnak nevezzük.

**3.11. Definíció.** Legyen adva egy  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  tengelyes affinitás. Ezt nyírásnak mondjuk, ha  $\varphi$  iránya párhuzamos a tengellyel.

### Síkbeli affinitás meghatározása ponthármasokkal

A továbbiakban azt a kérdést fogjuk megválaszolni, hogy hány síkbeli pont és képe határoznak meg egyértelműen egy affin transzformációt.

**3.12. Tétel.** A  $\sigma$  síkban legyenek adva az  $A_1, B_1, C_1$  és  $A_2, B_2, C_2$  ponthármasok, amelyek nincsenek egy egyenesen. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  affin transzformáció, amelyre fennáll  $\varphi(A_1) = A_2$ ,  $\varphi(B_1) = B_2$  és  $\varphi(C_1) = C_2$ .

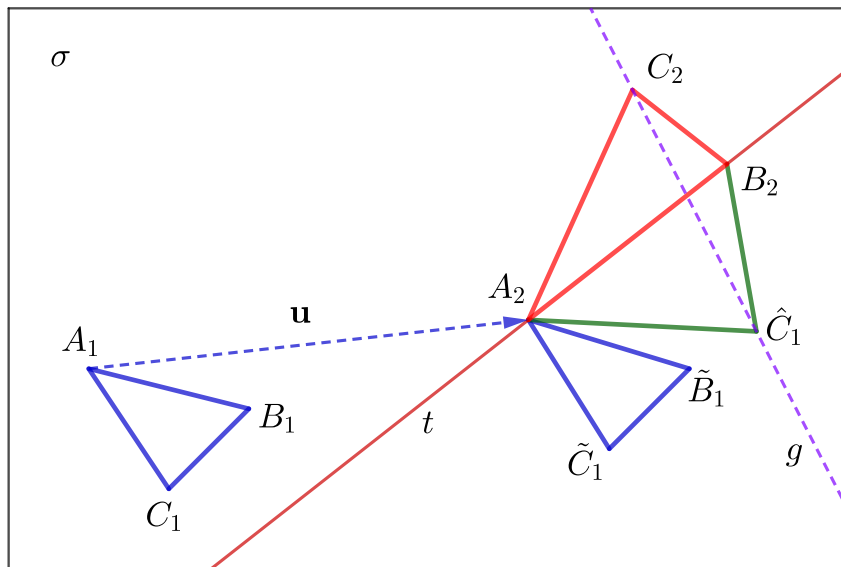


**Bizonyítás.**

*A transzformáció létezésének igazolása.*

Elsőként vegyünk a  $\mathbf{u} = \overrightarrow{A_1A_2}$  vektorral történő  $\varepsilon : \sigma \rightarrow \sigma$  eltolást a síkban. Evidens, hogy ez az eltolás az  $A_1$  pontot az  $A_2$ -be viszi. A  $B_1$  és  $C_1$  pontok eltolással nyert képeire alkalmazzuk a  $\tilde{B}_1 = \varepsilon(B_1)$ ,  $\tilde{C}_1 = \varepsilon(C_1)$  jelölést.

Tekintsük az  $\alpha = \angle B_1A_2B_2$  előjeles szöveget. Legyen  $\eta$  az a forgatva nyújtás, amelynek centruma az  $A_2$  pont, a forgatás szöge  $\alpha$  és a hasonlóság aránya  $\lambda = \frac{A_2B_2}{A_1B_1}$ . Emlékezzünk rá, hogy a forgatva nyújtás valójában az  $A_2$  pont körüli elforgatás és az  $A_2$  centrumú,  $\lambda$  arányú középpontos hasonlóság szorzata. Vegyük észre, hogy ez a transzformáció a  $\tilde{B}_1$  pontot a  $B_2$ -be képezi. A  $\tilde{C}_1$  pont képére ezúttal használjuk a  $\hat{C}_1 = \eta(\tilde{C}_1)$  jelölést. Végül tegyük fel, hogy a  $\hat{C}_1$  és  $C_2$  pontok különbözőek. Tekintsük most azt a  $\tau$ -val jelölt



18. ábra. Az  $A_1, B_1, C_1$  pontok átvitele a  $\varphi = \tau \circ \eta \circ \varepsilon$  affinitással az  $A_2, B_2, C_2$  pontokba.

tengelyes affinitást, amelynek tengelye a  $t = \langle A_2, B_2 \rangle$  egyenes és amely a  $\hat{C}_1$  pontot a  $C_2$  pontba képezi. A 3.8. Állítás szerint egyértelműen létezik ilyen  $\tau$  tengelyes affinitás.

Vegyünk az  $\varepsilon$  eltolás, az  $\eta$  forgatva nyújtás és a  $\tau$  tengelyes tükrözés szorzataként adódó  $\varphi = \tau \circ \eta \circ \varepsilon$  affin transzformációt. Világos, hogy ez a transzformáció egy olyan affinitás, amely az  $A_1, B_1, C_1$  pontháromast az  $A_2, B_2, C_2$  pontháromasba képezi.

*A transzformáció egyértelműségének igazolása.*

Tegyük fel, hogy egy affin transzformációnál a nem kollineáris  $A_1, B_1, C_1$  pontok a megadott  $A_2, B_2, C_2$  pontokba képeződnek. Az affinitás egyenestartó és osztóviszonytartó tulajdonsága alapján megmutatjuk, hogy ekkor a  $\sigma$  sík bármely pontjának képe már egyértelműen meghatározott.

Tegyük fel, hogy egy  $Q$  pont rajta van az  $A_1B_1C_1$  háromszög egyik oldalegyenesén. Ez esetben legyen  $\langle B_1, C_1 \rangle$  a tartalmazó oldalegyenes. Vegyük a  $B_1, C_1, Q$  ponthármas osztóviszonyát. Mivel az affinitás megőrzi az osztóviszonyt a  $Q$  pont képe a  $\langle B_2, C_2 \rangle$  egyenes azon  $Q'$  pontja lesz, amelyre fennáll  $(B_2 C_2 Q') = (B_1 C_1 Q)$ . Márpedig a  $\langle B_2, C_2 \rangle$  egyenesen csak egyetlen ilyen pont létezik.

Tekintsük most a  $\sigma$  sík egy olyan  $P$  pontját, amely nincs rajta az  $A_1B_1C_1\Delta$  egyik oldalegyenesén sem. Ekkor mindig van olyan csúcs a háromszögben, hogy annak a  $P$ -vel vett összekötő egyenese elmetszi a szemközti oldalegyenest. Jelen esetben tegyük fel, hogy  $g = \langle A_1, P \rangle$  elmetszi a  $\langle B_1, C_1 \rangle$  oldalegyenest a  $Q$  pontban. Az osztóviszonytartás alapján jelöljük ki előbb a  $Q'$  képpontot. Világos, hogy  $g$  affin képe az  $\langle A_2, Q' \rangle = g'$  egyenes, amely tartalmazza a  $P'$  képpontot. Ezt a  $P'$  pontot már egyértelműen kijelöli a  $g'$  egyenesen az  $(A_2 Q' P') = (A_1 Q P)$  összefüggés.

Mivel bármely  $\sigma$ -beli pont affin képe már egyértelműen meghatározott, csak egyetlen olyan affinitás van, amely az  $A_1, B_1, C_1$  pontokat az  $A_2, B_2, C_2$  pontokba képezi.  $\square$

Amennyiben az *id* helybenhagyást egy speciális tengelyes affinitásnak tekintjük, akkor az előző tétel bizonyítása alapján igaz az alábbi kijelentés.

**3.13. Következmény.** *Egy síkbeli  $\varphi$  affin transzformáció mindig előáll egy hasonlóság és egy tengelyes affinitás szorzataként.*

#### A síkbeli affinitások egy osztályozása

Mint ismeretes, az irányított síkban a síkbeli zászlókat két osztályba lehet sorolni. Ahogy az egybevágóságok esetében történt, az affin transzformációkat is osztályozni lehet a síkbeli zászlók és képek alapján.

**3.14. Definíció.** A  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  affin transzformációt irányítástartónak mondjuk, ha  $\varphi$  a síkbeli zászlók két osztályát önmagukba képezi.

Amennyiben a  $\varphi$  affinitás felcseréli a síkbeli zászlók két osztályát, akkor irányításváltónak nevezzük.

**Megjegyzés.** Szemléletesen a  $\varphi$  affinitás irányítástartó vagy irányításváltó jellege az alábbi módon dönthető el. Vegyünk egy  $ABC\Delta$  háromszöget és annak egy  $\varphi$  affinitás szerinti  $A'B'C'\Delta$  képét. Az  $A, B, C$  és  $A', B', C'$  ponthármasok ebben a sorrendben meghatároznak egy-egy forgásirányt a síkban. Ha ez a két forgásirány megegyezik, akkor a  $\varphi$  affinitás irányítástartó. Amennyiben a két forgásirány ellentétes, akkor  $\varphi$  irányításváltó.

### A síkbeli affin transzformációk analitikus leírása

A térben vegyünk egy  $\sigma$  síkot, és ezen adjunk meg egy irányítást a síkra merőleges egyik egységvektorral, melyet ezúttal jelöljön  $\mathbf{k}$ . Ily módon azt a  $\sigma$  által határolt féletteret tüntetjük ki, amelyikbe a  $\mathbf{k}$  vektor mutat. A  $\sigma$  síkban rögzítsünk egy  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$  Descartes-féle koordináta-rendszert. Ennek  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  alapvektorait úgy válasszuk meg, hogy az  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  ortonormált vektorhármas egy jobbrendszert képezzen. Legyenek  $E_1$  és  $E_2$  azon síkbeli pontok, melyekre fennáll  $\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{i}$  és  $\overrightarrow{OE_2} = \mathbf{j}$ .

Tekintsünk egy  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  affin transzformációt. Mint ismeretes, a  $\varphi$  meghatároz (vagy más szóval indukál) egy  $\hat{\varphi} : \mathcal{V}_\sigma \rightarrow \mathcal{V}_\sigma$  leképezést a síkbeli szabad vektorok  $\mathcal{V}_\sigma$  terén, és ezt a  $\hat{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$  összefüggés írja le tetszőleges  $A, B \in \sigma$  pontok esetében.

A 3.5. Állításnak megfelelően a  $\hat{\varphi}$  indukált leképezésre teljesülnek a  $\hat{\varphi}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \hat{\varphi}(\mathbf{u}) + \hat{\varphi}(\mathbf{v})$ ,  $\hat{\varphi}(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \cdot \hat{\varphi}(\mathbf{u})$  összefüggések bármely  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}_\sigma$  vektorokra és  $\lambda \in \mathbb{R}$  valós számra.

Fejezzük ki a  $\hat{\varphi}(\mathbf{i}), \hat{\varphi}(\mathbf{j})$  képvektorokat az  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  bázisvektorokból a

$$\hat{\varphi}(\mathbf{i}) = a_{11} \mathbf{i} + a_{21} \mathbf{j}, \quad \hat{\varphi}(\mathbf{j}) = a_{12} \mathbf{i} + a_{22} \mathbf{j}$$

egyenletekkel.

**3.15. Definíció.** A fenti kifejezések együtthatóiból képzett  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  mátrixot nevezzük a  $\varphi$  által indukált  $\hat{\varphi}$  leképezés  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  bázisra vonatkozó mátrixának.

A fentiek alapján már igazolni lehet az alábbi kijelentést.

**3.16. Állítás.** Legyen adva egy  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  síkbeli affin transzformáció. A  $\hat{\varphi}$  indukált leképezés  $\mathbf{A}$  mátrixának determinánsára fennáll a  $\det \mathbf{A} \neq 0$  összefüggés. Ha  $\det \mathbf{A} > 0$  teljesül, akkor  $\varphi$  irányítástartó. Ha pedig  $\det \mathbf{A} < 0$ , akkor a  $\varphi$  affinitás irányításváltó.

**Bizonyítás.**

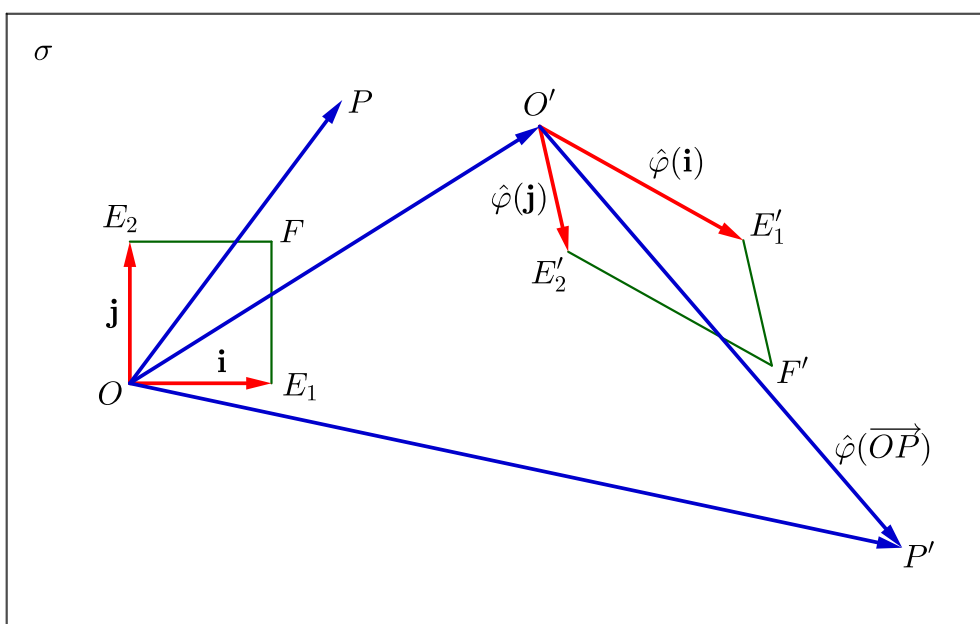
Mivel az  $O, E_1, E_2$  pontok nincsenek egy egyenesen, az  $O', E'_1, E'_2$  képpontok sem kollinearissak. Ennek következtében a  $\hat{\varphi}(\mathbf{i}) = \overrightarrow{O'E'_1}$ ,  $\hat{\varphi}(\mathbf{j}) = \overrightarrow{O'E'_2}$  vektorok nem párhuzamosak egymással, tehát a vektoriális szorzatuk nem lehet  $\mathbf{0}$ . Egyszerű számolással adódik, hogy a vektoriális szorzatukra fennáll

$$\hat{\varphi}(\mathbf{i}) \times \hat{\varphi}(\mathbf{j}) = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \mathbf{k} = (\det \mathbf{A}) \cdot \mathbf{k},$$

amiből  $\det \mathbf{A} \neq 0$  adódik.

Tekintsük a  $g = \langle O, E_1 \rangle$  egyenest és a síkbeli  $\mathcal{Z} = ([O, E_1], [g, E_2])$  zászlót, amely a  $\mathbf{k}$  vektorral történt irányítás miatt a síkbeli zászlók első osztályához tartozik. Ennek  $\varphi$  szerinti képe a  $\mathcal{Z}' = ([O', E'_1], [g', E'_2])$  zászló. Vegyük észre, hogy a  $\mathcal{Z}'$  zászló aszerint tartozik az első (illetve a második) osztályhoz, hogy a  $\hat{\varphi}(\mathbf{i}), \hat{\varphi}(\mathbf{j}), \mathbf{k}$  vektorhármas jobbrendszert (illetve balrendszert) képez. Emlékezzünk rá, hogy a jobbrendszert adó vektorhármas esetében a vegyes szorzat előjele pozitív, balrendszer esetében pedig negatív. Márpedig a vektoriális szorzat fenti kifejezése szerint a vegyes szorzatra fennáll a  $(\hat{\varphi}(\mathbf{i}) \times \hat{\varphi}(\mathbf{j})) \cdot \mathbf{k} = \det \mathbf{A}$  összefüggés. Ebből pedig már következik a fenti állítás.  $\square$

A koordinátázott síkban az affin transzformációt is egy mátrixegyenlettel lehet leírni. Ennek igazolása ugyanúgy történik, mint az egybevágóságok esetében. (A 19. ábra segít



19. ábra. A  $\varphi$  affinitás az  $OE_1FE_2$  négyzetet az  $O'E'_1F'E'_2$  paralelogrammába képezi.

a levezetés megértésében.)

**3.17. Állítás.** Legyen adott egy  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  affin transzformáció. Az  $O$  kezdőpont  $O' = \varphi(O)$  képének koordinátái legyenek  $(b_1, b_1)$  és a  $\hat{\varphi}$  leképezést az  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  bázisra vonatkozóan írja le az  $\mathbf{A}$  mátrix. Ekkor tetszőleges  $P(x, y)$  pont  $P' = \varphi(P)$  képének  $(x', y')$  koordinátáira fennáll a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

mátrixegyenlet.

**Bizonyítás.**

Vegyünk egy  $\sigma$ -beli  $P$  pontot, amelynek helyvektorát állítsuk elő az  $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  alakban. A  $P' = \varphi(P)$  képpont koordinátapárja legyen  $(x', y')$ , ami annyit jelent, hogy igaz  $\overrightarrow{OP'} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}$ . Vegyük észre, hogy fennáll

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{OO'} + \hat{\varphi}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OO'} + \hat{\varphi}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \\ &= \overrightarrow{OO'} + x\hat{\varphi}(\mathbf{i}) + y\hat{\varphi}(\mathbf{j}). \end{aligned}$$

Ily módon azt kapjuk, hogy teljesül

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP'} &= b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + x(a_{11}\mathbf{i} + a_{21}\mathbf{j}) + y(a_{12}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j}) \\ &= (a_{11}x + a_{12}y + b_1)\mathbf{i} + (a_{21}x + a_{22}y + b_2)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Mivel  $\overrightarrow{OP'}$  egyértelműen áll elő az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  bázisvektorok lineáris kombinációjaként, így fennáll

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2.$$

Ez a két egyenlet pedig egyenértékű az alábbi mátrixegyenlettel

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (3.1.)$$

Igazolható a következő állítás is, de a bizonyításra most nem térünk ki.

**3.18. Állítás.** *Legyen adott egy olyan  $2 \times 2$ -es  $\mathbf{A}$  valós mátrix, melynek determinánsa nem 0, továbbá valamely  $b_1$ ,  $b_2$  valós számok. Tekintsük azt a  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  leképezést, ahol tetszőleges  $P(x, y)$  pont  $P' = \varphi(P)$  képének  $(x', y')$  koordinátáit az*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ mátrixegyenlet adja meg. Ekkor } \varphi \text{ egy síkbeli affinitás.}$$

**Megjegyzés.** A 3.18. Állítás bizonyítása során azt kellene belátni, hogy a mátrixegyenlettel leírt  $\varphi$  leképezés bijektív, egyenest egyenesbe képez és megőrzi a kollineáris ponthármasok osztóviszonyát.

Azt is igazolni lehet, hogy a  $\varphi$  transzformáció akkor és csak akkor egybevágóság, ha az  $\mathbf{A}$  mátrix ortogonális, vagyis  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$  teljesül, ahol  $\mathbf{A}^T$  a transzponált mátrixot és  $\mathbf{E}$  az egységmátrixot jelöli.

Amennyiben valamely  $\lambda > 0$  számmal fennáll az  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \lambda^2 \cdot \mathbf{E}$  összefüggés, akkor a  $\varphi$  affinitás egy hasonlósági transzformáció.

### A síkbeli affinitás területi arányszáma

A továbbiakban is feltesszük, hogy a  $\sigma$  síkban rögzítve van egy  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$  Descartes-féle koordináta-rendszer. Az alábbiak során megmutatjuk, hogy bármely  $\varphi$  síkbeli affinitáshoz hozzárendelhető egy területi arányszám. Ennek igazolása során felhasználjuk majd az alábbi segédtételt.

Vegyünk három nem kollineáris pontot a koordinátáikkal. Ezek legyenek  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  és  $P_3(x_3, y_3)$ . Jelölje  $T(P_1P_2P_3\Delta)$  a  $P_1P_2P_3$  háromszög területét.

**3.19. Lemma.** *A koordináták különbségeiből képzett  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$  mátrix determinánsának abszolút értékére fennáll  $|\det \mathbf{M}| = 2 \cdot T(P_1P_2P_3\Delta)$ .*

**Bizonyítás.**

Tekintsük a  $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$  és  $\overrightarrow{P_1P_3} = (x_3 - x_1)\mathbf{i} + (y_3 - y_1)\mathbf{j}$  vektorokat. Ezek kifeszítenek egy síkbeli paralelogrammát, melynek területe  $2 \cdot T(P_1P_2P_3\Delta)$ . Ismeretes, hogy ez a terület megegyezik a  $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$  vektoriális szorzat hosszával. Közvetlen számolással adódik, hogy fennáll  $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = ((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))\mathbf{k}$ , ahol  $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$  a síkra merőleges egységvektor. Látható, hogy a  $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$  szorzat megegyezik a  $\det \mathbf{M} \cdot \mathbf{k}$  vektorral, amiből  $\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = |\det \mathbf{M}|$  következik. Ez már igazolja a segédtételt.  $\square$

A továbbiakban majd felhasználjuk azt is, miszerint ha adva van két  $2 \times 2$ -es mátrix  $\mathbf{A}$  és  $\mathbf{M}$ , akkor a szorzatuk determinánsára teljesül  $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{M}$ .

**3.20. Állítás.** *Legyen adott egy  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  affin transzformáció, melyet a (3.1) mátrix-egyenlet ír le. Vegyünk a síkban egy  $P_1P_2P_3$  háromszöget és annak  $P'_1P'_2P'_3\Delta$  affin képét. Ekkor a területekre fennáll a  $T(P'_1P'_2P'_3\Delta) = |\det \mathbf{A}| \cdot T(P_1P_2P_3\Delta)$  összefüggés.*

**Bizonyítás.**

A csúcspontok  $P_r(x_r, y_r)$  és  $P'(x'_r, y'_r)$  koordinátáira (3.1) szerint fennállnak az

$$\begin{pmatrix} x'_r \\ y'_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

egyenlőségek ( $r = 1, 2, 3$ ). Ha az  $r = 2$  és  $r = 3$  indexértékeknek megfelelő mátrixegyenletből kivonjuk az  $r = 1$  szerinti egyenletet, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} x'_2 - x'_1 \\ y'_2 - y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'_3 - x'_1 \\ y'_3 - y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

teljesül. Vegyük észre, hogy ezt a két összefüggést össze lehet vonni az alábbi

$$\begin{pmatrix} x'_2 - x'_1 & x'_3 - x'_1 \\ y'_2 - y'_1 & y'_3 - y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

mátrixegyenletbe. Eszerint a képpontok koordinátáinak különbségeiből képzett  $\mathbf{M}'$  mátrixra fennáll  $\mathbf{M}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}$ . Emiatt a determinánsok abszolút értékeire

$|\det \mathbf{M}'| = |\det \mathbf{A}| \cdot |\det \mathbf{M}|$  teljesül. Felhasználva a 3.19. Lemmát ebből már adódik a  $T(P'_1P'_2P'_3\Delta) = |\det \mathbf{A}| \cdot T(P_1P_2P_3\Delta)$  összefüggés.  $\square$

A  $\sigma$  síkban vett bármely  $\mathcal{S}$  sokszög felosztható páronként közös belső ponttal nem rendelkező háromszögekre. Emiatt a 3.20. Állítás alapján igaz az alábbi kijelentés is.

**3.21. Következmény.** *Legyen adott egy  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  affinitás, melyet a (3.1) mátrixegyenlet ír le. Vegyünk  $\sigma$ -ban egy tetszőleges  $\mathcal{S}$  sokszöget és annak  $\mathcal{S}' = \varphi(\mathcal{S})$  képét. Ezek területeinek hányadosára fennáll a  $\frac{T(\mathcal{S}')}{T(\mathcal{S})} = |\det \mathbf{A}|$  összefüggés.*

A fenti eredmények indokolttá teszik az alábbi fogalom bevezetését.

**3.22. Definíció.** *Legyen adott egy  $\varphi : \sigma \rightarrow \sigma$  affinitás. Tekintsük a  $\varphi$  által indukált  $\hat{\varphi} : \mathcal{V}_\sigma \rightarrow \mathcal{V}_\sigma$  leképezést, melyet írjon le az  $\mathbf{A}$  mátrix az  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  ortonormált alapvektorokra nézve. A  $\varphi$  affinitás területi arányszámán a  $t(\varphi) = |\det \mathbf{A}|$  pozitív számot értjük.*

#### 4) Síkbeli inverziók

Ebben a fejezetben főként a síkbeli inverziókat tárgyaljuk. Mint látni fogjuk, ezek már nem egyenestartó transzformációk. Az inverziót szokás körre tükrözésnek is nevezni, mivel az alapkörének pontjait fixen hagyja és önmagukba képezi azon egyeneseket és köröket, amelyek derékszögben metszik el az alapkört. Az inverzió egy egyenest vagy körbe vagy pedig egyenesbe képez, és ugyanez igaz a kör inverzióval nyert képére is. Az inverzió elnevezést egyébként az indokolja, hogy ezen transzformáció inverz leképezése önmaga.

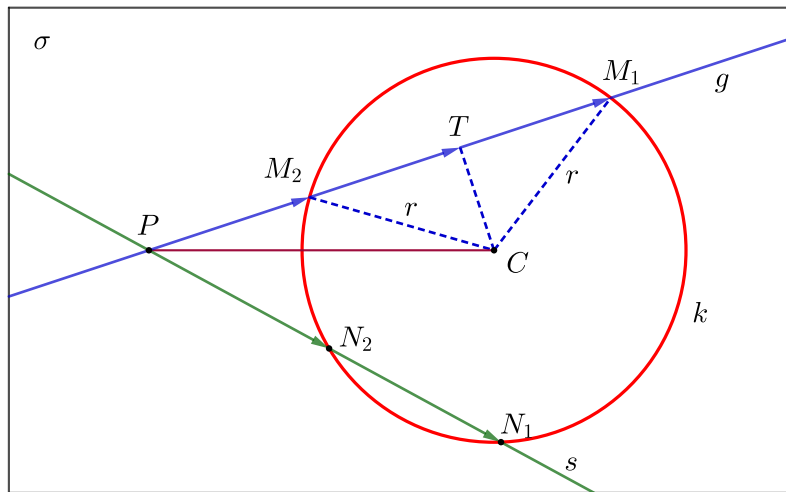
##### A körökhöz kapcsolódó geometriai fogalmak

Vizsgálatainkat a tér egy rögzített  $\sigma$  síkjában végezzük. A pont körre vonatkozó hatványának fogalmával már korábban megismerkedtünk. A hatvány fontos szerepet játszik az inverzió tárgyalásában, emiatt célszerűnek tartjuk felidézni a vele kapcsolatos ismereteket. A hatvány értelmezése az alábbi állításon alapul.

**4.1. Állítás.** Legyen adott a  $\sigma$  síkban egy  $k$  körvonal, amelynek centruma  $C$  és sugara  $r$ . Vegyünk a síkban egy  $P$  pontot és egy arra illeszkedő  $g$  egyenest, amely az  $M_1, M_2$  pontokban metszi el a  $k$  kört. Ez esetben a  $\overrightarrow{PM_1}, \overrightarrow{PM_2}$  vektorok skaláris szorzatára fennáll a  $\overrightarrow{PM_1} \cdot \overrightarrow{PM_2} = CP^2 - r^2$  összefüggés.

**Bizonyítás.**

A kör centrumából a  $g$  egyeneshez húzott merőleges szakasz talppontja legyen  $T$ . Világos,



20. ábra. A  $k$  körnek egy  $P$  ponton átmenő  $g, s$  szelőegyenesei ( $PM_1 \cdot PM_2 = PN_1 \cdot PN_2$ ).

hogy  $T$  felezőpontja az  $M_1M_2$  szakasznak. Emiatt fennállnak a  $\overrightarrow{TM_1} + \overrightarrow{TM_2} = \mathbf{0}$ ,  $\overrightarrow{PM_1} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TM_1}$  és  $\overrightarrow{PM_2} = \overrightarrow{PT} - \overrightarrow{TM_1}$  összefüggések. Ily módon a skaláris szorzatra

$$\overrightarrow{PM_1} \cdot \overrightarrow{PM_2} = (\overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TM_1}) \cdot (\overrightarrow{PT} - \overrightarrow{TM_1}) = \overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{PT} - \overrightarrow{TM_1} \cdot \overrightarrow{TM_1} = PT^2 - (TM_1)^2$$

teljesül. A  $CTP$  és  $CTM_1$  derékszögű háromszögek oldalaira pedig nyilván igazak a  $PT^2 = CP^2 - CT^2$  és  $(TM_1)^2 = r^2 - CT^2$  egyenlőségek. Ezeket felhasználva a fenti összefüggésből adódik, hogy a skaláris szorzatra fennáll  $\overrightarrow{PM_1} \cdot \overrightarrow{PM_2} = CP^2 - r^2$ .  $\square$

**Megjegyzés.** A  $g$  egyenesen adjuk meg az egyik irányítást. Ez esetben a  $\overrightarrow{PM_1}$ ,  $\overrightarrow{PM_2}$  irányított szakaszokhoz előjeles hosszát lehet rendelni. Vegyük észre, hogy a  $\overrightarrow{PM_1} \cdot \overrightarrow{PM_2}$  szorzat valójában megegyezik ezen előjeles hosszak szorzatával.

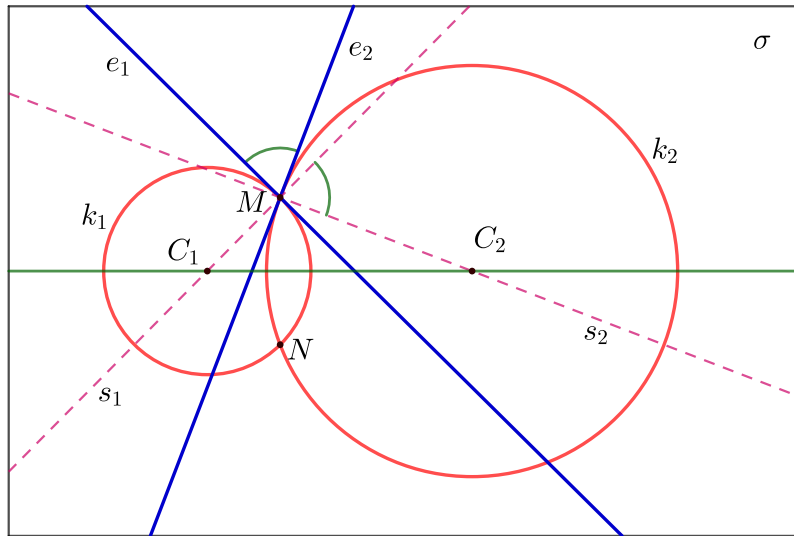
A fenti állítás szerint ez a szorzat nem függ attól, hogy a  $P$  ponton áthaladó szelő-egyenesek közül melyiket választjuk.

**4.2. Definíció.** A  $\sigma$  síkban legyen adva egy  $k$  kör, amelynek középpontja  $C$  és sugara  $r$ . Egy  $P$  pontnak a  $k$  körre vonatkozó hatványán a  $h(P, k) = CP^2 - r^2$  számot értjük.

**Megjegyzés.** Világos, hogy amennyiben  $P$  egy külső pontja a  $k$  körnek, akkor a hatványra fennáll  $h(P, k) > 0$ . Ha pedig  $P$  a  $k$  kör belsejében van, akkor  $h(P, k) < 0$  teljesül. A  $h(P, k)$  hatvány értéke pontosan akkor 0, ha  $P$  rajta van a körvonalon.

Az alábbiakban a metsző körök hajlásszögének fogalmát vezetjük be.

**4.3. Definíció.** A síkban legyenek adva az egymást metsző  $k_1$  és  $k_2$  körök. Vegyük a két metszéspont egyikét és abban a körök  $e_1$ ,  $e_2$  érintőit. A  $k_1$ ,  $k_2$  metsző körök hajlásszögén az  $e_1$ ,  $e_2$  érintőegyenesek szögét értjük.



21. ábra. A  $k_1$ ,  $k_2$  körök érintői és sugáregyenesei az  $M$  metszéspontban.

**Megjegyzés.** A 16. ábrán szereplő  $k_1$ ,  $k_2$  körök az  $M$ ,  $N$  pontokban metszik egymást. Az  $M$  metszéspontbeli érintők és az  $s_1 = \langle C_1, M \rangle$ ,  $s_2 = \langle C_2, M \rangle$  sugáregyenesek vannak feltüntetve. Világos, hogy az  $M$ ,  $N$  pontban a körök érintőegyenesei ugyanakkora szöget zárnak be egymással. Ugyanis, a középpontok  $c = \langle C_1, C_2 \rangle$  egyenesére történő tükrözés felcseréli az  $M$ ,  $N$  pontokat és a metszéspontokban vett érintőegyeneseket.



Az alábbi egyszerű állítás, amelyet a későbbiek során majd felhasználunk, az egymásra merőleges körökre vonatkozik.

**4.4. Állítás.** *A síkban legyen adott két egymást metsző kör  $k_1$  és  $k_2$ , melyek centrumai  $C_1$  és  $C_2$ , a sugaraik pedig  $r_1$  és  $r_2$ . A két kör derékszögben metszi egymást akkor és csak akkor, ha a középpontok távolságára fennáll a*

$$(C_1C_2)^2 = (r_1)^2 + (r_2)^2 \text{ összefüggés.}$$

**Bizonyítás.**

Tekintsük a 21. ábrát, amelyen  $M$  és  $N$  jelöli a két kör metszéspontjait. Vegyük észre, hogy az  $M$  pontbeli  $e_1$ ,  $e_2$  érintőegyenesek, illetve az  $s_1$ ,  $s_2$  sugáregyenesek szöge megegyezik. Ez abból is következik, hogy az  $M$  pont körüli  $90^\circ$ -os elforgatás az érintőegyeneseket a sugáregyenesekekbe viszi.

A sugáregyenesekek pedig akkor merőlegesek egymásra, ha a  $C_1MC_2$  szög derékszög. A Pitagorasz-tétel szerint  $C_1MC_2 = 90^\circ$  pontosan akkor teljesül, ha fennáll a  $(C_1C_2)^2 = (r_1)^2 + (r_2)^2$  egyenlőség.  $\square$

**4.5. Definíció.** Két egyazon síkbeli körről azt mondjuk, hogy érintkeznek egymással, ha a két körnek egyetlen közös pontja van. A közös pontot a két kör érintkezési pontjának nevezzük.

**Megjegyzés.** Világos, hogy érintkezés esetén az egyetlen közös pont és körök centrumai egyazon egyenesre esnek.

Ha két kör úgy érintkezik egymással, hogy az egyik tartalmazza a másikat, akkor ezt belülről való érintkezésnek hívjuk. A másik esetben pedig azt mondjuk, hogy a körök kívülről érintkeznek.

Természetesen megadható a kör és azt őt metsző egyenes hajlásszögének fogalma is.

**4.6. Definíció.** Legyen adva a síkban egy  $k$  kör és egy azt metsző  $g$  egyenes. Az egyik metszéspontban vegyük a  $k$  kör  $e$  érintőjét. A  $k$  kör és a  $g$  egyenes hajlásszögén az  $e$ ,  $g$  metsző egyenesek szögét értjük.

### A síkbeli inverzió értelmezése

Rögzítsünk a  $\sigma$  síkban egy  $r$  sugarú  $k$  körvonalat, melynek középpontját ezúttal jelölje  $O$ . Mint ismeretes, ha a síkból elhagyjuk az  $O$  pontot, akkor az így nyert ponthalmazt  $\sigma \setminus \{O\}$  jelöli.

**4.7. Definíció.** A  $k$  körre vonatkozó inverzió az  $\iota : \sigma \setminus \{O\} \rightarrow \sigma \setminus \{O\}$  bijektív leképezést értjük, ahol bármely  $P$  pont  $P' = \iota(P)$  képét az alábbi két feltétel határozza meg:

- (1) A  $P'$  pont rajta van az  $O$  kezdőpontú és  $P$ -n átmenő  $[O, P)$  félegyenesen.
- (2) A  $O$ -tól mért távolságok szorzatára teljesül  $OP \cdot OP' = r^2$ .

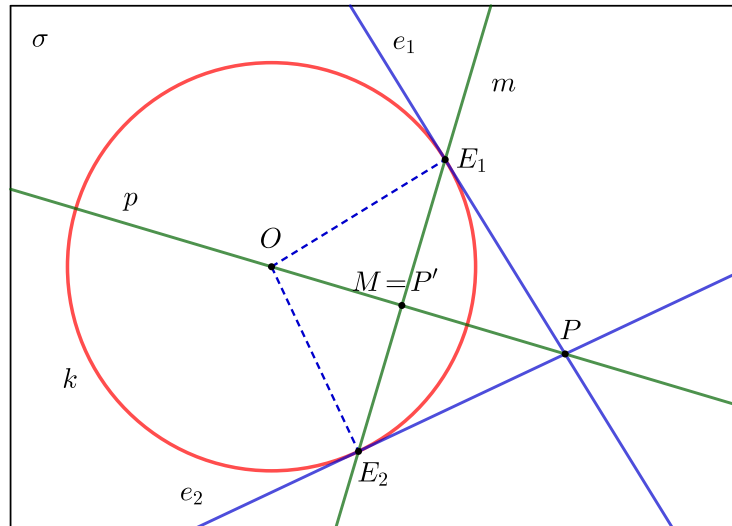
A  $k$  kört az inverzió alapkörének, az  $O$  pontot a  $\iota$  pólusának mondjuk. Az  $r^2$  pozitív számot nevezzük az inverzió hatványának.

**Megjegyzés.** Világos, hogy az inverzió fixen hagyja a  $k$  alapkör pontjait. A  $k$  körvonal a síkot felosztja két tartományra, és az inverzió felcseréli a belső pontok és a külső pontok tartományát.

Vegyük észre azt is, hogy a sík tetszőleges  $P$  ( $P \neq O$ ) pontjára fennáll  $\iota \circ \iota(P) = P$ .

**Megjegyzés.** A hagyományokat követve azt a definíciót mondtuk ki, amelyben a képpontot két feltétel adja meg. Azonban vektorok alkalmazása esetén bármely  $P$  ( $P \neq O$ ) pont  $P' = \iota(P)$  inverz képét az  $\vec{OP'} = \frac{r^2}{OP^2} \vec{OP}$  összefüggés egyedül is meghatározza.

Egy síkbeli  $P$  pont inverz képe könnyen kijelölhető (illetve kiszűrhető) a befogótétel alkalmazásával. Lásd a 22. ábrát.



22. ábra. Egy síkbeli  $P$  pont  $P' = \iota(P)$  inverz képének kiszűrítése.

Tekintsük a  $k$  körvonal egy  $P$  külső pontját, vagyis egy olyan  $P$  pontot, amelyre igaz  $OP > r$ . A  $P$  pontból a  $k$  körhöz húzott érintők érintési pontjai legyenek  $E_1$ ,  $E_2$ . Ezek  $m$  összekötő egyenese metssze el a rá merőleges  $p = \langle O, P \rangle$  egyenest az  $M$  pontban. Alkalmazzuk a befogótételt az  $OE_1P$  derékszögű háromszögre. Ez alapján fennáll  $(OE_1)^2 = OP \cdot OM$ , azaz  $OP \cdot OM = r^2$ . Ennek következtében a  $M$  pont azonos a  $P'$  képponttal.

#### Az egyenesek és körök inverzióval nyert képei

Az alábbiak során azt fogjuk bizonyítani, hogy egy egyenes (illetve egy kör) inverzióval nyert képe vagy egy egyenes vagy pedig egy kör.

**4.8. Tétel.** A  $\sigma$  síkban tekintsük azon  $k$  alapkörre vonatkozó  $\iota$  inverziót, amelynek középpontja az  $O$  pont. Igazak az alábbi kijelentések.

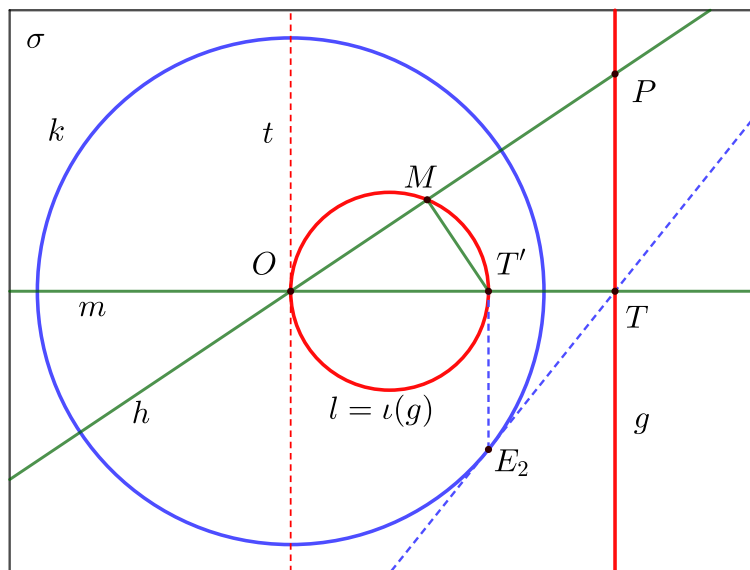
- (1) Az  $O$  póluson áthaladó egyenes képe önmaga.
- (2) Az  $O$  póluson nem áthaladó egyenes inverzióval nyert képe egy olyan kör, amely átmegy az  $O$  centrumon.
- (3) Az  $O$  póluson áthaladó kör képe egy olyan egyenes, amely nem átmegy az  $O$  ponton.

#### Bizonyítás.

- (1) A definícióból következik, hogy a pólusra illeszkedő egyenes képe önmaga.

(2) Legyen adva egy olyan  $g$  egyenes a síkban, amely nem illeszkedik az  $O$  pontra. Az  $O$ -n átmenő és a  $g$ -re merőleges  $m$  egyenes metsze el  $g$ -t a  $T$  pontban. A fentiekben leírt szerkesztéssel jelöljük ki a  $T$  pont  $T' = \iota(T)$  inverz képét. Az  $m$  egyenes ezen pontjával tehát fennáll az  $OT \cdot OT' = r^2$  egyenlőség. Ezt követően vegyük az  $OT$  szakasz  $l$  Thalész-körét, vagyis azt az  $l$  kört, amelynek az  $OT$  szakasz az egyik átmérője.

Be fogjuk látni, hogy ez az  $l$  kör lesz a  $g$  egyenes képe. Tekintsük a  $g$  egyenes egy tetszőleges  $P$  ( $P \neq T$ ) pontját. Ennek az  $O$  pólussal vett  $h$  összekötő egyenese metsze el az  $l$  kört az  $M$  pontban (az  $O$  mellett). Világos, hogy az  $OTP$  és az  $OMT'$  derékszögű háromszögek hasonlóak, mivel az  $O$  csúcsbeli hegyesszögük közös. Emiatt a megfelelő oldalak hányadosaira fennáll az  $\frac{OP}{OT'} = \frac{OT}{OM}$  egyenlőség. Ebből viszont az  $OP \cdot OM = OT \cdot OT' = r^2$  összefüggés következik, tehát a  $P$  pont inverz képe az  $l$  kör  $M$  pontja.



23. ábra. A póluson nem átmenő  $g$  egyenes inverz képe.

A fentiek alapján a  $g$  egyenes bármely pontjának képe rajta van az  $l$  körön. Vegyük észre azt is, hogy az  $l$  kör bármely (az  $O$  pólustól különböző) pontjának az  $O$ -val vett összekötő egyenese elmetszi egy pontban a  $g$  egyenest, és ezen metszéspontnak az inverz képe az  $l$  körön kiválasztott pont lesz. Ezzel beláttuk, hogy a  $g$  egyenes inverz képe az  $l$  kör, pontosabban az  $l \setminus \{O\}$  alakzat.

A (3) kijelentés már könnyen igazolható a fenti eljárás alapján. Vegyünk egy olyan  $l$  kört, amely áthalad az  $O$  póluson. Ennek centrumát az  $O$ -val összekötő  $m$  egyenes két pontban metszi el a  $k$  kört. Jelölje ezúttal  $T$  a másik metszéspontot. Szerkesszük ki ennek  $T'$  képét az  $m$  egyensen. Egyszerűen belátható, hogy a  $T'$  ponton átmenő és az  $m$ -re merőleges  $g$  egyenes lesz az  $l$  kör inverz képe. Ennek részletezését az olvasóra bizzuk.  $\square$

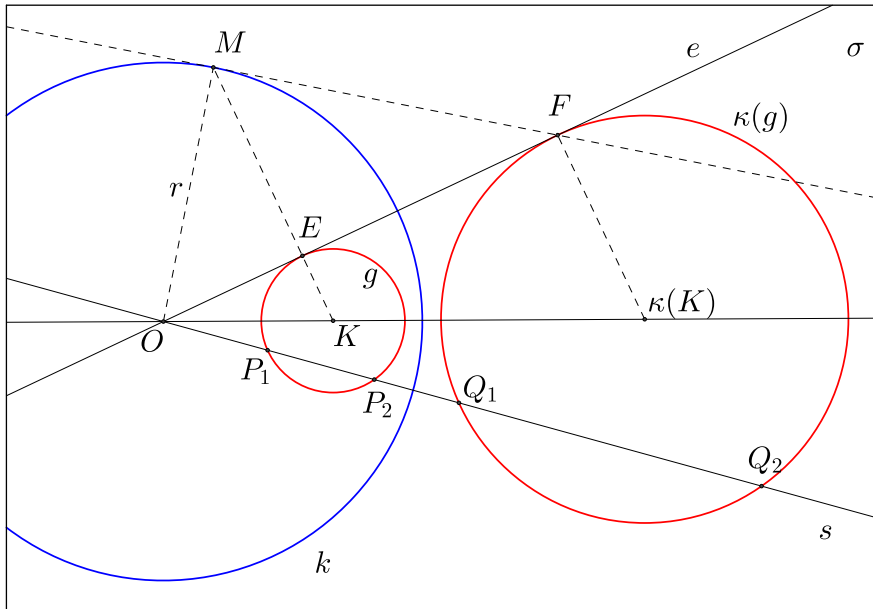
**Megjegyzés.** Az előző bizonyítás során kiderült, hogy a póluson nem átmenő  $g$  egyenes inverz képe az  $l$  kör. Ezt úgy kaptuk meg, hogy kijelöltük az  $O$ -ból a  $g$ -hez húzott merőleges  $T$  talppontjának  $T'$  képét, majd vettük az  $OT'$  szakasz  $l$  Thalész-körét. Ennek következtében az  $l$  körnek az  $O$  pontbeli  $t$  érintője párhuzamos  $g$ -vel.

A póluson nem áthaladó körök inverz képére vonatkozok az alábbi tétel. Ennek bizonyítása során alkalmazni fogjuk a hatvány fogalmát is.

**4.9. Tétel.** *A  $\sigma$  síkban vegyünk azon  $k$  alapkörre vonatkozó  $\iota$  inverziót, amelynek középpontja az  $O$  pont és sugara  $r$ . Legyen  $g$  egy olyan síkbeli kör, amely nem megy át az  $O$  póluson. Ekkor  $g$ -nek a  $\iota(g)$  inverz képe egy olyan a póluson nem átmenő kör, amelyet egy  $O$  centrumú középpontos hasonlósággal nyerünk a  $g$  körből.*

**Bizonyítás.**

Az  $O$  pontnak a  $g$  körre vonatkozó hatványát jelölje  $h(O, g)$ . Tekintsük azt a  $\kappa : \sigma \rightarrow \sigma$  középpontos hasonlóságot a  $\sigma$  síkban, melynek centruma  $O$  és előjeles aránya  $\lambda = \frac{r^2}{h(O, g)}$ .



24. ábra. Az  $O$  póluson nem átmenő  $g$  körnek a  $k$  alapkörre vonatkozó inverz képe  $\kappa(g)$ .

Legyen a  $g$  kör centruma a  $K$  pont, a sugara pedig  $\varrho$ . Az  $O$  ponton áthaladó egyik  $s$  egyenes metssze el a  $g$  kört a  $P_1, P_2$  pontokban. A 4.1. Állítás alapján ezekre fennáll az  $\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = KO^2 - \varrho^2 = h(O, g)$  összefüggés.

A  $P_1, P_2$  pontoknak a  $\kappa$  hasonlósággal nyert képei legyenek  $Q_1 = \kappa(P_1)$  és  $Q_2 = \kappa(P_2)$ . Ezen pontokra tehát teljesül  $\overrightarrow{OQ_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{OP_1}$  és  $\overrightarrow{OQ_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{OP_2}$ . Ily módon az  $\overrightarrow{OP_1}$  és  $\overrightarrow{OQ_2}$  vektorok skaláris szorzatára az

$$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OQ_2} = \lambda (\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}) = \frac{r^2}{h(O, g)} \cdot h(O, g) = r^2$$

összefüggést nyerjük. Mivel az  $O$ ,  $P_1$ ,  $Q_2$  pontok kollineárisak, ez azt mutatja, hogy a  $P_1$  pont inverz képe éppen a  $Q_2$  pont, vagyis fennáll  $\iota(P_1) = \kappa(P_2)$ .

Hasonlóan adódik, hogy igaz az  $\overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OQ_1} = r^2$  egyenlőség is, vagyis fennáll  $\iota(P_2) = Q_1 = \kappa(P_1)$ . Ebből viszont már következik, hogy a  $g$  körnek a  $\iota$  inverzióval nyert  $\iota(g)$  képe megegyezik a  $\kappa(g)$  körrel.  $\square$ .

**Megjegyzés.** A bizonyításhoz rendelt 24. ábrán az az eset szerepel, amikor a  $h(O, g)$  hatvány értéke pozitív, vagyis  $\lambda > 0$ . Az  $O$ -ból a  $g$  körhöz húzott  $e$  érintő  $E$  érintési pontjának  $F = \kappa(E) = \iota(E)$  képe is megszerkesztésre kerül az ábrán.

Világos, hogy amennyiben az  $O$  pólus egy belső pontja a  $g$  körnek a  $\kappa$  középpontos hasonlóság  $\lambda$  előjeles aránya egy negatív szám.

**Megjegyzés.** Egy a póluson nem átmenő kör inverz képét meg lehet szerkeszteni az alábbi módon. *Kijelölünk a körön három pontot, megszerkesztjük ezek inverz képét, majd megszerkesztjük a három képponton áthaladó kört.*

A képkör előállítható a következő eljárással is. *Vesszük a körnek azt az átmérőjét, amelynek egyenese átmegy az  $O$  póluson. Megszerkesztjük az átmérő végpontjainak inverz képét. Végül megszerkesztjük a két képpontot összekötő szakasz Thalész-körét.*

### Az inverzió által fixen hagyott körök és egyenesek

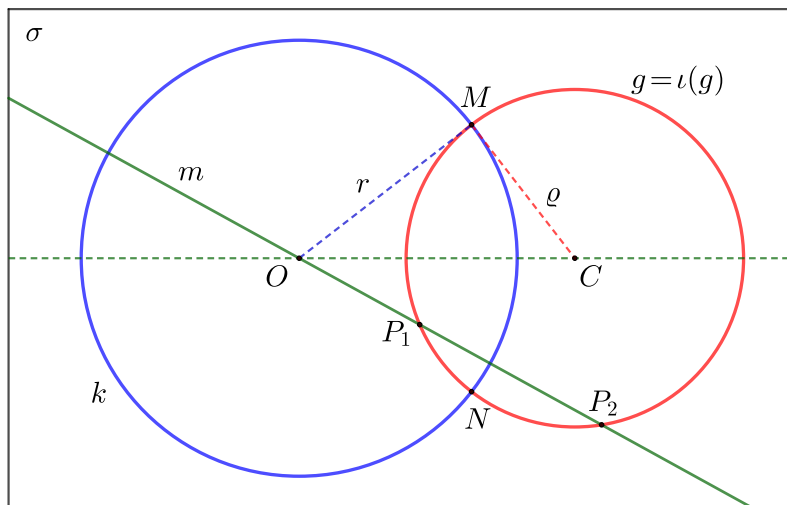
Az alábbiak során kiderül, hogy miért szokás körre tükrözésnek nevezni a síkbeli inverziót. Ugyanis, az eddigi eredmények alapján már igazolni lehet a következő állítást.

**4.10. Állítás.** *A  $\sigma$  síkban tekintsünk egy  $\iota$  inverziót, melynek alapköre  $k$ . Legyen  $g$  egy síkbeli kör vagy egyenes. A  $g$  alakzat inverzióval nyert képe önmaga akkor és csak akkor, ha  $g$  derékszögben metszi el a  $k$  kört.*

#### Bizonyítás.

A  $k$  alapkör centrumát jelölje  $O$  a sugarát pedig  $r$ . Világos, hogy egy  $g$  egyenes pontosan akkor metszi derékszögben a  $k$  kört, ha átmegy az  $O$  póluson. Ez pedig egyenértékű azzal, hogy fennáll  $\iota(g) = g$ .

Vegyünk egy olyan  $g$  kört, amely az  $M, N$  pontokban metszi el a  $k$ -t. Legyen a  $g$  kör centruma  $C$  és a sugara  $\varrho$ . Tegyük fel, hogy a  $g, k$  körök hajlásszöge derékszög. A 4.4. Állítás szerint ekkor fennáll a  $CO^2 = r^2 + \varrho^2$  egyenlőség. Emiatt az  $O$  pólusnak a  $g$  körre vonatkozó hatványára teljesül  $h(O, g) = CO^2 - \varrho^2 = r^2$ . Tekintsünk egy olyan  $m$  egyenest, amely áthalad  $O$ -n és elmettszi  $g$ -t a  $P_1, P_2$  pontokban. A 4.1. Állítás következtében ezekre fennáll az  $\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = CO^2 - \varrho^2 = r^2$  összefüggés. Ez pedig azt igazolja, hogy a  $\iota$  inverzió egymásba képezi a  $P_1, P_2$  pontokat, vagyis teljesül  $\iota(P_1) = P_2$  és  $\iota(P_2) = P_1$ . Tehát bármely az  $O$  póluson átmenő szelőegyenest is vesszük a  $g$  körnek, az inverzió felcseréli a két metszéspontot. Ebből már következik, hogy fennáll  $\iota(g) = g$ .



25. ábra. Az inverzió  $k$  alapkörét merőlegesen metsző  $g$  kör képe önmaga.

Térjünk most rá a fordított irány igazolására. Legyen  $g$  egy olyan kör a síkban, amelynek a  $\iota$  szerinti képe önmaga. Világos, hogy ekkor  $g$  nem lehet sem a  $k$  körön belül, sem pedig a  $k$  körön kívül, vagyis  $g$  elmettszi a  $k$  kört. Legyen  $m$  egy  $O$ -n átmenő egyenes, amely a  $P_1, P_2$  pontokban metszi  $g$ -t. Mivel  $\iota$  egymásba képezi a két metszéspontot, az  $O$  pólusnak a  $g$ -re vonatkozó hatványára teljesül  $h(O, g) = \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = r^2$ , vagyis

$CO^2 - \rho^2 = r^2$ . Újból alkalmazva a 4.4. Állítást, azt kapjuk, hogy a  $g$ ,  $k$  metsző körök hajlásszöge derékszög.  $\square$

Az előbbi eredmény bizonyítása a 4.1. és 4.4. Állításokon alapult. Ezek alapján könnyen belátható, hogy igaz az alábbi kijelentés is.

**4.11. Következmény.** *A  $\sigma$  síkban tekintsünk egy  $\iota$  inverziót, melynek alapköre  $k$ . Vegyünk a síkban egy olyan  $P$  pontot, amely nincs rajta  $k$ -n, és annak a  $P' = \iota(P)$  képét. Ekkor bármely a  $P$ ,  $P'$  pontokon átmenő kör derékszögben metszi a  $k$  alapkört.*

#### Az inverzió szögtartó tulajdonsága

Beláttuk, hogy egy egyenes inverzióval nyert képe vagy egy egyenes, vagy pedig egy kör. Ily módon felvetődik a kérdés, hogy két metsző egyenes esetében van-e kapcsolat azok hajlásszöge és az inverz képek hajlásszöge között. Erre ad választ az alábbi kijelentés.

**4.12. Állítás.** *A  $\sigma$  síkban tekintsünk egy  $\iota$  inverziót, melynek alapköre  $k$  és pólusa  $O$ . Legyenek  $e_1$  és  $e_2$  olyan síkbeli egyenesek, amelyek metszik egymást egy  $P$  ( $P \neq O$ ) pontban. Ekkor az egymást metsző  $e'_1 = \iota(e_1)$ ,  $e'_2 = \iota(e_2)$  képalakzatok hajlásszöge megegyezik az  $e_1$ ,  $e_2$  egyenesek szögével.*

#### Bizonyítás.

Azt az általános esetet tárgyaljuk, amikor az  $e_1$ ,  $e_2$  egyenesek egyike sem megy át az  $O$  ponton. Alkalmazzuk a 4.8. Tétel (2) pontjának bizonyításánál leírt eljárást. Eszerint az  $e_1$ ,  $e_2$  egyenesek inverz képeit úgy kaphatjuk meg, hogy vesszük az  $O$ -ból az egyenesekhez húzott merőlegesek  $T_1$ ,  $T_2$  talppontjainak a  $T'_1$ ,  $T'_2$  inverz képét, majd pedig az  $OT'_1$ ,  $OT'_2$  szakaszok Thalész-körét. Lásd a 26. ábrát. Az  $e'_1$ ,  $e'_2$  képkörök az  $O$ ,  $P'$  pontokban metszik egymást. Mivel az  $OT'_1$ ,  $OT'_2$  körátmérők merőlegesek az  $e_1$ ,  $e_2$  egyenesekre, az  $O$  pontbeli  $t_1$ ,  $t_2$  érintőik párhuzamosak az  $e_1$ ,  $e_2$  egyenesekkel. Ebből viszont már következik, hogy az  $e'_1$ ,  $e'_2$  képkörök hajlásszöge egyenlő az  $e_1$ ,  $e_2$  egyenesek szögével.

A fenti eljárást követve abban az esetben is igazolható a hajlásszög megtartása, amikor a két egyenes egyike áthalad a póluson.  $\square$

Az alábbi állítás azt mondja ki, hogy az inverzió megőrzi a körök és az egyenesek érintkezését is.

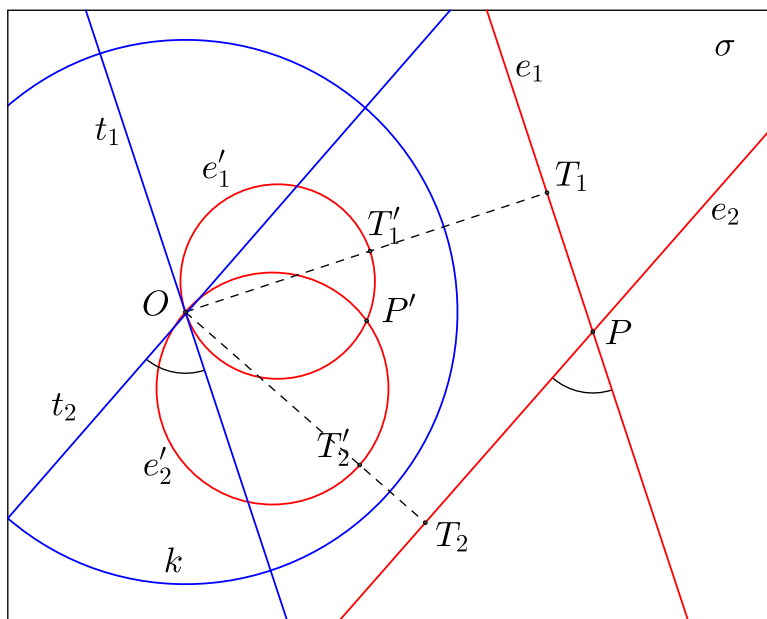
**4.13. Állítás.** *A  $\sigma$  síkban legyen adott vagy egy egyenes és egy azt érintő kör, vagy pedig két egymást érintő kör. Ha ezek  $P$  érintési pontja különbözik a  $\iota$  inverzió  $O$  pólusától, akkor a képalakzatok is érintik egymást a  $P' = \iota(P)$  pontban.*

#### Bizonyítás.

Az érintkező alakzatot jelölje  $g$  és  $e$ . Mivel ezek  $P$  érintési pontja nem esik egybe az  $O$  pólussal,  $g' = \iota(g)$  és  $e' = \iota(e)$  közül legalább az egyik kör. A  $\iota$  inverzió egy bijektív leképezés, emiatt a  $g'$ ,  $e'$  képalakzatoknak egyetlen közös pontja van, nevezetesen a  $P' = \iota(P)$  pont. Ez pedig azt jelenti, hogy  $g'$  és  $e'$  érintik egymást a  $P'$  pontban.  $\square$

Az előző két állítás alapján lehet igazolni a következő tételt, amely kimondja az inverzió szögtartását.

**4.14. Tétel.** *Legyen  $\iota$  egy inverzió a  $\sigma$  síkban. Vegyünk a síkban vagy két metsző kört, vagy két metsző egyenest, vagy pedig egy kört és egy azt metsző egyenest, melyeket jelöljön  $g_1$  és  $g_2$ . Ekkor a  $g'_1 = \iota(g_1)$ ,  $g'_2 = \iota(g_2)$  képalakzatok hajlásszöge megegyezik  $g_1$*



26. ábra. Az  $e_1$ ,  $e_2$  egyenesek és az  $e'_1 = \iota(e_1)$ ,  $e'_2 = \iota(e_2)$  körök hajlásszöge egyenlő.

és  $g_2$  hajlásszögével.

**Bizonyítás.**

Azt az esetet tárgyaljuk, amikor  $g_1$  és  $g_2$  olyan egymást metsző körök, amelyek egyike sem megy át a  $\iota$  inverzió  $O$  pólusán. Korábban már beláttuk, hogy ekkor a  $g'_1 = \iota(g_1)$ ,  $g'_2 = \iota(g_2)$  képalakzatok is körök. Legyen  $g_1$  és  $g_2$  egyik metszéspontja  $P$ . Vegyük a  $P$  pontban a körök  $e_1$ ,  $e_2$  érintőegyeneseit. Ezek  $e'_1 = \iota(e_1)$ ,  $e'_2 = \iota(e_2)$  inverz képei a  $P'$  pontban érintik a  $g'_1$ ,  $g'_2$  köröket. Ennek következtében az  $e'_1$ ,  $e'_2$  alakzatok szöge egyenlő a  $g'_1$ ,  $g'_2$  körök hajlásszögével. Mivel a 4.12. Állítás kimondja, hogy az  $e_1$ ,  $e_2$  egyenesek szöge megegyezik az  $e'_1$ ,  $e'_2$  képalakzatok szögével, azt nyerjük, hogy ez teljesül a  $g_1$ ,  $g_2$  körök és azok  $g'_1$ ,  $g'_2$  inverz képei esetében is.

Összegezve a fentiekben leírtakat, az alábbi egyenlőségek teljesülnek a metsző körök és egyenesek hajlásszögeire:

$$(g_1, g_2) \sphericalangle = (e_1, e_2) \sphericalangle = (e'_1, e'_2) \sphericalangle = (g'_1, g'_2) \sphericalangle.$$

A többi esetben hasonlóan történik a tételben szereplő kijelentés igazolása a 4.12. és 4.13. Állítások felhasználásával.  $\square$



### A síkbeli inverzió analitikus leírása

A  $\sigma$  síkban legyen adva egy  $k$  kör, amelynek centruma  $O$  és sugara  $r$ . Tekintsük a  $k$  alapkörre vonatkozó  $\iota : \sigma \setminus \{O\} \rightarrow \sigma \setminus \{O\}$  inverziót. Válasszunk ki a síkban egy  $P$  ( $P \neq O$ ) pontot. A 4.7. Definíció szerint a  $P' = \iota(P)$  képpont rajta van az  $[O, P)$  félegyenesen és az  $O$ -tól mért távolságára fennáll  $OP' = \frac{r^2}{OP}$ . Tehát az  $\overrightarrow{OP'}$  helyvektor megegyező irányú az  $\frac{1}{OP} \overrightarrow{OP}$  egységvektorral és hossza  $\frac{r^2}{OP}$ . Ennek következtében pedig fennáll

$$\overrightarrow{OP'} = \frac{r^2}{OP} \cdot \frac{1}{OP} \overrightarrow{OP} = \frac{r^2}{OP^2} \overrightarrow{OP}.$$

A  $\sigma$  síkban rögzítsünk egy  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$  Descartes-féle koordináta-rendszert, melynek  $O$  kezdőpontja megegyezik a  $\iota$  inverzió pólusával.

Legyenek a kiválasztott  $P$  pont koordinátái  $(x, y)$ , vagyis a helyvektora legyen  $\overrightarrow{OP} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$ . A fenti összefüggés szerint

$$\overrightarrow{OP'} = \frac{r^2}{OP^2} \overrightarrow{OP} = \frac{r^2}{x^2 + y^2} \cdot (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}.$$

teljesül. Ebből már következik, hogy igaz az alábbi kijelentés.

**4.15. Állítás.** *Az  $O$  centrumú és  $r$  sugarú  $k$  körre vonatkozó  $\iota$  inverzió a koordinátázott sík tetszőleges  $P(x, y)$  pontját azon  $P'$  pontba képezi, amelynek koordinátái*

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2} \quad \text{és} \quad y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Tekintsünk egy kétváltozós  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvényt és egy  $c \in \mathbb{R}$  számot. Mint ismeretes, az  $f(x, y) = c$  egyenlettel leírt  $g$  alakzat a sík azon pontjainak halmaza, amelyek koordinátái kielégítik az egyenletet. Meg tudjuk adni a  $\iota(g)$  képalakzat egyenletét is, mivel a 4.15. Állítás alapján igazolni lehet az alábbi kijelentést.

**4.16. Állítás.** *Tekintsük a síkban az  $O$  centrumú és  $r$  sugarú körre vonatkozó  $\iota$  inverziót, továbbá az  $f(x, y) = c$  egyenlettel megadott  $g$  alakzatot. Ekkor az*

$$f\left(\frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}\right) = c \quad \text{egyenlet a } \iota(g) \text{ képalakzatot írja le.}$$

**Bizonyítás.**

Világos, hogy egy  $P(x, y)$  pont akkor eleme a  $g' = \iota(g)$  képalakzatnak, ha az ősképe, vagyis a  $\iota^{-1}(P)$  pont rajta van a kiindulási  $g$  alakzaton. Csakhogy a  $\iota$  inverzió inverz leképezése önmaga, vagyis fennáll  $\iota^{-1}(P) = \iota(P) = P'$ . Ezek alapján a  $P$  pontot akkor tartalmazza a  $g'$  alakzat, ha a  $P'$  pont rajta van a  $g$  alakzaton. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha  $P'$ -nek az  $x', y'$  koordinátái kielégítik a  $g$ -t leíró egyenletet. Ily módon azt kapjuk, hogy az  $f\left(\frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}\right) = c$  egyenlettel leírt alakzat valóban  $\iota(g)$ .  $\square$

### Egy korábbi tétel analitikus igazolása

Korábban szintetikus módon igazoltuk az inverzióra vonatkozó állításokat, vagyis nem használtunk koordináta-rendszert. A fentiek alapján meg tudjuk határozni az egyenletével megadott  $g$  síkbeli alakzat  $g' = \iota(g)$  képének az egyenletét. Ily módon az állítások egy részét analitikus módon, koordináták alkalmazásával is bizonyítani lehet.

Példaként igazoljuk a 4.8. Tétel (2) kijelentését. Vegyünk a síkban egy az  $O$  póluson nem átmenő  $g$  egyenest, amelynek egyenlete  $ax + by + c = 0$ . Világos, hogy  $c \neq 0$ , hiszen az  $O$  nincs rajta  $g$ -n. Egyébként látható az is, hogy  $g$ -nek egy normálvektora  $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ , továbbá az  $O$ -ból  $g$ -hez húzott merőleges szakasz  $T$  talppontjának helyvektorára fennáll  $\overrightarrow{OT} = -\frac{c}{a^2 + b^2}(a\mathbf{i} + b\mathbf{j})$ .

A 4.16. Állítás szerint a  $\iota$  inverzióval nyert  $g' = \iota(g)$  képalakzatot írja le az

$$a \frac{r^2 x}{x^2 + y^2} + b \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} + c = 0$$

egyenlet. Szorozzuk ezt meg a 0-tól különböző  $\frac{x^2 + y^2}{c}$  kifejezéssel. Ezáltal az

$$x^2 + y^2 + \frac{ar^2}{c}x + \frac{br^2}{c}y = 0$$

egyenlethez jutunk. Világos, hogy az általa leírt alakzat egy olyan kör, amely áthalad az  $O$  póluson. Ezen kör sugarát és  $Q$  centrumának koordinátáit az

$$\left(x + \frac{ar^2}{2c}\right)^2 + \left(y + \frac{br^2}{2c}\right)^2 - \frac{r^4}{4c^2}(a^2 + b^2) = 0$$

egyenletből lehet kiolvasni. Közvetlen számolással adódik, hogy a  $\iota(g)$  kör  $Q$  centruma megegyezik az  $OT'$  szakasz felezőpontjával, ami összhangban van a korábbi szintetikus bizonyítás eredményével.

### A síkbeli inverzió alkalmazásai

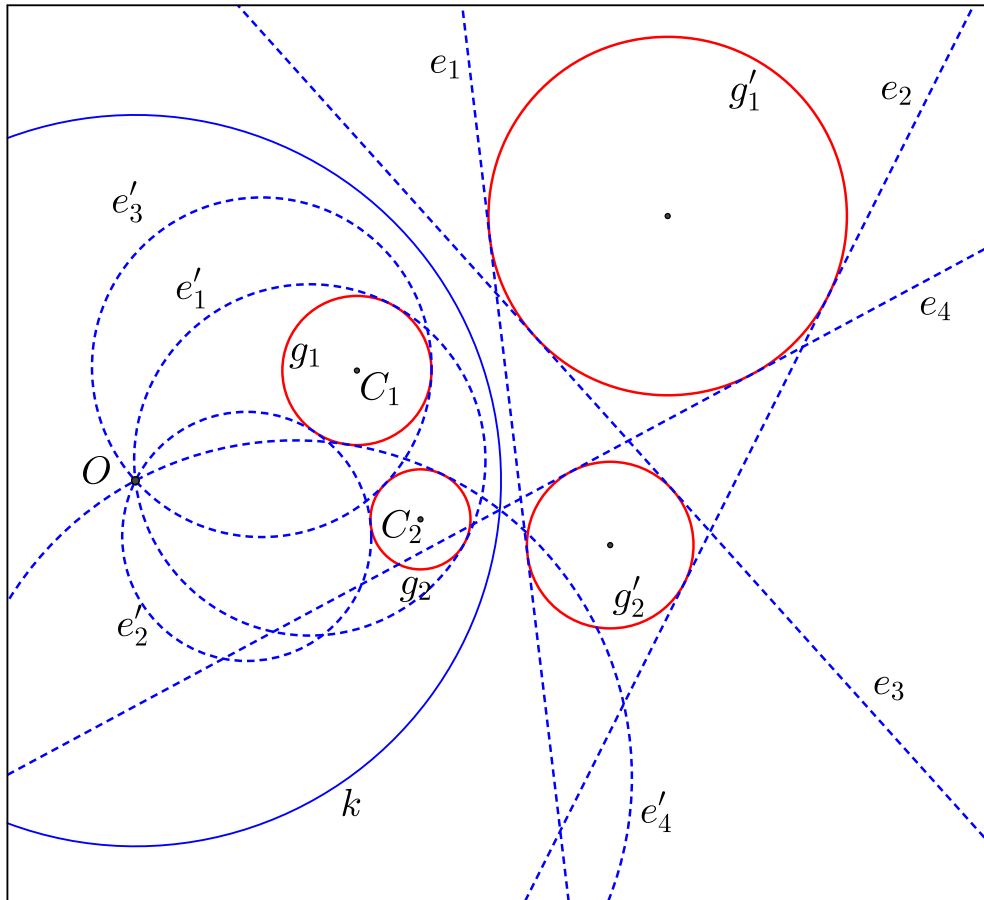
Az inverzióról már tudjuk, hogy egyenest és kört vagy egyenesbe vagy körbe képez, megőrzi azok érintkezését és hajlásszögét. Ezen kedvező tulajdonságok miatt az inverziót jól lehet alkalmazni euklideszi szerkesztési feladatok megoldására is.

Meg kell még említenünk azt is, hogy a hipebolikus síkgeometria úgynevezett Poincaré-modelljeiben is fontos szerephez jutnak az inverziók. Azonban a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria alapjainak tárgyalására csak a későbbi tanulmányok során kerül majd sor.

Mint ismeretes, az euklideszi szerkesztés során az 5 szerkesztési lépés véges számú, egymás utáni végrehajtásával kell megoldani a kitűzött feladatot. Az alábbi példa jól mutatja az inverzió alkalmazhatóságát.

#### *Egy Apollóniosz-féle szerkesztési feladat megoldása inverzióval*

A  $\sigma$  síkban adva van egy  $O$  pont, továbbá a  $g_1$  és  $g_2$  körök a  $C_1$ ,  $C_2$  középpontokkal. A  $g_1$ ,  $g_2$  körök nem mennek át az  $O$  ponton, nem metszik egymást, továbbá egyik kör sem tartalmazza a másikat és az  $O$  pontot. *A feladat az, hogy szerkesszük meg azon köröket, amelyek áthaladnak az  $O$  ponton és érintik a  $g_1$ ,  $g_2$  köröket.*



27. ábra. A  $g_1$ ,  $g_2$  köröket érintő és az  $O$  ponton áthaladó körök szerkesztése inverzióval.

A kitűzött szerkesztési feladat egyszerűbben megoldható az inverzió alkalmazásával, mivel a 4.13. Állítás szerint az inverzió megőrzi a körök és az egyenesek érintkezését. Az alábbiak során vázlatosan leírjuk az eredményre vezető szerkesztési eljárást.

Tekintsünk egy  $O$  centrumú  $k$  kört és az erre vonatkozó  $\iota : \sigma \rightarrow \sigma$  síkbeli inverziót.

Először szerkesszük meg a  $g_1$ ,  $g_2$  körök  $g'_1 = \iota(g_1)$ ,  $g'_2 = \iota(g_2)$  inverz képeit, melyek szintén körök.

Ezt követően szerkesszük meg a  $g'_1$ ,  $g'_2$  körök közös érintőegyeneseit, amelyek a fenti ábrán az  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  és  $e_4$  egyenesek.

Végül szerkesszük meg ezen érintőegyenesek inverz képeit. Világos, hogy az érintők inverz képei olyan körök, amelyek áthaladnak az inverzió  $O$  pólusán és érintik a  $g_1$ ,  $g_2$  köröket. Tehát a szerkesztési feladat megoldásai az  $e'_1$ ,  $e'_2$ ,  $e'_3$  és  $e'_4$  körök.

## 5) Korlátos alakzatok térfogata

Ebben a fejezetben előbb a poliéderek, majd a korlátos alakzatok térfogatát fogjuk tárgyalni. A térfogattal kapcsolatos vizsgálataink menete, az alapvető definíciók és a bizonyítási módszerek nagyrészt megfelelnek a terület esetében alkalmazott eljárásnak.

### Térbeli topológiai alapfogalmak

Mielőtt a poliéderek térfogatát értelmeznénk bevezetünk néhány térbeli topológiai fogalmat. A tér pontjainak halmazát továbbra is  $X$  jelöli. Valamely  $P, Q$  pontok távolságára egyaránt használjuk a  $d(P, Q)$  és a  $PQ$  jelölést.

Legyen adott egy  $O$  pontot és egy  $r$  pozitív valós szám. Mint ismeretes, az  $O$  középponttal és  $r$  sugárral meghatározott gömbfelületen a  $\mathcal{G}(O, r) = \{ P \in X \mid OP = r \}$  alakzatot értjük. A következőkben fontos lesz majd számunkra a gömbtest (vagy más szóval a golyó) fogalma is.

**5.1. Definíció.** A  $\mathcal{B}(O, r) = \{ P \in X \mid OP \leq r \}$  alakzatot az  $O$  centrummal és  $r$  sugárral vett zárt gömbtestnek mondjuk.

Az  $O$  középponttal és  $r$  sugárral meghatározott nyílt gömbtesten az  $\mathcal{N}(O, r) = \{ P \in X \mid d(O, P) < r \}$  ponthalmazt értjük.

A belső pont és a határpont értelmezéséhez a nyílt gömbtesteket alkalmazzuk.

**5.2. Definíció.** Legyen adott egy  $\mathcal{A}$  alakzat a térben. Egy  $P$  pontot az  $\mathcal{A}$  ponthalmaz térbeli belső pontjának nevezünk, ha van olyan  $r > 0$  szám, hogy fennáll  $\mathcal{N}(P, r) \subset \mathcal{A}$ .

Egy  $Q$  pontot az  $\mathcal{A}$  alakzat határpontjának mondunk, ha tetszőleges  $r > 0$  szám esetén teljesül  $\mathcal{N}(Q, r) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$  és  $\mathcal{N}(Q, r) \cap (X \setminus \mathcal{A}) \neq \emptyset$ .

**Megjegyzés.** A továbbiakban egy  $\mathcal{A}$  alakzat térbeli belső pontjainak halmazát  $\text{Int}(\mathcal{A})$ , határpontjainak halmazát pedig  $\text{Bd}(\mathcal{A})$  fogja jelölni.

**5.3. Definíció.** Az  $\mathcal{A}$  alakzatot nyíltnak mondjuk, ha az összes pontja belső pont, vagyis ha fennáll  $\text{Int}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ .

Az  $\mathcal{A}$  alakzatot zártnak nevezzük, amennyiben az  $X \setminus \mathcal{A}$  ponthalmaz nyílt.

**Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy a  $\mathcal{B}(O, r)$  zárt gömbtesttel kapcsolatban fennállnak az  $\text{Int}(\mathcal{B}(O, r)) = \mathcal{N}(O, r)$  és  $\text{Bd}(\mathcal{B}(O, r)) = \mathcal{G}(O, r)$  összefüggések.

Nem nehéz igazolni, hogy egy  $\mathcal{A}$  térbeli alakzat zárt pontosan akkor, ha tartalmazza az összes határpontját, vagyis ha fennáll a  $\text{Bd}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$  összefüggés.

Idézzük fel a konvex poliéder fogalmát, melyet a korábbi tanulmányok során egyszer már bevezettünk.

**5.4. Definíció.** Konvex poliéderen egy olyan  $\Omega$  alakzatot értünk, amelynek van belső pontja, korlátos és előáll véges sok féltér metszeteként.

**Megjegyzés.** A fenti definíciónak megfelelően egy  $\Omega$  konvex poliéder megegyezik véges sok zárt féltér metszetével. A továbbiakban csak azon  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_l$  féltéreket vesszük az  $\Omega = \bigcap_{i=1}^l \mathcal{F}_i$  előállításban, amelyek nem hagyhatóak el, mivel elhagyásuk esetén az  $\Omega$  poliédernél egy bővebb alakzatot kapnánk.

Legyen  $\sigma_i$  az  $\mathcal{F}_i$  féltér határoló sík. Mint ismeretes, az  $\mathcal{S}_i = \sigma_i \cap \Omega$  metszet egy konvex sokszög, melyet az  $\Omega$  konvex poliéder egyik lapjának mondunk.

Igazolható, hogy egy  $\Omega = \cap_{i=1}^l \mathcal{F}_i$  poliéder határpontjainak halmaza megegyezik lapja-  
inak az uniójával, vagyis fennáll  $Bd(\Omega) = \cup_{i=1}^l \mathcal{S}_i$ .

**Megjegyzés.** A poliéderek között a tetraéder tölti be azt a szerepet, amit a sokszögek  
között a háromszög. Mint ismeretes, a tetraéder négy féltér metszeteként áll elő.

## A poliéderek térfogatának értelmezése

**5.5. Definíció.** Egy alakzatot általános poliédernek mondunk, ha előáll véges sok konvex  
poliéder uniójaként.

**Megjegyzés.** Világos, hogy az általános poliéder egy korlátos alakzat. Ha pedig adva van  
két általános poliéder  $\Omega_1$  és  $\Omega_2$ , akkor azok  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  uniója szintén egy általános poliéder.

**Megjegyzés.** Mivel egy konvex poliéder mindig felbontható véges sok tetraéderre, az  
általános poliéder létrejön véges sok tetraéder uniójaként is.

## A poliéderek térfogatfüggvényére vonatkozó feltételek

Legyen  $\mathcal{H}$  az összes általános poliéder halmaza. Olyan  $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  valós függvényt  
keresünk, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek.

- (1) Tetszőleges  $\Omega$  általános poliéder esetén fennáll  $V(\Omega) > 0$ .
- (2) Ha az  $\Omega$  és  $\tilde{\Omega}$  poliéderek egymással egybevágóak, akkor  $V(\Omega) = V(\tilde{\Omega})$ .
- (3) Ha  $\Omega_1$  és  $\Omega_2$  olyan poliéderek, melyeknek nincs közös belső pontjuk, akkor uniójukra  
fennáll a  $V(\Omega_1 \cup \Omega_2) = V(\Omega_1) + V(\Omega_2)$  összefüggés.
- (4) Amennyiben a  $\mathcal{K}$  poliéder egy 1 élhosszúságú kocka, akkor  $V(\mathcal{K}) = 1$ .

Igazolható az alábbi tétel, amely megfelel a várakozásoknak. A teljes bizonyítás azon-  
ban hosszadalmas.

**5.6. Tétel.** *Egyértelműen létezik egy olyan  $V$  valós függvény a poliéderek  $\mathcal{H}$  halmazán,  
amelyre teljesülnek a fenti (1)–(4) feltételek.*

**Megjegyzés.** A tétel teljes bizonyítása bizonyítása megtalálható a Hajós György által írt  
*Bevezetés a geometriába* c. tankönyv 27. fejezetében.

**5.7. Definíció.** Tetszőleges  $\Omega$  poliéder térfogatán a  $V(\Omega)$  függvényértéket értjük.

**Megjegyzés.** Bármely poliéder előáll véges sok olyan tetraéder uniójaként, melyeknek  
páronként nincs közös belső pontjuk.

Könnyen belátható, hogy amennyiben egy  $\Omega_1$  poliédert tartalmaz egy másik  $\Omega_2$  poli-  
éder, akkor térfogatukra fennáll  $V(\Omega_1) \leq V(\Omega_2)$ .

## A téglatest és a paralelepipedon térfogata

Először a téglatest térfogatára vonatkozó formulát vezetjük le a  $V$  függvényre megadott  
(1)–(4) feltételekből. Mint ismeretes, a téglatest egyik csúcsából kiinduló három élnek a  
hossza egybevágóság erejéig már meghatározza a téglatestet.

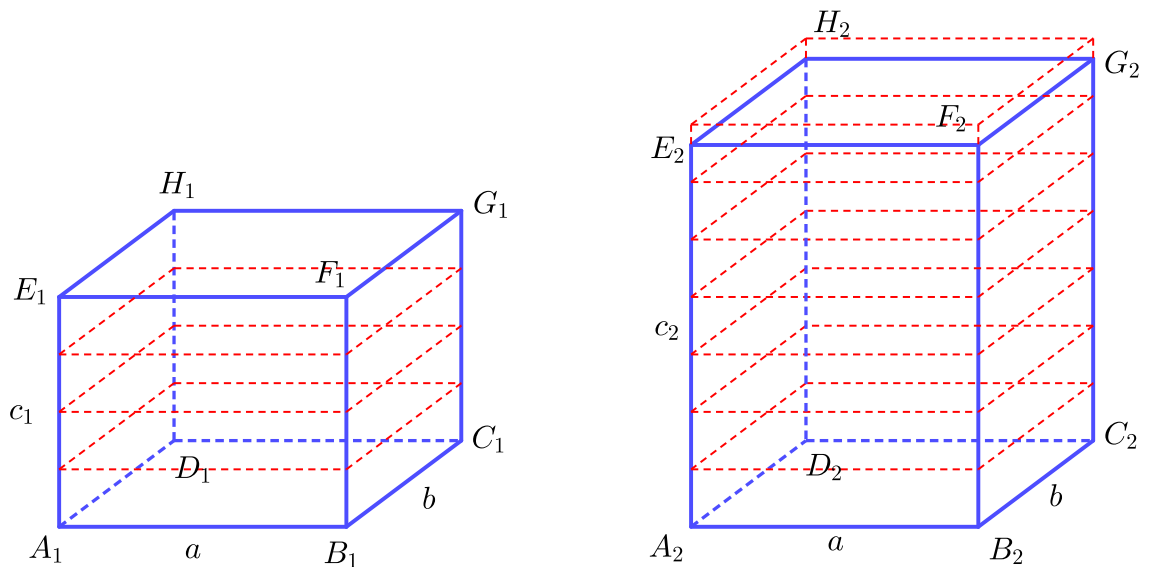
**5.8. Állítás.** *Legyenek  $\mathcal{T}_1$  és  $\mathcal{T}_2$  olyan téglatestek, melyeknek két élhosszuk  $a$  és  $b$  egyenlő.  
Ha ezen téglatesteknél a harmadik élhossz  $c_1$  és  $c_2$ , akkor térfogatukra fennáll a*  
$$V(\mathcal{T}_2) = \frac{c_2}{c_1} \cdot V(\mathcal{T}_1)$$
*összefüggés.*

**Bizonyítás.**

Vegyük a két téglatest egy-egy csúcsát, melyeket jelöljön  $A_1$  és  $A_2$ . A belőlük kiinduló élek legyenek  $A_iB_i$ ,  $A_iD_i$  és  $A_iE_i$  ( $i = 1, 2$ ). A kiindulási feltevésünk szerint ezekre fennállnak az  $a = A_1B_1 = A_2B_2$  és  $b = A_1D_1 = A_2D_2$  egyenlőségek. Emiatt az  $A_1B_1C_1D_1$  és  $A_2B_2C_2D_2$  lapok egybevágók.

Legyen  $n$  ( $n \geq 2$ ) egy rögzített pozitív egész szám. Az első téglatest  $c_1$  hosszúságú  $A_1E_1$  élét osszuk fel  $n$  egyenlő részre. Tekintsük az osztáspontokon áthaladó azon síkokat, amelyek párhuzamosak az  $A_1B_1C_1D_1$  lap síkjával. Ezekkel a szeletelősíkokkal a  $\mathcal{T}_1$  téglát felosztjuk  $n$  számú olyan kisebb téglatestre, amelyek élhosszai  $a$ ,  $b$  és  $c_1/n$ . A  $V$  térfogatfüggvényre kiszabott (2) és (3) feltételek alapján látható, hogy ezen téglatestek térfogata  $\frac{1}{n} \cdot V(\mathcal{T}_1)$ .

Legyen  $k$  az a nemnegatív egész szám, amellyel fennáll a  $k \cdot \frac{c_1}{n} \leq c_2 < (k+1) \cdot \frac{c_1}{n}$  összefüggés. Ha ezt megszorozzuk az  $\frac{1}{c_1}$  pozitív számmal azt kapjuk, hogy a két élhossz hányadosára igaz  $\frac{k}{n} \leq \frac{c_2}{c_1} < \frac{k+1}{n}$ .



28. ábra. Téglatestek felosztása egybevágó kisebb téglákra ( $n = 4$  és  $k = 6$  eset).

A fentiek szerint a  $c_1/n$  hossz  $k$ -szor lehet felmérni a  $\mathcal{T}_2$  téglatest  $c_2$  hosszúságú  $A_2E_2$  élére. A felmérésekkel jelöljük ki osztáspontokat az  $A_2E_2$  élen. Hosszabbítsuk meg az  $A_2E_2$  szakaszt és jelöljük ki rajta a  $(k+1)$ -edik osztáspontot is. Vegyük az osztáspontokon áthaladó azon síkokat, amelyek párhuzamosak az  $A_2B_2C_2D_2$  lap síkjával. Ezeket alkalmazva olyan téglatesteket nyerünk a  $\mathcal{T}_2$  téglából, amelyek élhosszai rendre  $a$ ,  $b$  és  $c_1/n$ . Világos, hogy bármely két ilyen téglatest egymással egybevágó, és emiatt ezek térfogata

$\frac{V(\mathcal{T}_1)}{n}$ . A mellékelt ábrának megfelelően  $k$  darab  $c_1/n$  magasságú téglá uniójaként adódik egy olyan téglatest, amelyet  $\mathcal{T}_2$  tartalmaz. Ugyanakkor,  $k+1$  darab ilyen téglá uniójaként már egy olyan téglatestet nyerünk, amely a  $\mathcal{T}_2$ -t tartalmazza. Mivel ezen téglák térfogata  $\frac{k}{n} \cdot V(\mathcal{T}_1)$  és  $\frac{k+1}{n} \cdot V(\mathcal{T}_1)$ , a  $\mathcal{T}_2$  téglatest térfogatára teljesül a

$$\frac{k}{n} \cdot V(\mathcal{T}_1) \leq V(\mathcal{T}_2) < \frac{k+1}{n} \cdot V(\mathcal{T}_1)$$

egyenlőtlenség. Szorozzuk ezt meg az  $\frac{1}{V(\mathcal{T}_1)}$  pozitív számmal. Ekkor azt kapjuk, hogy fennáll

$$\frac{k}{n} \leq \frac{V(\mathcal{T}_2)}{V(\mathcal{T}_1)} < \frac{k+1}{n}.$$

A fenti összefüggések szerint a  $\frac{c_2}{c_1}$  és  $\frac{V(\mathcal{T}_2)}{V(\mathcal{T}_1)}$  hányadosok egyaránt a  $\frac{k}{n}$ ,  $\frac{k+1}{n}$  racionális számok közé esnek. Ily módon a különbségük abszolút értékére igaz

$$\left| \frac{V(\mathcal{T}_2)}{V(\mathcal{T}_1)} - \frac{c_2}{c_1} \right| < \frac{1}{n}.$$

Mivel ez az egyenlőtlenség tetszőleges  $n$  pozitív egész számra fennáll, a két hányados különbsége csakis 0 lehet, azaz teljesül  $\frac{V(\mathcal{T}_2)}{V(\mathcal{T}_1)} = \frac{c_2}{c_1}$ . Ebből viszont már következik az állításban szereplő összefüggés.  $\square$

**5.9. Tétel.** *Ha a  $\mathcal{T}$  téglatest egy csúcsból kiinduló éleinek hosszai  $a$ ,  $b$  és  $c$ , akkor a térfogatára fennáll  $V(\mathcal{T}) = a \cdot b \cdot c$ .*

**Bizonyítás.**

Vegyünk egy  $\mathcal{K}$  kockát az 1 élhosszal, egy olyan  $\mathcal{N}$  négyzetes oszlopot, amelynek élhosszai 1, 1 és  $a$ , továbbá egy olyan  $\overline{\mathcal{T}}$  téglatestet, amelynél az élhosszak 1,  $a$  és  $b$ . Alkalmazzuk az 5.8. Állításban szereplő összefüggést a speciális  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{N}$  téglatestekre, melyek két-két élhossza egyaránt 1. Eszerint fennáll  $V(\mathcal{N}) = \frac{a}{1} \cdot V(\mathcal{K}) = a$ .

Az  $\mathcal{N}$  négyzetes oszlopnál és az  $\overline{\mathcal{T}}$  téglánál is egyenlő két-két élhossz, emiatt igaz  $V(\overline{\mathcal{T}}) = \frac{b}{1} \cdot V(\mathcal{N}) = ba$ .

Végül alkalmazzuk az 5.8. Állítást a  $\overline{\mathcal{T}}$ ,  $\mathcal{T}$  téglatestekre. Ily módon azt kapjuk, hogy  $V(\mathcal{T}) = \frac{c}{1} \cdot V(\overline{\mathcal{T}}) = cba$  teljesül.  $\square$

A hasábokat szokás prizmáknak is nevezni. Emiatt a következőkben a hasábot többnyire  $\mathcal{P}$  fogja jelölni. A hasábok között fontos szerepe van a paralelepipedonnak, amelynek lapjai paralelogrammák.

**5.10. Állítás.** *Legyen adott egy olyan  $\mathcal{P}$  paralelepipedon, amelynél az egyik lap területe  $t$  és a laphoz tartozó magasság  $h$ . Ekkor a térfogata  $V(\mathcal{P}) = th$ .*

**Bizonyítás (vázlat).**

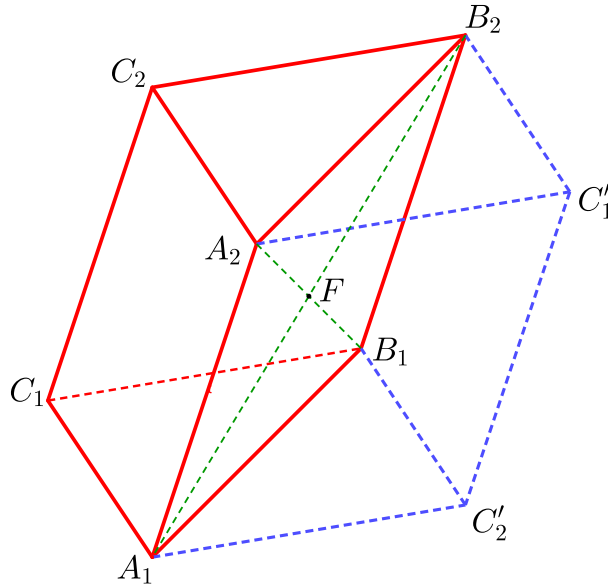
A  $\mathcal{P}$ -n kiválasztott  $t$  területű lap nyilván egy paralelogramma. Ennek egyik oldala legyen  $a$ , a hozzá tartozó magasság pedig  $m_a$ . Az átdarabolás módszerével lehet igazolni, hogy

$\mathcal{P}$  térfogata egyenlő egy olyan téglatest térfogatával, amelynél az élhosszak  $a$ ,  $m_a$  és  $h$ . Ennek következtében fennáll  $V(\mathcal{P}) = a m_a h = t h$ .  $\square$

**5.11. Állítás.** *Legyen adva egy olyan  $\Omega$  háromoldalú hasáb, amelynél az alaplapi háromszög területe  $t$  és a hasáb magassága  $h$ . Ekkor teljesül  $V(\Omega) = t h$ .*

**Bizonyítás.**

Az  $\Omega$  hasáb szemköztes háromszöglapjai legyenek  $A_1B_1C_1\Delta$  és  $A_2B_2C_2\Delta$ . Ezek szerint fennáll  $T(A_1B_1C_1\Delta) = t$ .



29. ábra. A háromoldalú hasáb és a hozzárendelt paralelepipedon.

Jelölje  $F$  az  $A_1B_1B_2A_2$  paralelogramma centrumát, amely megegyezik az oldallap átlóinak felezőpontjával. Tükrözzük az  $\Omega$  hasábot az  $F$  pontra. Ez a centrális tükrözés  $\Omega$ -t az  $\Omega'$  hasábba képezi, melynek háromszöglapjai  $A_1B_1C_2'\Delta$  és  $A_2B_2C_1'\Delta$ . Világos, hogy a két egybevágó hasáb uniója egy  $\mathcal{P}$  paralelepipedon, melynek egyik lapja az  $A_1C_2'B_1C_1$  paralelogramma. Ennek területe  $2t$  és a laphoz tartozó magasság  $h$ . Az 5.10. Állítás szerint igaz  $V(\mathcal{P}) = 2th$ . Az  $\Omega$  és  $\Omega'$  hasábok egybevágósága miatt  $V(\mathcal{P}) = 2 \cdot V(\Omega)$  teljesül, ebből pedig a  $V(\Omega) = th$  összefüggés adódik.  $\square$

Mivel egy sokszög mindig felbontható közös belső ponttal nem rendelkező háromszögekre, egy hasáb is felbontható háromoldalú hasábokra. Emiatt igaz az alábbi kijelentés.

**5.12. Állítás.** *Legyen adva egy  $\Omega$  hasáb, amelynél az alaplapi sokszög területe  $t$  és a hasáb magassága  $h$ . Ekkor teljesül  $V(\Omega) = t h$ .*

A tetraéder térfogatára vonatkozó formula igazolásához fel fogjuk használni az alábbi segédtevényt, amely az első  $n$  pozitív szám négyzetének az összegére vonatkozik. Maga az összefüggés könnyen bizonyítható a teljes indukció módszerével.



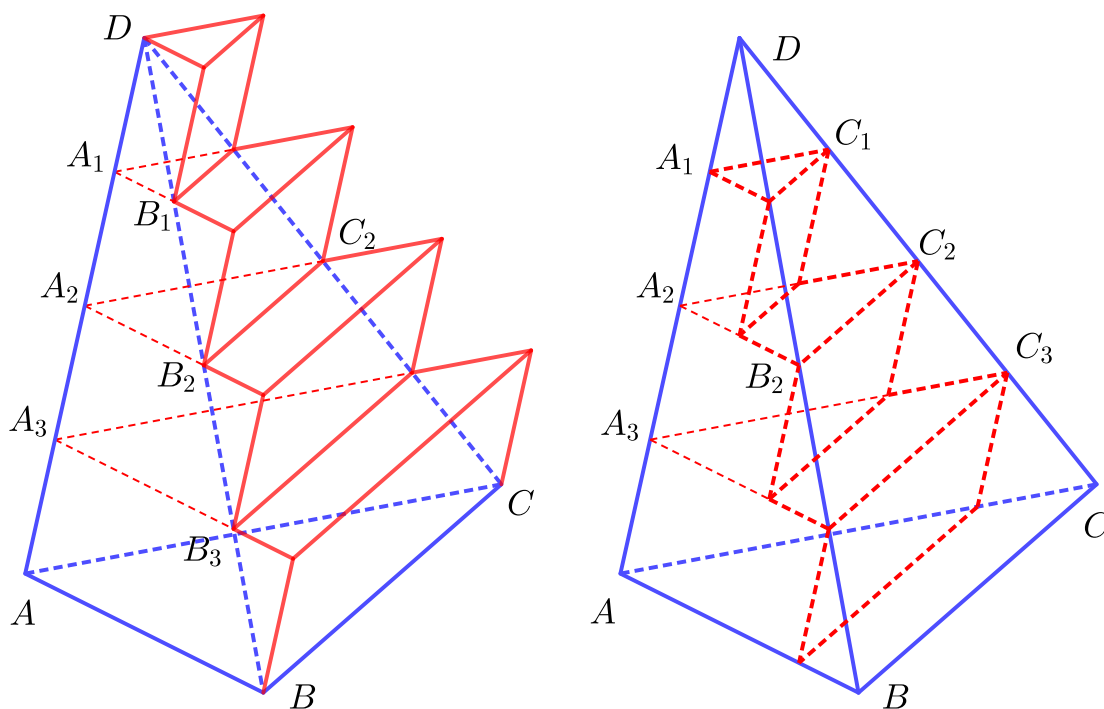
**5.13. Lemma.** Tetszőleges  $n$  pozitív egész számra fennáll a  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  összefüggés.

**5.14. Tétel.** Legyen adott egy  $\mathcal{T}$  tetraéder, melynek csúcspontjai  $A, B, C$  és  $D$ . Jelölje  $t$  az  $ABC$  háromszög területét és  $h$  a hozzá tartozó magasságot. Ekkor a tetraéder térfogatára fennáll a  $V(\mathcal{T}) = \frac{1}{3} t h$  összefüggés.

**Bizonyítás.**

Legyen  $\sigma$  az  $ABC\Delta$  lapot tartalmazó sík. Tekintsünk egy  $n$  ( $n \geq 2$ ) pozitív egész számot. A tetraéder  $DA$  élét osszuk fel  $n$  egyenlő részre. Jelölje  $A_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) a  $DA$  él azon pontját, amelyre fennáll  $DA_k = \frac{k}{n} DA$ . Az  $A_k$  ponton átmenő és a  $\sigma$ -val párhuzamos  $\sigma_k$  sík metsze el a tetraédert az  $A_k B_k C_k$  háromszögben. Vegyük észre, hogy ez a háromszög középpontosan hasonló az  $ABC$  háromszöghöz, továbbá ezen hasonlóság centruma a  $D$  csúcs és az aránya  $k/n$ . Ennek következtében a kimetszett háromszög területére fennáll

$$T(A_k B_k C_k \Delta) = \frac{k^2}{n^2} \cdot T(ABC\Delta) = \frac{k^2}{n^2} \cdot t.$$



30. ábra. A tetraédert közelítő lépcsős poliéderek.

A mellékelt ábrának megfelelően a párhuzamos síkok által kimetszett háromszögek, mint alaplapok, fölé állítsunk fel egy-egy olyan hasábot, melyek oldalélei párhuzamosak

és egyenlőek az  $A_1D$  szakasszal. Ily módon  $n$  számú háromoldalú hasábot kapunk, melyek magassága éppen  $h/n$ . Az  $A_kB_kC_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) háromszöghöz csatolt hasábot jelölje most  $\mathcal{H}_k$ . Világos, hogy ezen hasákok  $\mathcal{L}_n = \cup_{k=1}^n \mathcal{H}_k$  uniója egy általános poliéder, amely tartalmazza a  $\mathcal{T}$  tetraédert.

Határozzuk meg az  $\mathcal{L}_n$  lépcsős poliéder térfogatát. Mivel az összetevő háromoldalú hasáboknak nincs közös belső pontjuk, teljesül

$$V(\mathcal{L}_n) = \sum_{k=1}^n V(\mathcal{H}_k) = \sum_{k=1}^n T(A_kB_kC_k\Delta) \cdot \frac{h}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} t \cdot \frac{h}{n} = th \cdot \left( \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \right).$$

Az 5.13. Lemmát alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$V(\mathcal{L}_n) = th \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = th \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}$$

a lépcsős poliéder térfogata. Vegyük az  $a_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}$  számsorozatot. Világos, hogy bármely  $n$ -re teljesül  $a_n > \frac{1}{3}$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$ . Eszerint a térfogatokra fennáll  $V(\mathcal{L}_n) > \frac{1}{3}th$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(\mathcal{L}_n) = \frac{1}{3}th$ .

A kimetszett háromszögek alapján meg lehet konstruálni egy olyan lépcsős poliédert is, amelyet a tetraéder tartalmaz. Az  $A_kB_kC_k$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ) háromszögekhez, mint fedőlapokhoz, állítsunk olyan háromoldalú hasábokat, melyek melyek oldalélei párhuzamosak és egyenlőek az  $DA_1$  szakasszal. Ezen háromoldalú hasábokat jelölje  $\tilde{\mathcal{H}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{H}}_{n-1}$ . Világos, hogy ezek  $\tilde{\mathcal{L}}_n = \cup_{k=1}^{n-1} \tilde{\mathcal{H}}_k$  uniója egy olyan lépcsős poliéder, amelyet tartalmaz a  $\mathcal{T}$  tetraéder. Ennek térfogatát szintén megkaphatjuk az összetevő hasábok térfogatainak összegeként. Mivel a  $\mathcal{H}_k$ ,  $\tilde{\mathcal{H}}_k$  hasábok egymásnak az eltoltjai, viszont a legalsó  $\mathcal{H}_n$  hasábnak nincs párja az  $\tilde{\mathcal{L}}_n$  poliéderben, fennáll

$$V(\tilde{\mathcal{L}}_n) = V(\mathcal{L}_n) - V(\mathcal{H}_n) = th \cdot \left( \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} - \frac{1}{n} \right) = th \cdot \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3}.$$

Ezen kifejezésből már látható, hogy  $V(\tilde{\mathcal{L}}_n) < \frac{1}{3}th$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(\tilde{\mathcal{L}}_n) = \frac{1}{3}th$  teljesül.

A  $\mathcal{T}$  tetraéder és a lépcsős poliéderek között fennáll a  $\tilde{\mathcal{L}}_n \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{L}_n$  tartalmazási kapcsolat. Ennek következtében teljesül a

$$V(\tilde{\mathcal{L}}_n) < V(\mathcal{T}) < V(\mathcal{L}_n)$$

összefüggés. A fentiek során beláttuk, hogy az  $V(\tilde{\mathcal{L}}_n)$  és  $V(\mathcal{L}_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) térfogati számsorozatok határértéke egyaránt  $\frac{1}{3}th$ . Ebből már következik, hogy  $V(\mathcal{T}) = \frac{1}{3}th$ .  $\square$

Az fenti tételből már következik az alábbi eredmény is.

**5.15. Állítás.** Legyen adott egy  $\Omega$  gúla, melynél az alaplap területe  $t$  és a magasság  $h$ . Ez esetben a gúla térfogatára  $V(\Omega) = \frac{1}{3}th$  teljesül.

## A korlátos alakzatok térfogata

Az alábbiakban azt tárgyaljuk, hogy a poliéderek térfogatának alapján miként lehet definiálni a korlátos alakzatok térfogatát.

Legyen adva egy  $\mathcal{A}$  korlátos alakzat. Azon poliédereket, amelyek tartalmazzák  $\mathcal{A}$ -t, az  $\mathcal{A}$  alakzat külső poliédereinek mondjuk. Amennyiben az  $\mathcal{A}$ -nak van térbeli belső pontja, akkor léteznek olyan poliéderek is, amelyeket az  $\mathcal{A}$  tartalmaz, és ezeket nevezzük az  $\mathcal{A}$  alakzat belső poliédereinek. Világos, hogy egy külső poliéder térfogata nem lehet kisebb egy belső poliéder térfogatánál.

A belső és külső poliéderek térfogatait véve bármely  $\mathcal{A}$  korlátos alakzathoz hozzá tudunk rendelni két nemnegatív számot az alábbi definíció szerint.

**5.16. Definíció.** Legyen adott egy  $\mathcal{A}$  korlátos alakzat. Ennek belső térfogatmértékén (rövidebben belső mértékén) a

$$v_1(\mathcal{A}) = \sup \{ V(\Omega_b) \mid \Omega_b \text{ általános poliéder, } \Omega_b \subset \mathcal{A} \} \cup \{0\}$$

nemnegatív számot értjük. A

$$v_2(\mathcal{A}) = \inf \{ V(\Omega_k) \mid \Omega_k \text{ általános poliéder, } \mathcal{A} \subset \Omega_k \}$$

számot az  $\mathcal{A}$  korlátos alakzat külső térfogatmértékének mondjuk.

**Megjegyzés.** Világos, hogy bármely  $\mathcal{A}$  korlátos alakzat esetén a fennáll a  $v_1(\mathcal{A}) \leq v_2(\mathcal{A})$  egyenlőtlenség a belső és a külső területmértékre.

Amennyiben az  $\mathcal{A}$  alakzatnak nincs térbeli belső pontja, akkor  $v_1(\mathcal{A}) = 0$  teljesül a fenti definíció alapján.

**Megjegyzés.** Ha egy  $\Omega$  általános poliédert veszünk, akkor annak  $v_1(\Omega)$  belső mértéke és  $v_2(\Omega)$  külső mértéke egyaránt megegyezik az  $\Omega$  poliéder  $V(\Omega)$  térfogatával.

**5.17. Definíció.** Legyen adva egy  $\mathcal{A}$  korlátos síkbeli alakzat. Azt mondjuk, hogy az  $\mathcal{A}$  alakzatnak van térfogata, ha annak a belső térfogatmértéke és a külső térfogatmértéke egyenlő, vagyis ha teljesül a  $v_1(\mathcal{A}) = v_2(\mathcal{A})$  egyenlőség.

Az egyenlőség fennállása esetén az  $\mathcal{A}$  alakzat térfogatán a  $v_1(\mathcal{A}) = v_2(\mathcal{A})$  számot értjük. A térfogatra a  $V(\mathcal{A})$  jelölést alkalmazzuk.

**Megjegyzés.** Amennyiben a  $v_1(\mathcal{A}) < v_2(\mathcal{A})$  egyenlőtlenség teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az  $\mathcal{A}$  korlátos alakzatnak nincs térfogata.

**Megjegyzés.** A 2. fejezetben a terület fogalmának bevezetése után mutattunk példát olyan síkbeli korlátos alakzatra, amelynek nincs területe. Ez volt az úgynevezett racionális fésű. Ennek analógiájára megkonstruálható a térben a racionális tűpárna, amelynek nincs térfogata.

Az alábbi állítás bizonyítása könnyen elvégezhető az 5.17. Definíció alapján.

**5.18. Állítás.** Legyen adott két olyan korlátos alakzat  $\mathcal{A}$  és  $\mathcal{B}$ , amelyek egybevágóak egymással. Ha az  $\mathcal{A}$  alakzatnak van térfogata, akkor a  $\mathcal{B}$  alakzatnak is van térfogata és fennáll  $V(\mathcal{A}) = V(\mathcal{B})$ .

Eddigi eredményeink már alapján belátható, hogy igaz az alábbi kijelentés is.

**5.19. Állítás.** Legyen adva egy olyan  $\mathcal{A}$  korlátos alakzat, amelynek van térfogata. Tekintsünk egy  $\eta : X \rightarrow X$  hasonlóságot, amelynek aránya  $\lambda$ . Ekkor az  $\mathcal{A}' = \eta(\mathcal{A})$  képalakzatnak is van térfogata és  $V(\mathcal{A}') = \lambda^3 \cdot V(\mathcal{A})$  teljesül.

A következő tételt ezúttal bizonyítás nélkül közöljük.

**5.20. Tétel.** *Ha az  $\mathcal{A}$  korlátos alakzat konvex, akkor az  $\mathcal{A}$ -nak van térfogata.*

### A gömbtest térfogata

A továbbiakban fő célunk a gömb térfogatának meghatározása lesz. Előbb azonban két egyszerű állítást mondunk ki.

Ha veszünk egy  $h$  magasságú körhengert, akkor azt közelíteni tudjuk olyan  $h$  magasságú hasábokkal, melyek alaplapjai a henger alapkörébe beírt szabályos sokszögek, illetve az alpkör köré írt szabályos sokszögek. Ily módon 2.30. Tétel és az 5.12. Állítás alapján már könnyen igazolható az alábbi kijelentés.

**5.21. Állítás.** *Ha egy körhenger alaplapjának sugara  $r$  és magassága  $h$ , akkor a körhenger térfogata  $V = r^2\pi \cdot h$ .*

A körkúpot pedig gúlákkal lehet közelíteni. Ez esetben az 5.15. Állítást kell felhasználnunk a térfogat meghatározásához.

**5.22. Állítás.** *Ha egy körkúp alaplapjának sugara  $r$  és magassága  $h$ , akkor a körkúp térfogata  $V = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot h$ .*

**Megjegyzés.** Az előbbi két állítás általánosabb formában is érvényben marad. *Ha egy konvex henger alaplapjának területe  $t$  és magassága  $h$ , akkor a henger térfogata  $V = t \cdot h$ .*

*Ha egy konvex kúp alaplapjának területe  $t$  és magassága  $h$ , akkor a körkúp térfogata  $V = \frac{1}{3}t \cdot h$ .*

Vizsgálataink egyik alapvető eredménye az alábbi tétel.

**5.23. Tétel.** *Az  $r$  sugarú gömbtest térfogata  $V = \frac{4}{3}r^3\pi$ .*

### Bizonyítás.

Legyen adva a térben egy  $r$  sugarú és  $O$  centrumú zárt gömbtest, melyet ezúttal jelöljön  $\mathcal{B}$ . Vegyünk egy olyan  $\sigma$  síkot, amely áthalad az  $O$  középponton. A  $\sigma$  által határtolt egyik féltér egy  $\mathcal{F}$  félgömböt metsz ki a gömbből. Az alábbiak során azt fogjuk igazolni, hogy ennek térfogatára teljesül  $V(\mathcal{F}) = \frac{2}{3}r^3\pi$ .

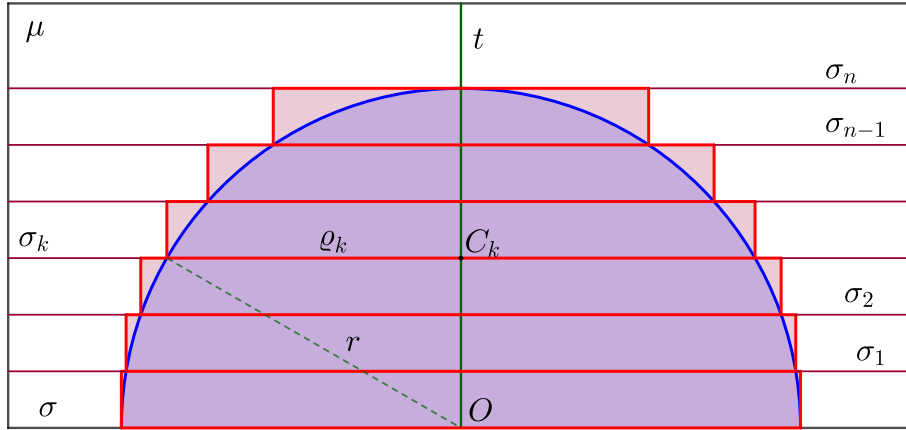
Tekintsünk egy  $n$  ( $n \geq 3$ ) pozitív egész számot. Az  $\mathcal{F}$  félgömböt tartalmazó féltérben vegyük azokat a  $\sigma$ -val párhuzamos  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) síkokat, ahol a  $k$ -edik  $\sigma_k$  síknak a  $\sigma$ -tól mért távolsága  $k \cdot \frac{r}{n}$ . A  $\sigma$  síkot egyúttal tekintsük a  $\sigma_0$  síknak ( $\sigma_0 = \sigma$ ).

Ezen párhuzamos síkok a félgömböt egy-egy körlemezben metszik el. A  $\sigma_k$  síkkal kimetszett kör centrumát jelölje  $C_k$ , a sugarát pedig  $\varrho_k$ . Világos, hogy a  $\varrho_k$  sugarra fennáll a

$$\varrho_k^2 = r^2 - (OC_k)^2 = r^2 - \frac{k^2 r^2}{n^2} = r^2 \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)$$

egyenlőség. (Lásd a 31. ábrát a következő oldalon.)

A  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  síkok által kimetszett körlemezekre, mint alapkörökre, állítsunk egy-egy  $\frac{r}{n}$  magasságú egyenes körhengert. A mellékelt 31. ábrán szereplő  $t$  egyenes a körhengerek közös forgástengelye, a  $\mu$  sík pedig tartalmazza a  $t$  tengelyt.



31. ábra. A félgömböt tartalmazó  $\mathcal{L}_n$  külső hengeres test oldalnézetben.

Vegyük észre, hogy a szomszédos körhengerek csak az alapkörök mentén érintkeznek egymással, tehát bármely két körhengernek nincs közös belső pontja. A  $\sigma_k$  síkkal kimetszett körlemezre állított  $\frac{r}{n}$  magasságú körhengert jelölje  $\mathcal{H}_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ). Ezen tömör hengerek  $\mathcal{L}_n = \cup_{k=0}^{n-1} \mathcal{H}_k$  uniója egy lépcsős test, amelynek van térfogata és amely tartalmazza az  $\mathcal{F}$  félgömböt.

Határozzuk meg az  $\mathcal{L}_n$  lépcsős-hengeres test térfogatát. Mivel az összetevő hengereknek nincs közös belső pontjuk, térfogatra teljesül

$$\begin{aligned} V(\mathcal{L}_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} V(\mathcal{H}_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \varrho_k^2 \pi \cdot \frac{r}{n} \\ &= \frac{r}{n} \pi \cdot \sum_{k=0}^{n-1} r^2 \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{r}{n} \pi \cdot \left(n r^2 - \frac{r^2}{n^2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^2\right). \end{aligned}$$

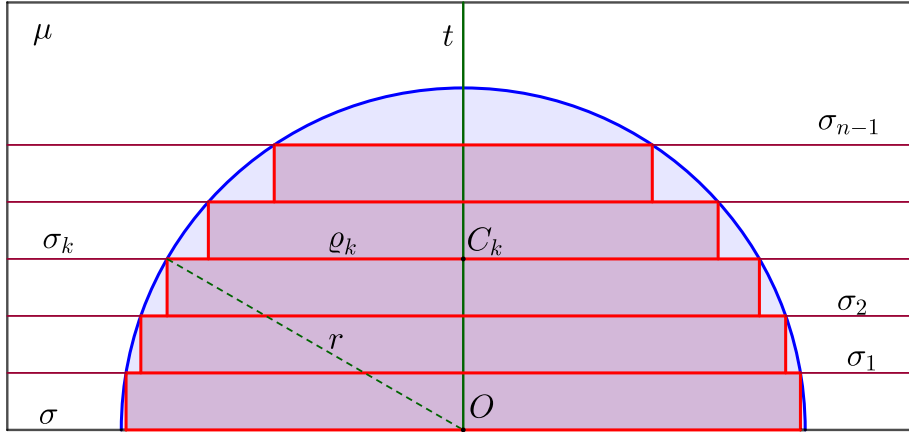
Ebből pedig az 5.13. Lemma felhasználásával a

$$V(\mathcal{L}_n) = r^3 \pi \left(1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right) = r^3 \pi \left(1 - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}\right) = r^3 \pi \left(1 - \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3}\right)$$

összefüggéshez jutunk. Vegyük a  $b_n = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) számsorozatot. Világos, hogy bármely  $n$ -re teljesül  $b_n < \frac{1}{3}$ , továbbá igaz  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{3}$ . Eszerint az  $\mathcal{L}_n$  külső lépcsős-hengeres testek térfogatára fennáll  $V(\mathcal{L}_n) > \frac{2}{3} r^3 \pi$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(\mathcal{L}_n) = \frac{2}{3} r^3 \pi$ .

A párhuzamos síkokkal kimetszett körlemezek alapján meg tudunk konstruálni egy olyan lépcsős-hengeres testet is, amely benne van a félgömbben. A  $\sigma_k$  ( $k = 1, \dots, n-1$ )

síkokkal kimetszett körök alá, mint fedőlapi körökhöz, helyezünk el egy-egy olyan egyenes körhengert, amelyek magassága  $\frac{r}{n}$ .



32. ábra. A félgömb által tartalmazott  $\tilde{\mathcal{L}}_n$  belső hengeres test oldalnézetben.

Ezen körhengereket jelölje  $\tilde{\mathcal{H}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{H}}_{n-1}$ . Látható, hogy ezek  $\tilde{\mathcal{L}}_n = \cup_{k=1}^{n-1} \tilde{\mathcal{H}}_k$  uniója egy olyan test, amelyet tartalmaz az  $\mathcal{F}$  félgömb. Mivel a  $\tilde{\mathcal{H}}_k$  és  $\mathcal{H}_k$  hengerek alapköri sugara egyaránt  $\varrho_k$ , ezek egymással egybevágóak, tehát igaz  $V(\tilde{\mathcal{H}}_k) = V(\mathcal{H}_k)$ . Világos, hogy emiatt az  $\tilde{\mathcal{L}}_n$  test térfogata a  $\mathcal{H}_0$  henger térfogatával kisebb az  $\mathcal{L}_n$  külső test térfogatánál. Eszerint fennáll

$$V(\tilde{\mathcal{L}}_n) = V(\mathcal{L}_n) - \frac{r^3 \pi}{n} = r^3 \pi \left( 1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} \right).$$

A fenti összefüggésből már következik, hogy az  $\tilde{\mathcal{L}}_n$  belső lépcsős-hengeres testek térfogatára fennáll  $V(\tilde{\mathcal{L}}_n) < \frac{2}{3} r^3 \pi$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(\mathcal{L}_n) = \frac{2}{3} r^3 \pi$ .

Az  $\mathcal{F}$  félgömb és a hengeres testek között fennáll az  $\tilde{\mathcal{L}}_n \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{L}_n$  tartalmazási kapcsolat. Ennek következtében teljesül a

$$V(\tilde{\mathcal{L}}_n) < V(\mathcal{F}) < V(\mathcal{L}_n)$$

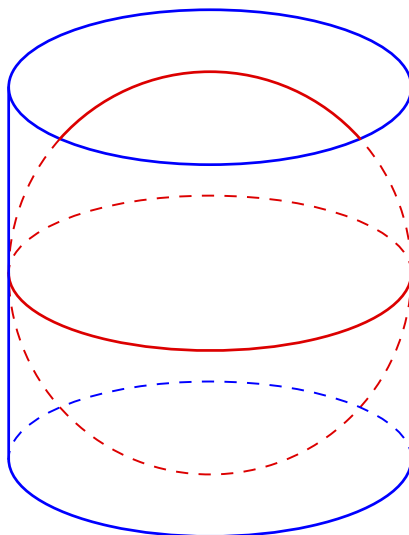
összefüggés. A fentiek során beláttuk, hogy az  $V(\tilde{\mathcal{L}}_n)$  és  $V(\mathcal{L}_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) térfogati számsorozat határértéke egyaránt  $\frac{2}{3} r^3 \pi$ . Ebből már adódik, hogy a félgömb térfogata  $V(\mathcal{F}) = \frac{2}{3} r^3 \pi$ .

Ha vesszük az  $\mathcal{F}$  félgömbnek a  $\sigma$  síkra vonatkozó tükörképét, akkor ennek és  $\mathcal{F}$ -nek az uniójaként a  $\mathcal{B}$  gömbtestet kapjuk. Emiatt a  $\mathcal{B}$  gömbtest térfogatára fennáll

$$V(\mathcal{B}) = 2 \cdot V(\mathcal{F}) = \frac{4}{3} r^3 \pi. \quad \square$$

**Megjegyzés.** A gömb térfogatára vonatkozó összefüggést, ami lényegében azt mondja ki, hogy a gömb térfogata kétharmada az őt befoglaló körhenger térfogatának, elsőként a görög Arkhimédész bizonyította be. Az  $r$  sugarú gömb befoglaló hengere az a tömör körhenger, amelynek palástja a gömböt egy főkör mentén érinti, továbbá az alapköréi a gömböt két átellenes pontban érintik. Világos, hogy ezen körhenger térfogata  $2r^3\pi$ .

Arkhimédész, akit sokan az ókor legnagyobb matematikusának tartanak, az i.e. III. évszázadban élt és alkotott.



33. ábra. A gömb és az őt befoglaló henger térfogataránya  $V_g : V_h = 2 : 3$ .

#### A Cavalieri-elv alkalmazása térfogat meghatározására

A következő tételt, amelynek alkalmazásával meg lehet határozni egyes térbeli alakzatok térfogatát, Cavalieri-elvként szokták idézni.

**5.24. Tétel.** Legyenek  $\mathcal{T}_1$  és  $\mathcal{T}_2$  olyan korlátos alakzatok, amelyek egy  $\sigma$  sík által határolt egyazon féltérbe esnek.  $\mathcal{T}_1$  és  $\mathcal{T}_2$  tegyenek eleget azon feltételnek, miszerint van olyan  $g_i$  ( $i = 1, 2$ ) egyenes, hogy a  $g_i$ -vel párhuzamos egyeneseknek a  $\mathcal{T}_i$ -vel vett ( $\emptyset$  halmaztól különböző) metszetei olyan szakaszok, amelyek egyik végpontja a  $\sigma$  síkra esik.

Ha a  $\sigma$ -val párhuzamos síkok  $\mathcal{T}_1$  és  $\mathcal{T}_2$  testekkel vett metszeteinek mindig van területe és ezen területek páronként egyenlők, akkor a  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{T}_2$  térbeli alakzatoknak van térfogatuk és azok egyenlők, vagyis fennáll  $V(\mathcal{T}_1) = V(\mathcal{T}_2)$ .

#### Bizonyítás alapötlete.

A fenti tétel bizonyítása azon alapul, hogy mindkét test közelíthető olyan kis magasságú hengerek uniójával, amelyek alapterülete páronként egyenlő. Ezt a bizonyítási módszert követve integrálszámítással is meg lehet határozni egy testnek a térfogatát.

## 6) A korlátos konvex test felszínének értelmezése

Célszerű felidézni, a konvex poliéder definícióját. Eszerint a konvex poliéder egy olyan térbeli alakzat, amely korlátos, van belső pontja és előáll véges sok féltér metszeteként.

Tekintsünk egy  $\Omega$  konvex poliédert, melynek lapjai az  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_l$  ( $l \geq 4$ ) sokszögek. Mint ismeretes, az  $\Omega$  határpontjainak halmaza megegyezik a lapok uniójával, azaz  $Bd(\Omega) = \cup_{i=1}^l \mathcal{S}_i$ . Ezt mondjuk az  $\Omega$ -hoz tartozó poliéderfelületnek.

Elsőként a konvex poliéderek felszínének fogalmát adjuk meg.

**6.1. Definíció.** Legyen adva egy  $\Omega$  konvex poliéder, melynek lapjai az  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_l$  ( $l \geq 4$ ) sokszögek. Vegyük a lapok  $T(\mathcal{S}_1), \dots, T(\mathcal{S}_l)$  területeit. Az  $\Omega$  poliéder felszínén az  $F(\Omega) = \sum_{i=1}^l T(\mathcal{S}_i)$  számot (azaz a poliédert határoló lapok területeinek az összegét) értjük.

Az  $F(\Omega)$  számot egyúttal a  $Bd(\Omega)$  poliéderfelület felszínének is mondjuk.

**Megjegyzés.** Nem nehéz belátni, hogy egy konvex poliéder bármely lapjának a területe mindig kisebb a többi lap területének az összegénél.

A 2.7. Állítás bizonyítását követve igazolni lehet a következő kijelentést.

**6.2. Állítás.** Legyenek  $\Omega_1$  és  $\Omega_2$  olyan konvex poliéderek, melyekre fennáll  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ , vagyis az  $\Omega_2$  poliéder tartalmazza  $\Omega_1$ -t. Ezen konvex poliéderek felszíneire teljesül az  $F(\Omega_1) \leq F(\Omega_2)$  egyenlőtlenség.

Legyen adott egy  $\mathcal{T}$  korlátos konvex test. Mint ismeretes a test elnevezés arra utal, hogy a  $\mathcal{T}$ -nek van térbeli belső pontja. A  $\mathcal{T}$  alakzat határpontjainak  $Bd(\mathcal{T})$  halmazát a  $\mathcal{T}$  konvex testet határoló felületnek nevezzük.

Egy  $\mathcal{T}$  korlátos konvex test felszínét az általa tartalmazott konvex poliéderek alapján definiáljuk. A 6.2. Állításból következik, hogy ha veszünk egy a  $\mathcal{T}$  testet tartalmazó konvex poliédert, akkor annak felszíne nem lehet kisebb a  $\mathcal{T}$  testben lévő konvex poliéderek felszíneinél.

**6.3. Definíció.** A  $\mathcal{T}$  korlátos konvex test felszínén az  $F(\mathcal{T}) = \sup \{ F(\Omega) \mid \Omega \text{ konvex poliéder, } \Omega \subset \mathcal{T} \}$  számot értjük. Más szóval a  $\mathcal{T}$  korlátos konvex test  $F(\mathcal{T})$  felszíne az általa tartalmazott konvex poliéderek felszíneinek a szupremuma (vagyis a felső határa).

Az  $F(\mathcal{T})$  számot egyúttal a  $\mathcal{T}$  testet határoló  $Bd(\mathcal{T})$  felület felszínének is mondjuk.

Legyen adott egy  $O$  pont és egy  $r$  pozitív valós szám. Mint ismeretes, az  $O$  középponttal és  $r$  sugárral meghatározott gömbfelületen a  $\mathcal{G}(O, r) = \{ P \in X \mid OP = r \}$  alakzatot értjük.

A  $\mathcal{B}(O, r) = \{ P \in X \mid OP \leq r \}$  alakzatot az  $O$  centrummal és  $r$  sugárral vett zárt gömbtestnek mondjuk. A  $\mathcal{B}(O, r)$  zárt gömbtestet a  $\mathcal{G}(O, r)$  gömbfelület határolja.

Az alábbi tételt ezúttal bizonyítás nélkül mondjuk ki.

**6.4. Tétel.** Az  $r$  sugarú gömbtest, illetve az őt határoló gömbfelület felszíne  $F = 4r^2\pi$ .