Differenciálgeometria és nemeuklideszi geometriák c. gyakorlat

matematikatanári szak (2023/24–es tanév, 1. félév)

1. feladatsor (Paraméterezett görbék.)

Az $\mathbb{R}^3$ térbeli paraméterezett görbén egy olyan folytonos $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ leképezést értünk, ahol I egy valós intervallum. A $\boldsymbol{\gamma}(I) = \{\ \boldsymbol{\gamma}(t) \ \mid t \in I\ \}$ alakzatot mondjuk a $\boldsymbol{\gamma}$ görbe pályájának.

1) Az $\mathbb{R}^3$ térben tekintsük a $\mathbf{p} = (2, -3, 1)$ és $\mathbf{q} = (8, 0, -5)$ pontokat. Adjunk meg egy olyan paraméterezett görbét, amelynek pályája megegyezik a két pontot összekötő szakasszal.

2) A $z = 0$ koordinátasíkban vegyük az $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$ egyenletű ellipszist. A szögfüggvényeket alkalmazva adjunk meg egy olyan sima paraméterezett görbét, amelynek pályája megegyezik az ellipszissel.

3) A $z = 0$ koordinátasíkban vegyük az $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$ egyenletű hiperbolát. A hiperbolikus függvények felhasználásával adjunk meg egy olyan paraméterezett görbét, amelynek pályája megegyezik a hiperbola egyik ágával.

4) Tekintsük a $\boldsymbol{\gamma}(t) = \cos t \cdot |\cos t|\, \mathbf{e}_1 + \sin t \cdot |\sin t|\, \mathbf{e}_2$ összefüggéssel leírt $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett síkgörbét. Jellemezzük a $\boldsymbol{\gamma}$ görbe pályáját.

5) A $z = 0$ egyenletű síkban egy az $\mathbf{0}$ kezdőpontra illeszkedő egyenes ω szögsebességgel forog $\mathbf{0}$ körül. Ezen forgó egyenes mentén egy tömegpont halad konstans v sebességgel. A $t = 0$ pillanatban a forgó egyenes éppen az x tengellyel esik egybe és a tömegpont az $\mathbf{0}$ kezdőpontban van. Adjuk meg a tömegpont $\boldsymbol{\gamma}(t)$ helyvektorát az idő függvényében $(t \geq 0)$. *A tömegpont mozgását leíró $\boldsymbol{\gamma}$ görbe pályáját nevezik arkhimédészi spirálnak.*

6) Tekintsük azt a $\boldsymbol{\gamma} : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ paraméterezett síkgörbét, amelyet a $\boldsymbol{\gamma}(t) = \dfrac{4\,t}{1 + t^3}\, \mathbf{e}_1 + \dfrac{4\,t^2}{1 + t^3}\, \mathbf{e}_2$ összefüggés ír le. Mutassuk meg, hogy amennyiben az a $(a > 0)$ konstans értékét alkalmasan választjuk meg, akkor a $\boldsymbol{\gamma}$ síkgörbe pályája rajta van az $x^3 + y^3 - a\,x\,y = 0$ harmadfokú egyenlettel leírt alakzaton. *(Elnevezés: Descartes–féle levél.)* Igaz-e, hogy az $x - y = 0$ egyenletű egyenes szimmetriatengelye a görbe pályájának?

7) Vegyük a $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ paraméteres síkgörbét, amelyre fennáll $\boldsymbol{\gamma}(t) = \dfrac{6\,t}{1 + t^2}\, \mathbf{e}_1 + \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}\, \mathbf{e}_2$ $(t \in \mathbb{R})$. Igazoljuk, hogy a $\boldsymbol{\gamma}$ görbe pályája rajta van egy ellipszisen és adjuk meg az ellipszis egyenletét.

8) Vegyük azt a $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett görbét, amelynél $\boldsymbol{\gamma}(t) = \dfrac{1}{1 + t^2 + t^4}\big(2t\, \mathbf{e}_1 + 2t^2\, \mathbf{e}_2 + 2t^3\, \mathbf{e}_3\big)$ teljesül tetszőleges t esetén. Bizonyítsuk be, hogy a görbe pályája rajta van egy $\mathbf{c} = (0, 1, 0)$ centrumú gömbön.

Differenciálgeometria és nemeuklideszi geometriák c. gyakorlat

matematikatanári szak (2023/24–es tanév, 1. félév)

2. feladatsor (Paraméterezett görbék. Érintők. Ívhossz.)

Legyen adva egy $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ reguláris sima (paraméterezett) görbe. Ennek a $t_0 \in I$ helyen vett érintőjén azt az egyenest értjük, amely áthalad a $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$ ponton és amelynek egyik irányvektora a $\boldsymbol{\gamma}'(t_0)$ vektor.

1) Tekintsük a $\boldsymbol{\gamma}(t) = \dfrac{t^4}{4}\,\mathbf{e}_1 + \dfrac{t^3}{3}\,\mathbf{e}_2 + \dfrac{t^2}{2}\,\mathbf{e}_3$ összefüggéssel leírt $\boldsymbol{\gamma} : (0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ reguláris térgörbét. Határozzuk meg a görbe azon helyeit, amelyekben az érintőegyenes párhuzamos az $x - 5y + 6z = 0$ egyenletű síkkal. Adjuk meg ezen párhuzamos érintőegyeneseknek a paraméteres vektoregyenletét.

2) Vegyük a $\boldsymbol{\gamma}(t) = e^t\,\cos t\,\mathbf{e}_1 + e^t\,\sin t\,\mathbf{e}_2 + e^t\,\mathbf{e}_3$ $(t\in\mathbb{R})$ összefüggéssel leírt $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ paraméteres görbét, melynek pályája rajta van az $x^2+y^2 = z^2$ egyenletű forgáskúpon. Igazoljuk, hogy ez a sima görbe konstans szögben metszi el a kúpfelület alkotóit.

3) Tekintsük a $\boldsymbol{\gamma}(t) = \operatorname{ch} t\,\mathbf{e}_1 + \operatorname{sh} t\,\mathbf{e}_2$ egyenlettel leírt $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ reguláris síkgörbét. Vegyük a $\varphi : (-1,1) \to \mathbb{R}$ függvényt, ahol $\varphi(u) = 2\operatorname{arth} u$. Hozzuk egyszerűbb alakra a $\boldsymbol{\gamma}$ átparaméterezésével nyert $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \circ \varphi$ sima görbe koordináta-függvényeit.

4) Tekintsük a $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t - \sin t)\,\mathbf{e}_1 + (1 - \cos t)\,\mathbf{e}_2$ összefüggéssel leírt $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ síkgörbét, az úgynevezett közönséges cikloist. Számítsuk ki a ciklois egy menetének, vagyis a $\boldsymbol{\gamma}|[0,2\pi]$ görbeszegmensnek az ívhosszát.

5) Az $\mathbb{R}^2$ síkban vegyük az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kört és az azt érintő $x = 1$ egyenletű egyenest. Az egyenest gördítsük végig csúszásmentesen a körön. Adjuk meg a kezdeti érintkezési pont által leírt pálya *(a körevolvens)* egy olyan paraméterezését, ahol a t paraméter a körön legördült szakasz hossza $(\boldsymbol{\gamma}(t) =?)$. Határozzuk meg a $\boldsymbol{\gamma}|[2,3]$ görbedarab ívhosszát.

6) Tekintsük a $\boldsymbol{\gamma}(t) = \cos^3 t\,\mathbf{e}_1 + \sin^3 t\,\mathbf{e}_2 + \cos(2t)\,\mathbf{e}_3$ összefüggéssel leírt $\boldsymbol{\gamma} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ sima térgörbét. Határozzuk meg ezen görbe ívhosszát.

7) Vegyük a $\boldsymbol{\gamma}(t) = t\,\mathbf{e}_1 + \sqrt{1-t^2}\,\mathbf{e}_2$ összefüggéssel meghatározott $\boldsymbol{\gamma} : (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ reguláris síkgörbét. Határozzuk meg $\boldsymbol{\gamma}$ azon ívhossznak megfelelő $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \circ \varphi$ átparaméterezését, amelyre $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(0) = \boldsymbol{\gamma}(0)$ teljesül.

8)* A $z = 0$ egyenletű síkban vegyük az egymást érintő $x^2 + y^2 = 1$ és $(x-2)^2 + y^2 = 1$ egyenletű köröket. A második kört gördítsük le az első körön. A kiindulási helyzetben vett érintkezési pontot tekintsük egy rögzített pontnak a legördülő kör kerületén. Adjuk meg a kezdeti érintkezési pont által leírt pálya *(a szívgörbe)* egy olyan paraméterezését, ahol a t paraméter a legördült körív középponti szöge $(\boldsymbol{\gamma}(t) =?)$. Számítsuk ki ezen görbe (az ún. kardioid) ívhosszát.

Differenciálgeometria és nemeuklideszi geometriák c. gyakorlat

matematikatanári szak (2023/24–es tanév, 1. félév)

3. feladatsor (Görbület, Frenet–bázis, simulókör.)

A $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ reguláris sima görbe $t \in I$ helyen vett görbületén a $\kappa(t) = \dfrac{1}{v(t)} \|\mathbf{T}'(t)\|$ számot értjük, ahol $\mathbf{T}(t)$ az érintő egységvektor. Amennyiben a görbület nem tűnik el, akkor $\mathbf{F}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \mathbf{T}'(t)$ a görbe főnormális egységvektora a $t \in I$ helyen, továbbá $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{F}(t)$ a görbe binormális egységvektora.

1) Tekintsük a $\boldsymbol{\gamma}(t) = t\,\mathbf{e}_1 - \ln(\cos t)\,\mathbf{e}_2$ összefüggéssel leírt $\boldsymbol{\gamma} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$ síkbeli görbét. Tetszőleges t helyen határozzuk meg a $\boldsymbol{\gamma}$ görbe $\mathbf{T}(t)$ érintő egységvektorát és $\kappa(t)$ görbületét.

2) Vegyük a $\boldsymbol{\gamma}(t) = a\,\cos t\,\mathbf{e}_1 + a\,\sin t\,\mathbf{e}_2 + b\,t\,\mathbf{e}_3$ $(t \in \mathbb{R})$ egyenlettel leírt $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ görbét, ahol $a > 0$ és $b \neq 0$. *Ezen görbét, illetve a pályáját, nevezik hengeres csavarvonalnak.* Mutassuk meg, hogy a $\boldsymbol{\gamma}$ görbe κ görbületi függvénye konstans és adjuk meg annak értékét.

3) Határozzuk meg az előző feladatban szereplő $\boldsymbol{\gamma}$ görbe (az úgynevezett hengeres csavarvonal) kísérő Frenet–bázisát és τ torzió–függvényét.

4) Tekintsük a $\boldsymbol{\gamma}(t) = (2t-5)\,\mathbf{e}_1 + \ln t\,\mathbf{e}_2 + (t^2+1)\,\mathbf{e}_3$ összefüggéssel leírt $\boldsymbol{\gamma} : (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ görbét. Határozzuk meg $t = 1$ helyen a görbe simulósíkjának egyenletét, továbbá a simulókör sugarát és centrumát.

5) Tekintsük a $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t^2 + \exp(t))\,\mathbf{e}_1 + (3\cos t - \sin t)\,\mathbf{e}_2 + 4\sin t\,\mathbf{e}_3$ összefüggés által leírt $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ görbét. A $t = 0$ helyen határozzuk meg a görbe Frenet–bázisának vektorait, továbbá a simulókör sugarát és centrumát.

6) Határozzuk meg a $\boldsymbol{\gamma}(t) = e^t\,\cos t\,\mathbf{e}_1 + e^t\,\sin t\,\mathbf{e}_2 + e^t\,\mathbf{e}_3$ $(t \in \mathbb{R})$ összefüggéssel leírt $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ valódi görbe (az úgynevezett kúpos csavarvonal) κ görbületi függvényét. Mutassuk meg, hogy van olyan térbeli irány, amellyel a $\boldsymbol{\gamma}$ sebességvektorai konstans szöget zárnak be.

7) Az $\mathbb{R}^3$ tér $z = 0$ koordinátasíkjában vegyük az $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszist, ahol $a > b > 0$. Tekintsük ezen ellipszis egyik paraméterezését. Határozzuk meg az ellipszis görbületének minimumát és maximumát.

8) Adva van egy olyan $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ reguláris görbe, amelynek összes normálsíkja áthalad az $\mathbb{R}^3$ tér egy rögzített pontján. Igazoljuk, hogy $\boldsymbol{\gamma}$ pályája rajta van egy gömbfelületen. *(A görbe t helyen vett normálsíkján azt a síkot értjük, amely áthalad a $\boldsymbol{\gamma}(t)$ ponton és merőleges a $\boldsymbol{\gamma}'(t)$ sebességvektorra.)*

Differenciálgeometria és nemeuklideszi geometriák c. gyakorlat
matematikatanári szak (2023/24–es tanév, 1. félév)
4. feladatsor (Feladatok térbeli és síkbeli görbékre.)

1) Az $\mathbb{R}^2$ síkban vegyünk egy olyan p paraméterű parabolát, melynek szimmetriatengelye az y tengely és tengelypontja $\mathbf{0}$. Adjunk meg egy olyan paraméterezett reguláris sima görbét, melynek pályája a parabola. Határozzuk meg a görbe κ görbületi függvényének az értékkészletét.

2) Igazoljuk, hogy a $\boldsymbol{\gamma}(t) = 2t^2\,\mathbf{e}_1 + (3t^2 + t + 1)\,\mathbf{e}_2 + (4t - 5)\,\mathbf{e}_3 \quad (t \in \mathbb{R})$ összefüggéssel leírt $\boldsymbol{\gamma}$ görbe pályája rajta van az $\mathbb{R}^3$ tér egyik síkján, és határozzuk meg ezen sík egyenletét.

3) Adva van egy olyan $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ valódi görbe, amelynek érintő egységvektorai egy állandó α $(0 < \alpha < \pi/2)$ szöget zárnak be egy rögzített $\mathbf{w}$ egységvektorral. (Eszerint fennáll $\langle \mathbf{w}, \mathbf{T}(t) \rangle = \cos\alpha, \ \ t \in I$.) Bizonyítsuk be, hogy a τ torzió-függvény és a κ görbület-függvény $\tau(t)/\kappa(t)$ hányadosa állandó. *(Utalás: Alkalmazzuk a Frenet–formulákat.)*

4) Tekintsük a $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t - \sin t)\,\mathbf{e}_1 + (1 - \cos t)\,\mathbf{e}_2$ paraméterezéssel megadott közönséges cikloist. Határozzuk meg a $\boldsymbol{\gamma} : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ síkgörbe kísérő Frenet-bázisát, k előjeles görbületi függvényét és a maximális sugarú simulókörének egyenletét.

5) Tekintsük a $\boldsymbol{\gamma}(t) = \big(\ln(\operatorname{tg} \frac{t}{2}) + \cos t\big)\,\mathbf{e}_1 + \sin t\,\mathbf{e}_2$ összefüggéssel megadott $\boldsymbol{\gamma} : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ síkgörbét. Vegyük a t-beli $(t \neq \frac{\pi}{2})$ érintőegyenes azon szakaszát, melynek az egyik végpontja $\boldsymbol{\gamma}(t)$, a másik pedig az érintő és az x tengely metszéspontja. Igazoljuk, hogy a szakasz hossza nem függ a t megválasztásától. *(A $\boldsymbol{\gamma}$ pályájának neve traktrix.)*

6) Határozzuk meg az előző feladatban szereplő síkgörbe kísérő Frenet-bázisát és k előjeles görbületi függvényét az $I = (0, \pi/2)$ intervallumon.

7) Legyen adott egy $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ reguláris síkgörbe, melynek előjeles görbülete sehol sem tűnik el és fennáll $k'(t) \neq 0$ tetszőleges $t \in (a, b)$ esetén. Tekintsük a $\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t) + \frac{1}{k(t)}\,\mathbf{N}(t)$ egyenlettel meghatározott $\boldsymbol{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ görbét, ahol $k(t)$ a $\boldsymbol{\gamma}$ előjeles görbülete és $\mathbf{N}(t)$ a normális egységvektora a t helyen. *Ezt a $\boldsymbol{\sigma}$ görbét a $\boldsymbol{\gamma}$ evolútájának mondjuk.* Igazoljuk, hogy a $\boldsymbol{\sigma}$ ívhosszára fennáll $l(\boldsymbol{\sigma}) = \left| \dfrac{1}{k(a)} - \dfrac{1}{k(b)} \right|$.

8) Vegyük a $\boldsymbol{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ görbét, amelynél $\boldsymbol{\gamma}(t) = a\,\cos t\,\mathbf{e}_1 + b\,\sin t\,\mathbf{e}_2$ $(t \in [0, 2\pi])$ és $a > b > 0$. Igazoljuk, hogy a $\boldsymbol{\gamma}$ ellipszis $\boldsymbol{\sigma}$ evolútájának ívhossza: $l(\boldsymbol{\sigma}) = 4\left(\dfrac{a^2}{b} - \dfrac{b^2}{a}\right)$.

9)* Tekintsünk egy síkot és abban egy $R = 2$ sugarú kört. Ennek belsejében (csúszásmentesen) gördítsünk végig rajta egy körlemezt, amelynek sugara $r = 1$. Vegyük a legördülő körlemeznek egy belső pontját. Igazoljuk, hogy a gördítés során a pont által leírt pálya egy ellipszis.

Differenciálgeometria és nemeuklideszi geometriák c. gyakorlat

matematikatanári szak (2023/24–es tanév, 1. félév)

5. feladatsor (Felületek leírása egyenlettel és kétváltozós vektorértékű függvénnyel.)

1) Az $\mathbb{R}^2$ síkban vegyük a $D = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1 \}$ nyílt körlemezt. Ezen a D tartományon tekintsük a $h(u,v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$ összefüggéssel meghatározott kétváltozós, C^∞–osztályú $h : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt. Milyen sima elemi felületet ad a h valós függvény grafikonja?

2) Legyen adott egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Vegyük az $\mathbb{R}^3$ térben a $\mathcal{G} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x^2, z) = c,\ y = 0 \}$ alakzatot, ahol $c \in \mathbb{R}$ rögzített. Forgassuk meg a síkbeli $\mathcal{G}$ alakzatot a z koordinátatengely körül. Igazoljuk, hogy a kapott alakzat megegyezik az $M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x^2 + y^2, z) = c \}$ ponthalmazzal.

3) Az $y = 0$ koordinátasíkban tekintsük az $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} - 1 = 0$ egyenlettel leírt hiperbolát. Forgassuk meg a hiperbolát előbb a z koordinátatengely körül, majd pedig az x tengely körül. Adjuk meg az így nyert forgásfelületek (a hiperboloidok) egyenletét.

4) Az $\mathbb{R}^3$ térben milyen alakzatot ír le a $9\,x^2 + 9\,y^2 - z^2 = 0$ másodfokú egyenlet?

5) Vegyük az $(x - a)^2 + z^2 - b^2 = 0$ és $y = 0$ egyenletekkel leírt kört, ahol $a > b > 0$. Ezen körnek a z koordinátatengely körüli forgatásával egy tóruszt kapunk, amely egy negyedrendű felület. Határozzuk meg a tórusz egyik leíró egyenletét.

6) Adjuk meg a $3x - 5y + 2z - 16 = 0$ egyenletű síknak egy paraméteres előállítását, azaz írjuk le egy C^∞–osztályú $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vektorfüggvénnyel.

7) Tekintsük a $\boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ paraméterezett görbéket, ahol $\boldsymbol{\gamma}(u) = u\,\mathbf{e}_1 + u^2/a^2\,\mathbf{e}_3$ és $\boldsymbol{\sigma}(v) = v\,\mathbf{e}_2 - v^2/b^2\,\mathbf{e}_3$ $(u,\ v \in \mathbb{R})$ teljesül rögzített $a,\ b$ pozitív számok mellett. Világos, hogy mindkét görbe pályája parabola. A $\boldsymbol{\gamma}(\mathbb{R})$ pályához tartozó $\mathbb{R}^3$-beli vektorokkal toljuk el a $\boldsymbol{\sigma}$-nak megfelelő parabolát és adjuk meg az így nyert sima felületnek *(az úgynevezett hiperbolikus paraboloidnak)* egy paraméteres előállítását és a térbeli koordinákra vonatkozó másodfokú egyenletét.

8) Az előző feladatban szereplő hiperbolikus paraboloidnak adjuk meg egy olyan paraméterezését, amelynél az első és a második paramétervonalak egyaránt egyenesek. *(Keressünk olyan $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ paraméteres előállítást a felülethez, ahol a $\boldsymbol{\gamma}_1(t) = \mathbf{r}(t,v)$ és $\boldsymbol{\gamma}_2(t) = \mathbf{r}(u,t)$ összefüggésekkel leírt paramétervonalak egyenesek.)*

9)* Az $\mathbb{R}^3$ térben adva van egy g egyenes a $\boldsymbol{\gamma}(t) = a\,\mathbf{e}_1 + v_2\,t\,\mathbf{e}_2 + v_3\,t\,\mathbf{e}_3$ $(t \in \mathbb{R})$ paraméterezéssel, amelyben a konstansokra fennáll $a > 0$ és $v_2\,v_3 \neq 0$. Forgasssuk meg ezt a $g = \boldsymbol{\gamma}(\mathbb{R})$ egyenest a z koordinátatengely körül. Bizonyítsuk be, hogy a forgatással nyert felület egy hiperboloid.

Differenciálgeometria és nemeuklideszi geometriák c. gyakorlat
matematikatanári szak (2023/24–es tanév, 1. félév)
6. feladatsor (Felületek érintősíkjai. Sima felületek leírása egyenlettel.)

1) Tekintsük az $\mathbf{r}(u,v) = \sin(u-1)\,\mathbf{e}_1 - 2\,\exp(1+v)\,\mathbf{e}_2 + (u^3 - 2\,v^3)\,\mathbf{e}_3$ egyenlettel megadott $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt és az általa leírt sima elemi felületet. Ezen felület $\mathbf{p} = (0,-2,3)$ pontjában határozzuk meg az érintősík egyenletét és a felületi normális irányát megadó egységvektort.

2) Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ térben az $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{36} = 1$ egyenletű ellipszoidot. Adjuk meg az ellipszoid $\mathbf{p} = (p_1, 1, 3)$ $(p_1 < 0)$ pontjában az érintősík egyenletét.

3) Mutassuk meg, hogy a $2\,z^3 - x\,y^2 = 12$ egyenlet egy sima felületet ír le az $\mathbb{R}^3$ euklideszi térben. Határozzuk meg a felület $\mathbf{p} = (1,-2,p_3)$ pontbeli érintősíkjának az egyenletét.

4) Az $\mathbb{R}^3$ euklideszi térben vegyük az $\ln(x^2 + y^2 - 1) + xz - yz = 6$ egyenlettel leírt M alakzatot. Igazoljuk, hogy M egy sima felületet. Határozzuk meg a felület $\mathbf{p} = (1,-1,p_3)$ pontjában a felületi normális egyenest (illetve annak paraméteres egyenletrendszerét).

5) Az $\mathbb{R}^2$–beli $D = (0,\infty) \times (0,\infty)$ tartományon tekintsük azt az $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt, ahol $\mathbf{r}(u,v) = (u^2+v^2)\,\mathbf{e}_1 + (uv - 2v)\,\mathbf{e}_2 + (u^2 - v^2)\,\mathbf{e}_3$. Adjuk meg az $\mathbf{r}(D)$ sima elemi felületnek azt a pontját, amelyben az érintősík párhuzamos a $3x - 8y + 5z = 0$ egyenletű síkkal.

6) Az I nyílt intervallumon legyen adva egy olyan $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ sima leképezés, amely egy egyszerű görbét ad az $\mathbb{R}^3$ tér egy S síkjában. Vegyünk egy olyan $\mathbf{a}$ vektort, amely nem párhuzamos ezen S síkkal. A $D = I \times \mathbb{R}$ tartományon tekintsük az $\mathbf{r}(u,v) = \boldsymbol{\gamma}(u) + v\,\mathbf{a}$ egyenlettel értelmezett $\mathbf{r}$ vektorfüggvényt. Az általa leírt $M = \mathbf{r}(D)$ elemi felületet *egy általános hengerfelületnek* mondjuk. Mutassuk meg, hogy ezen hengerfelület bármely alkotóegyenese mentén az érintősík állandó.

7) Vegyük az $\mathbf{r}(u,v) = u\,\mathbf{e}_1 + v\,\mathbf{e}_2 + (u^2+v^2)\,\mathbf{e}_3$ $(u,\ v \in \mathbb{R})$ vektorfüggvény által leírt sima elemi felületet, amely egy forgásparaboloid. Adjuk meg az $\mathbf{r}$ paraméterezéshez tartozó $\mathbf{N} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ normális egységvektormezőt, továbbá a felület $\mathbf{p} = (2,-1,p_3)$ pontjában az érintősík egyenletét.

8) Tekintsük az előző feladatban szereplő forgásparaboloidot. Tegyük fel, hogy a z tengely irányából egy párhuzamos fénynyaláb éri el a felületet. A tér melyik pontjába fókuszálódnak a felületen visszaverődő fénysugarak? *(Vajon miről kapta nevét a parabolaantenna?)*

9)* Tekintsük $\mathbb{R}^3$-ban az $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$ egyenlettel leírt a sugarú gömbfelületet. Amennyiben ebből elhagyjuk az $\mathbf{n} = (0,0,2a)$ pontot, akkor az M elemi felülethez jutunk. Az $\mathbf{n}$ pontot vetítési középpontnak használva centrálisan vetítsük le M-t a $z = 0$ egyenletű síkra. Határozzuk meg az M-nek azt az $\mathbf{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ paraméteres előállítását, amelyet a fent leírt sztereografikus projekcióval nyerünk.

Differenciálgeometria és nemeuklideszi geometriák c. gyakorlat

matematikatanári szak (2023/24–es tanév, 1. félév)

7. feladatsor (A felületdarab felszínének meghatározása.)

Adva van egy olyan $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ vektorfüggvény, amely egy sima elemi felületet ír le. Legyen $B = [a, b] \times [c, d]$ egy olyan tégla az $\mathbb{R}^2$–ben, amelyet a D paramétertartomány tartalmaz. Ekkor az $\mathbf{r}(B)$ felületdarab felszínét az $F(\mathbf{r}(B)) = \int\int_B \sqrt{det\, \mathbf{G}(u, v)}\, du\, dv$ integrál adja meg, ahol $det\, \mathbf{G}(u, v)$ az első főmennyiségekből képzett $\mathbf{G}(u, v)$ szimmetrikus mátrix determinánsát jelöli. A felületdarab felszíne az

$$F(\mathbf{r}(B)) = \int_c^d \Big(\int_a^b \sqrt{det\, \mathbf{G}(u, v)}\, du\Big) dv = \int_a^b \Big(\int_c^d \sqrt{det\, \mathbf{G}(u, v)}\, dv\Big) du$$

összefüggés szerint kétszeri integrálással számolható ki, tehát az integrálás során tehát kétszer kell alkalmazni a Newton–Leibniz-formulát.

1) Tekintsük az $\mathbb{R}^2$–beli $D = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ tartományon értelmezett $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt, amelyet az $\mathbf{r}(u, v) = u\, \mathbf{e}_1 + v\, \mathbf{e}_2 + \dfrac{u^2}{2v}\, \mathbf{e}_3$ egyenlet ír le. Vegyük az $M = \mathbf{r}(D)$ elemi felületet, amely rajta van egy másodrendű felületen. Határozzuk meg annak az $\mathbf{r}(B)$ kompakt felületdarabnak a felszínét, ahol $B = [0, 1] \times [1, 2]$.

2) Adva van a $\boldsymbol{\gamma}(u) = \cos u\, \mathbf{e}_1 + \sin u\, \mathbf{e}_2 + u\, \mathbf{e}_3$ $(u \in \mathbb{R})$ kifejezéssel leírt $\boldsymbol{\gamma}$ csavarvonal. Vegyük az $\mathbf{r}(u, v) = \boldsymbol{\gamma}(u) + v\, \boldsymbol{\gamma}'(u)$ összefüggéssel meghatározott $\mathbf{r} : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt. Az $\mathbf{r}$ azon sima elemi felület paraméterezése, amelyet a csavarvonal érintőegyeneseiből nyerünk. Határozzuk meg a $B = [0, 2\pi] \times [1, 3]$ tartománynak megfelelő $\mathbf{r}(B)$ kompakt felületdarab felszínét.

3) Vegyük azt az $\mathbf{r} : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$ vektorfüggvényt, ahol bármely $u \in (0, \infty)$ és $v \in (0, 2\pi)$ esetén fennáll $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\, \mathbf{e}_1 + 2u \sin v\, \mathbf{e}_2 + u^2\, \mathbf{e}_3$. Az $\mathbf{r}$ által leírt sima elemi felületen tekintsük a $B = \{\, (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le u \le 3,\ \frac{\pi}{2} \le v \le \frac{3\pi}{2} \,\}$ téglalap-tartománynak megfelelő felületdarabot. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(B)$ kompakt felületdarab felszínét $(F(\mathbf{r}(B)) = ?)$.

4) Adva van egy $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ akárhányszor differenciálható függvény, amelyre fennáll $f(x) > 0$ bármely $x \in (a, b)$ esetén. Ha ennek grafikonját az x tengely körül megforgatjuk, egy forgásfelületet nyerünk, melyet az $\mathbf{r}(u, v) = u\, \mathbf{e}_1 + f(u)(\cos v\, \mathbf{e}_2 + \sin v\, \mathbf{e}_3)$ összefüggéssel meghatározott vektorfüggvény ír le $(u \in [a, b],\ v \in [0, 2\pi])$. Igazoljuk, hogy ezen forgásfelület felszínére fennáll az
$F = 2\,\pi \cdot \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ összefüggés.

5) Az előző feladat alapján igazoljuk, hogy a ϱ sugarú gömbön vett h magasságú gömböv (vagy gömbsüveg) felszíne $F = 2\,\pi \varrho\, h$.

6) Vegyük $\mathbb{R}^3$-ban az $y = 0$ és $(x - a)^2 + z^2 - b^2 = 0$ $(a > b > 0)$ egyenletekkel leírt kört és forgassuk meg a z tengely körül. Határozzuk meg az így nyert körgyűrűfelület (más néven a tórusz) felszínét.