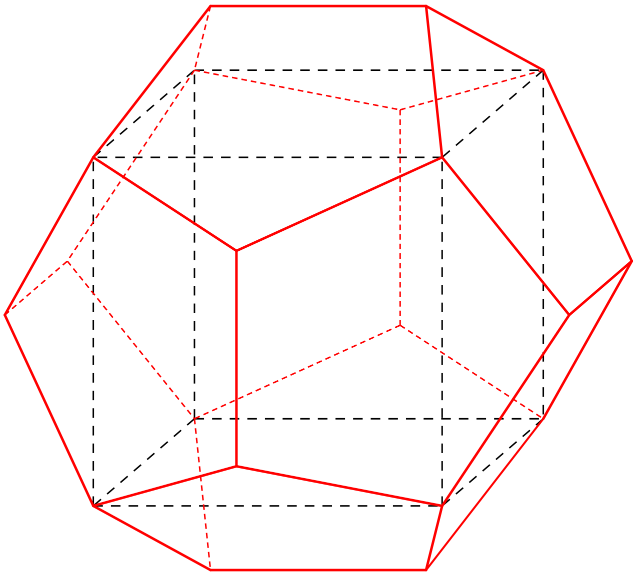
Bevezetés a geometriába

előadásjegyzet

matematikatanári szakos hallgatóknak



Verhóczki László

ELTE TTK Matematikai Intézet

Geometriai Tanszék

2021

Előszó

A geometria a legrégebbi matematikai tudomány, amelynek keretei már az ókorban kialakultak. Az ókori társadalmakban a mezőgazdasági termelés megszervezéséhez szükségessé vált a földterületek nagyságának jellemzése, vagyis a földmérés. Emellett az építészetben, a képzőművészetben és a kézművességben fellépő gyakorlati problémák is igényelték a különféle térbeli alakzatok tulajdonságainak vizsgálatát, ami egy matematikai elmélet, a geometria kialakulásához vezetett. *A geometria szó egyébként görög eredetű, magyarra fordítva földmérést jelent.*

A köznapi szóhasználatban azt szokták mondani, hogy a geometria a térbeli alakzatok (ponthalmazok) tulajdonságaival foglalkozó tudomány. A geometriát művelői sokáig úgy tekintették, mint a bennünket körülvevő fizikai tér jól meghatározott tulajdonságait leíró elméletet, melynek összefüggéseit (állításait) a tapasztalat révén ellenőrizni lehet. Az ókori görög matematikusok jöttek rá arra, hogy a geometria egyes összefüggéseit, állításait logikai úton le lehet vezetni korábbi összefüggésekből. Az ilyen logikai úton történő levezetést nevezik bizonyításnak.

Az emberiség történetében az első tudományos igényű elmélet kidolgozójának a görög Euklidészt tekintik, aki az i.e. 300 körül írt *Elemek* című művében az akkori geometriai ismereteknek egy rendszeres összefoglalását adta meg. Euklidész felismerte, hogy nem lehet minden állítást levezetni korábbi állításokból. Az elinduláshoz szükség van "alapkövekre", vagyis olyan állításokra, melyeket bizonyítás nélkül elfogadunk. Ezeket az elmélet alapjául szolgáló állításokat nevezzük axiómáknak. Az Euklidész által megadott axiómákon alapuló matematikai elméletet nevezik *euklideszi geometriának*.

Az ókorban és a középkorban a geometriai vizsgálatok során főként szintetikus (más szóval elemi) eszközöket használtak. A geometriai tárgyalások számára egy új és igen hatékony módszert adott R. Descartes francia filozófus és matematikus, aki az 1637-ben kiadott *Geometria* című könyvében már alkalmazta a síkbeli koordináta-rendszert, ami lehetővé tette a speciális síkbeli alakzatok egyenletekkel történő leírását. Ez vezetett az *analitikus geometria* kialakulásához, amely a geometriai problémák tárgyalásához az algebra és az analízis eszközeit is felhasználja.

A Bevezetés a geometriába c. jegyzet témája

A jegyzet az ELTE matematikatanári szakos hallgatóinak tartott Bevezetés a geometriába c. előadáshoz készült a 2020/2021-es tanév 2. félévében. Ebben az euklideszi geometria alapvető fogalmainak, összefüggéseinek és tételeinek tárgyalására kerül sor. Nem célunk az euklideszi geometria axiomatikus felépítése, hiszen az sokkal több időt igényelne. Azonban célszerűnek tartjuk olykor megadni azokat az alapigazságokat (vagy más szóval axiómákat), amelyek kulcsszerepet játszanak az euklideszi geometria egzakt felépítésében.

Tárgyalásunk során főként szintetikus eszközöket fogunk alkalmazni, vagyis nem használunk síkbeli és térbeli koordináta-rendszereket. A tárgyalás elején bizonyítás nélkül is kimondunk majd olyan állításokat, amelyek a szemlélettel teljes összhangban állnak és amelyeket később alkalmazni fogunk. Megjegyezzük, hogy ezen kézenfekvőnek látszó kijelentések, összefüggések igazolásához olykor hosszadalmas vizsgálatokra lenne szükség.

1) Az euklideszi geometria alapvető fogalmai és összefüggései

Pontok, egyenesek és síkok illeszkedése

A teret egy X halmazként értelmezzük, melynek elemeit pontoknak nevezzük. Az X tér részhalmazait ponthalmazoknak vagy alakzatoknak mondjuk. A ponthalmazok között vannak kitüntetett alakzatok, amelyeket egyenesnek vagy síknak nevezünk. A pontokat, az egyeneseket és a síkokat együttesen térelemeknek is szokás nevezni, de jelen tárgyalásban az egyenesek és a síkok valójában az X tér (vagy más szóval az X halmaz) speciális részhalmazai. A pontokat latin nagybetűkkel (például $A,\ B,\ C,\ P$), az egyeneseket latin kisbetűkkel (például $a,\ b,\ e,\ g$), a síkokat pedig görög betűkkel (például $\varrho,\ \sigma$) fogjuk jelölni.

A pontok, egyenesek és síkok illeszkedését a tartalmazás alapján értelmezzük. Azt mondjuk, hogy egy A pont illeszkedik egy e egyeneshez, ha A eleme az e alakzatnak, vagyis ha fennáll $A \in e$. Egy B pontról azt mondjuk, hogy az illeszkedik egy ϱ síkhoz, ha B az egyik eleme ϱ-nak. Egy g egyenesről azt mondjuk, hogy az illeszkedik egy σ síkhoz, ha g egy részhalmaza a σ ponthalmaznak.

A térelemek illeszkedésével kapcsolatosan az alábbi kifejezéseket is használni fogjuk. Ha egy A pont illeszkedik egy e egyeneshez, akkor azt is mondjuk, hogy az e egyenes illeszkedik az A ponthoz, illetve az e egyenes áthalad (átmegy) az A ponton. Analóg módon, ha egy B pont eleme egy ϱ síknak, akkor azt is mondjuk, hogy a ϱ sík illeszkedik a B ponthoz. A $g \subset \sigma$ feltétel teljesülése esetén azt is mondjuk, hogy a σ sík illeszkedik a g egyeneshez, illetve a σ sík tartalmazza a g egyenest.

Ha valamely $\mathcal{B},\ \mathcal{D}$ $(\mathcal{B},\ \mathcal{D} \subset X)$ ponthalmazokat véve $\mathcal{B}$ egy részhalmaza $\mathcal{D}$–nek (azaz $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ teljesül), akkor azt mondjuk, hogy a $\mathcal{B}$ alakzat benne van $\mathcal{D}$–ben, illetve a $\mathcal{D}$ alakzat tartalmazza $\mathcal{B}$–t.

Tekintsünk az X térben véges sok pontot. Ezen pontokat kollineárisaknak (illetve *komplanárisaknak*) mondjuk, ha van olyan egyenes (illetve *ha van olyan sík*), amely az adott pontok mindegyikét tartalmazza.

Az előbbi értelmezés szerint véges sok pontról akkor mondjuk, hogy azok komplanárisak (illetve *kollineárisak*), ha van olyan sík (illetve *ha van olyan egyenes*), amelyhez a pontok mindegyike illeszkedik.

A továbbiakban ha n számú pontról (egyenesről vagy síkról) szólunk, akkor ezen n számú különböző pontot (egyenest vagy síkot) értünk.

A szemlételnek megfelelően a továbbiakban feltesszük, hogy a térelemek illeszkedésre vonatkozóan teljesülnek az alábbi alapigazságok:

(IA 1) *Van a térnek négy olyan pontja, melyeket egyetlen sík vagy egyenes sem tartalmaz.*

(IA 2) *Bármely két ponthoz egy és csakis egy egyenes illeszkedik.*

(IA 3) *Tetszőleges egyeneshez illeszkedik legalább két pont.*

(IA 4) *Bármely három nem kollineáris ponthoz egy és csakis egy sík illeszkedik.*

(IA 5) *Bármely síkhoz illeszkedik három nem kollineáris pont.*

(IA 6) *Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkhoz, akkor a sík tartalmazza az egyenest.*

(IA 7) *Ha két síknak van egy közös pontja, akkor a két síknak van még egy közös pontja.*

Ha A és B különböző pontok, jelölje $\langle A, B \rangle$ azt az egyenest, amely az A–n és a B–n egyaránt áthalad. Amennyiben A, B, C nem kollineáris pontok, jelölje $\langle A, B, C \rangle$ azt a síkot, amelyhez mindhárom pont illeszkedik. Ha az A pont nem illeszkedik az e egyeneshez, jelölje $\langle e, A \rangle$ azt a síkot, amely tartalmazza az A pontot és az e egyenest.

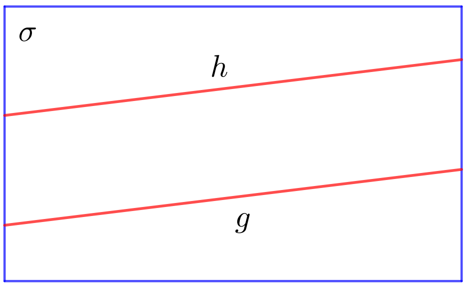
Az egyenesek és síkok kölcsönös helyzetének értelmezése

Az alábbi definíciók szerint kölcsönös helyzete alapján két egyenest mondhatunk metsző-nek, kitérőnek vagy párhuzamosnak.
1.1. Definíció. Két egyenest metszőnek mondunk, ha van egy közös pontjuk.

Megjegyzés. Az (IA 1)–(IA 7) kijelentésekből következik, hogy amennyiben két síknak van egy közös pontja, akkor a metszetük egy egyenes. Adódik az is, hogy amennyiben adva van két metsző egyenes, akkor pontosan egy olyan sík van, amelyhez mindkét egyenes illeszkedik.

1.2. Definíció. Két egyenest kitérő helyzetűnek (vagy rövidebben kitérőnek) nevezünk, ha nincs olyan sík, amely mindkét egyenest tartalmazza.

1.3. Definíció. Két egyenest egymással párhuzamosnak mondunk, ha nincs közös pontjuk és van olyan olyan sík, amely mindkét egyenest tartalmazza.



1. ábra. *Két egymással párhuzamos egyenes egy σ síkban* ($g \cap h = \emptyset$).

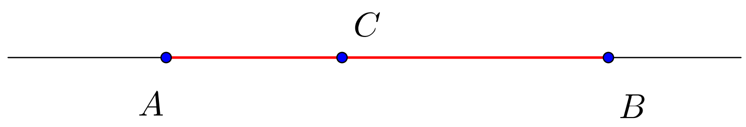
Ha egy síkot és egy egyenest, avagy két síkot veszünk, akkor a kölcsönös helyzetüket az határozza meg, hogy van-e közös pontjuk.
1.4. Definíció. Tekintsünk egy síkot és egy egyenest, amely nincs rajta a síkon. Ezeket egymást metszőnek (illetve metsző helyzetűnek) mondjuk, ha van egy közös pontjuk.
Amennyiben a síknak és az egyenesnek nincs közös pontja, akkor azokat egymással párhuzamosnak nevezzük.

1.5. Definíció. Két síkot egymást metszőnek nevezünk, ha van közös pontjuk. Amennyiben két síknak nincs közös pontja, akkor a két síkot egymással párhuzamosnak mondjuk.

A szakasz, a félegyenes, a félsík és a féltér értelmezése

Emlékezzünk rá, hogy az A, B pontokon áthaladó egyenest jegyzetünkben az $\langle A, B\rangle$ szimbólummal jelöljük. Kollineáris ponthármason három olyan egymástól különböző pontot értünk, amelyeket tartalmaz egy egyenes.

A továbbiakban feltesszük, hogy a kollineáris ponthármasok esetében értelmezve van a *közöttük van kapcsolat*, amely megadja, hogy a három pont közül melyik van a másik kettő között.



2. ábra. *Az A, B pontok között lévő (azokat elválasztó) C pont.*

Megjegyzés. Amennyiben az egymástól különböző A, B, C pontok kollineárisak és C az A, B pontok között van, akkor erre azt is mondjuk majd, hogy C elválasztja egymástól az A, B pontokat.

Ez alapján értelmezzük a szakasz és a félegyenes fogalmát.

1.6. Definíció. Legyenek A és B különböző pontok. Az A és B végpontokkal meghatározott $\overline{AB}$ szakaszon azt az alakzatot értjük, amelyet az A, B pontok és az $\langle A, B\rangle$ egyenes azon pontjai alkotnak, amelyek A és B között vannak.

Megjegyzés. A fenti definíciót kimondhattuk volna úgy is, hogy az A és B végpontokkal meghatározott szakaszon az

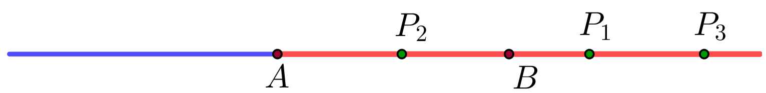
$\overline{AB} = \{\ P \in \langle A, B\rangle \mid\ P \text{ az } A,\ B \text{ pontok között van }\} \cup \{\ A,\ B\ \}$

formulával leírt alakzatot értjük.

Megjegyzés. Evidens, hogy bármely A, $B \in X$ pontok esetén fennáll $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Az A, B pontokat az $\overline{AB}$ szakasz határpontjainak is mondjuk. Az $\overline{AB}$ szakasznak a határpontoktól különböző pontjait a szakasz belső pontjainak nevezzük.

Megjegyzés. Amennyiben a két végpont megegyezik (azaz fennáll $A = B$), akkor a fenti definícióval nyert $\overline{AA} = \{A\}$ alakzatot pontszakasznak mondjuk. A pontszakasznak nincs belső pontja.



3. ábra. *Az A kezdőpontú és a B–t tartalmazó $[\,A, B\,\rangle$ félegyenes pontjai.*

1.7. Definíció. Legyenek adva az egymástól különböző A, B pontok. Az A kezdőpontú és a B pontot tartalmazó $[A, B\rangle$ félegyenesen azt az alakzatot értjük, amelyet az $\langle A, B\rangle$ egyenes azon pontjai alkotnak, amelyeket az A pont nem választ el a B ponttól.

Megjegyzés. A definíció szerint az A kezdőpontú és a B-t tartalmazó félegyenesen az $[A, B\rangle = \{\ P \in \langle A, B\rangle \mid\ A \textit{ nincs a } B,\ P \textit{ pontok között}\ \}$ alakzatot értjük. Lásd a 3. ábrát.

Világos, hogy az A kezdőpont a félegyenes egy kitüntetett pontja. Ha ezt az $[A, B\rangle$ alakzatból elhagyjuk, akkor az így nyert ponthalmazt nyílt félegyenesnek mondjuk.

A szakasz fogalma alapján definiálni lehet a háromszögvonalat is.

1.8. Definíció. Legyen adva három nem kollineáris pont A, B és C. Az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ és $\overline{CA}$ szakaszok uniójaként nyert alakzatot az A, B, C csúcspontokkal meghatározott háromszögvonalnak (vagy rövidebben csak háromszögnek) nevezzük.

Megjegyzés. Egyelőre csak a háromszögvonal fogalmát vezettük be, mint a három csúcspont által meghatározott három szakasz unióját. Az A, B, C csúcsokkal meghatározott háromszögvonalat a továbbiakban $ABC\triangle$ jelöli.

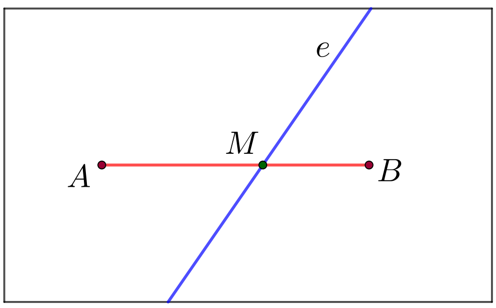
Az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ szakaszokat a háromszög oldalainak mondjuk. Az A, B, C pontokat egyaránt tartalmazó síkot a háromszög síkjának nevezzük.

A félsík és a féltér

Emlékezzünk rá, hogy egy szakasznak a végpontoktól különböző pontjait nevezzük a szakasz belső pontjainak. Egy e egyenesről (illetve egy σ síkról) akkor mondjuk, hogy metszi az $\overline{AB}$ $(A \neq B)$ szakaszt, ha az e–nek (illetve a σ–nak) pontosan egy közös pontja van az $\overline{AB}$ szakasszal.

A továbbiakban a félsík és a féltér fogalmának bevezetésére kerül sor. Mint látni fogjuk, a félsíkot a határegyenese és egy további pontja, a félteret pedig a határsíkja és egy további pontja által lehet definiálni.

1.9. Definíció. Legyenek adva az A, B pontok és egy e egyenes. Azt mondjuk, hogy az e egyenes elválasztja az A, B pontokat, ha az e egy belső pontjában metszi az $\overline{AB}$ szakaszt.



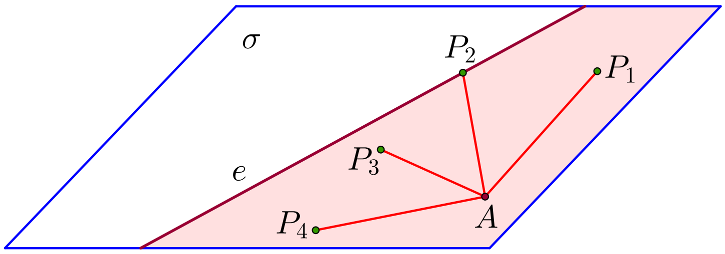
4. ábra. *Az A, B pontokat elválasztó e egyenes* $(e \cap \overline{AB} = M)$.

Megjegyzés. Mivel az $\overline{AA} = \{A\}$ pontszakasznak nincs belső pontja, bármely A pontra fennáll, hogy egyetlen egyenes sem választja el önmagától.

1.10. Definíció. Legyen adott egy e egyenes és egy arra nem illeszkedő A pont. Az e–t és az A–t tartalmazó síkot jelölje σ. Az e egyenessel határolt és az A pontot tartalmazó félsíkon az

$$[\,e, A\,\rangle = \{\, P \in \sigma \mid e \text{ nem választja el az } A,\ P \text{ pontokat}\,\}$$

alakzatot értjük.



5. ábra. *Az e egyenessel határolt A pontot tartalmazó félsík pontjai.*

Megjegyzés. A fenti definíció szerint az $[\,e, A\,\rangle$ félsíkot a $\sigma = \langle e, A\rangle$ sík azon pontjai alkotják, amelyeket az e egyenes nem választ el az A ponttól. Nyilvánvaló, hogy az $[\,e, A\,\rangle$ félsík az A pont mellett az e határegyenest is tartalmazza.

Amennyiben B az $[\,e, A\,\rangle$ félsík egy olyan pontja, amely nincs az e határegyenesen, akkor fennáll $[\,e, A\,\rangle = [\,e, B\,\rangle$.

Megjegyzés. Tekintsünk egy σ síkot és abban egy e egyenest. Pontosan két olyan félsík van, amelyeket a σ tartalmaz és amelyeknek e a határegyenese. Ezen két félsíknak az uniója a σ sík, metszetük pedig az e egyenes.

Megjegyzés. Ha a félsíkból kivonjuk (más szóval elhagyjuk) annak határegyenesét, akkor az így nyert ponthalmazt nyílt félsíknak mondjuk.

Amennyiben egy síknak és egy szakasznak egyetlen közös pontja van, akkor azt mondjuk, hogy a sík metszi a szakaszt.

1.11. Definíció. Azt mondjuk, hogy a σ sík elválasztja az A, B $(A,\ B \in X)$ pontokat, ha a σ sík egy belső pontjában metszi az $\overline{AB}$ szakaszt.

1.12. Definíció. Legyen adott egy σ sík és egy arra nem illeszkedő A pont. A σ síkkal határolt és az A pontot tartalmazó féltéren a

$$[\,\sigma, A\,\rangle = \{\, P \in X \mid \sigma \text{ nem választja el az } A,\ P \text{ pontokat}\,\}$$

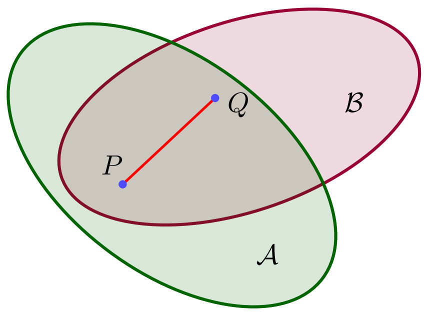
alakzatot értjük.

Megjegyzés. A $[\,\sigma, A\,\rangle$ féltér az A pontot és a σ síkot is tartalmazza. Ha B a $[\,\sigma, A\,\rangle$ féltér egy olyan pontja, amely nem illeszkedik a σ határsíkra, akkor fennáll $[\,\sigma, A\,\rangle = [\,\sigma, B\,\rangle$.

Megjegyzés. Ha tekintünk a térben egy σ síkot, akkor pontosan két olyan féltér van, amelyeknek σ a határsíkja. Ezen félterek uniója az X tér, a metszetük pedig azonos a σ síkkal.

A konvex alakzatok

A konvex szögtartomány értelmezése előtt tekintsük a konvex alakzat fogalmát.
1.13. Definíció. Egy $\mathcal{A}$ ponthalmazt konvexnek mondunk, ha teszőleges $P,\ Q \in \mathcal{A}$ pontok esetén a $\overline{PQ}$ szakaszt tartalmazza az $\mathcal{A}$ alakzat (vagyis $\overline{PQ} \subset \mathcal{A}$ teljesül).



6. ábra. *Két konvex alakzat metszete is egy konvex ponthalmaz.*

Megjegyzés. A fenti definíció szerint egy alakzat akkor konvex, ha tartalmazza bármely két pontjának az összekötő szakaszát.

Az $\emptyset$ üres halmaz egy konvex alakzat, mivel teljesül rá a definícióban szereplő feltétel. A szakaszok, a félegyenesek, a félsíkok és a félterek egyaránt konvex alakzatok.

Könnyen igazolni lehet az alábbi kijelentést, amely konvex ponthalmazok metszetére (más szóval közös részére) vonatkozik.
1.14. Állítás. *Konvex alakzatoknak a metszete is egy konvex alakzat.*

Szögvonal, szögtartomány

1.15. Definíció. Szögvonalon két közös kezdőpontú félegyenes unióját értjük.

Legyenek adva az $O,\ A,\ B\ \ (O \neq A,\ O \neq B)$ pontok, és tekintsük az $AOB\angle = [O, A\rangle \cup [O, B\rangle$ szögvonalat. Az $[O, A\rangle$ és $[O, B\rangle$ félegyeneseket ezen szögvonal szárainak, az O pontot pedig a szögvonal csúcspontjának nevezzük.

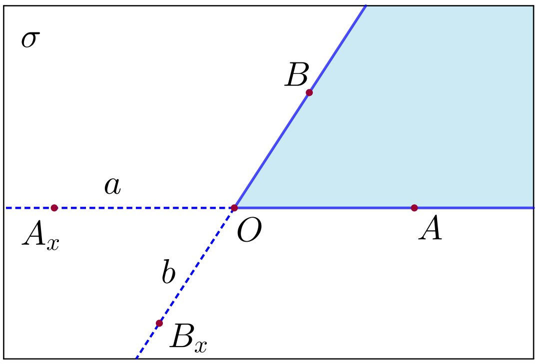
Megjegyzés. Amennyiben az $O,\ A,\ B$ pontok nem kollineárisak, akkor azt mondjuk, hogy az $AOB\angle$ szögvonal nem elfajuló. Ekkor az $O,\ A,\ B$ pontokhoz egyaránt illeszkedő síkot a szögvonal síkjának nevezzük.

Az $AOB\angle$ szögvonalat elfajulónak mondjuk, ha az $O,\ A,\ B$ pontok kollineárisak. Az elfajuló szögvonalat egyenesszögnek nevezzük, ha az O pont az $A,\ B$ pontok között van. Amennyiben fennáll $[O, A\rangle = [O, B\rangle$, akkor a szögvonalat szárszögnek (vagy nullszögnek) mondjuk.

Vegyük észre, hogy az 1.14. Állítás szerint két félsík metszete minden esetben egy konvex alakzat.

1.16. Definíció. Legyen adva az O, A, B nem kollineáris pontokkal meghatározott $AOB\angle$ szögvonal. Tekintsük a szárakat tartalmazó $a = \langle O, A \rangle$ és $b = \langle O, B \rangle$ egyeneseket. Az $[a, B\rangle$ és $[b, A\rangle$ félsíkok metszetét a szögvonalhoz tartozó konvex szögtartománynak (vagy rövidebben szögnek) nevezzük.

Az $AOB\angle$ szögvonalhoz tartozó konvex szögtartományt az $AOB\sphericalangle$ szimbólummal jelöljük. A definíció alapján fennáll $AOB\sphericalangle = [a, B\rangle \cap [b, A\rangle$.



7. ábra. *Az $AOB\sphericalangle$ konvex szögtartomány.*

1.17. Definíció. Legyen adva egy nem elfajuló $AOB\angle$ szögvonal. Legyenek A_x és B_x a száregyenesek olyan pontjai, melyeket az O csúcs elválaszt az A, B pontoktól. Az $[a, B_x\rangle$ és $[b, A_x\rangle$ félsíkok unióját az $AOB\angle$ szögvonalhoz tartozó konkáv szögtartománynak mondjuk.

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy a nem elfajuló szögvonalhoz tartozó két szögtartomány uniója megegyezik a szögvonal síkjával, metszetük pedig azonos a szögvonallal.

A szögtartománynak a szárak által nem tartalmazott pontjait a szögtartomány belső pontjainak mondjuk.

A távolságfüggvény bevezetése

A szokásoknak megfelelően jelölje $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát. Mint ismeretes, a tér pontjainak halmazát X jelöli. Tekintsük az X halmaz önmagával vett
$X \times X = \{(A, B) \mid A,\ B \in X\}$ Descartes-szorzatát.

A továbbiakban feltesszük, hogy adva van egy olyan $d : X \times X \to \mathbb{R}$ valós függvény, amelyet távolságfüggvénynek mondunk és amelyre teljesülnek a következők:
(1) Tetszőleges A, $B \in X$ pontok esetén teljesülnek a $d(A, B) \geq 0$ és $d(A, B) = d(B, A)$ összefüggések.
(2) Ha egy C pont rajta van az $\overline{AB}$ szakaszon, akkor fennáll a
$d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$ egyenlőség.

(3) Ha adva van egy $[A, B\rangle$ félegyenes és egy λ nemnegatív valós szám, akkor az $[A, B\rangle$ félegyenesen pontosan egy olyan P pont van, amelyre teljesül $d(A, P) = \lambda$.

Megjegyzés. A d távolságfüggvény fenti tulajdonságaiból már következik, hogy $d(A, B) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $A = B$.

Legyen adott egy $\langle A, B\rangle$ egyenes és annak egy C pontja. Világos, hogy a C pont az A, B pontok között van akkor és csak akkor, ha $C \neq A$, $C \neq B$ és a d távolságfüggvénnyel fennáll $d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$.

1.18. Definíció. Az X tér A, B pontjainak távolságán a $d(A, B)$ nemnegatív valós számot értjük.

1.19. Definíció. Egy $\overline{AB}$ szakasz hosszán a végpontok távolságát, azaz a $d(A, B)$ pozitív számot, értjük. A szakasz hosszára az AB jelölést is alkalmazzuk.

Az alábbi állítás könnyen igazolható, és a bizonyítására emiatt nem térünk ki.

1.20. Állítás. *Legyen adva egy c ($c \neq 1$) pozitív valós szám. Tekintsük azt a $\hat{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ valós függvényt, amelyre fennáll $\hat{d}(P, Q) = c \cdot d(P, Q)$ tetszőleges P, $Q \in X$ pontok esetén. Ekkor a $\hat{d}$ függvényre ugyancsak teljesülnek a fenti (1), (2), (3) kijelentések.*

1.21. Definíció. A fenti állításban szereplő $\hat{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ függvényt a megadott d távolságfüggvény egyik átskálázásának mondjuk. A c pozitív számot az átskálázás arányszámának nevezzük.

Megjegyzés. A jegyzetben leírt összes állítás és összefüggés érvényben marad akkor is, ha az eredetileg megadott d függvény helyett annak egy $\hat{d}$ átskálázását alkalmazzuk távolságfüggvényként.

Az átskálázás módszerével mindig elérhető, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott szakasz hossza 1 legyen.

A kör és a gömb értelmezése

A távolságfogalom alapján lehetőségünk nyílik további fogalmak definiálására.

1.22. Definíció. Tekintsünk egy σ síkot, abban egy O pontot és egy r pozitív valós számot. Az O középponttal és r sugárral meghatározott σ síkbeli körön (vagy más szóval körvonalon) a $k_\sigma(O, r) = \{\ P \in \sigma \mid OP = r\ \}$ formulával leírt alakzatot értjük.

Megjegyzés. Másképp fogalmazva, a $k_\sigma(O, r)$ körvonal a σ sík azon pontjainak halmaza, amelyek az O ponttól r távolságra vannak.

1.23. Definíció. Legyen adott a térben egy O pontot és egy r pozitív valós szám. Az O középponttal és az r sugárral meghatározott gömbön (vagy más szóval gömbfelületen) a $\mathcal{G}(O, r) = \{\ P \in X \mid d(O, P) = r\ \}$ kifejezéssel leírt alakzatot értjük.

Az egybevágósági transzformációk

A $d : X \times X \to \mathbb{R}$ távolságfüggvény bevezetését követően már értelmezni lehet az egybevágóságokat.

1.24. Definíció. Térbeli egybevágósági transzformáción (vagy rövidebben egybevágóságon) egy olyan $\varphi : X \to X$ bijektív leképezést értünk, amelynél tetszőleges $A,\ B \in X$ pontokra fennáll a $d(A,B) = d(\varphi(A), \varphi(B))$ összefüggés és amely egyenest egyenesbe képez.

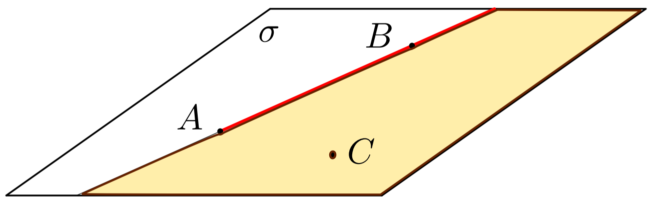
A síkbeli és a térbeli zászlók

Az egybevágósági axióma kimondásához szükségünk van a térbeli zászló fogalmára. Előbb azonban a síkbeli zászlót definiáljuk.

1.25. Definíció. Egy félegyenesből és egy félsíkból álló alakzatpárt síkbeli zászlónak mondunk, ha a félegyenest tartalmazza a félsík határegyenese.

Megjegyzés. A félegyenest a zászló rúdjának, a félsíkot pedig a zászló lapjának nevezzzük. A félegyenes kezdőpontját a zászló csúcsának hívjuk. A zászló síkja az a sík, amelyik a zászló lapját tartalmazza.

Megjegyzés. Legyenek adva az A, B és C nem kollineáris pontok. Ezen ponthármasnak egyértelműen megfeleltethető az a síkbeli zászló, melyet az $[A,B\rangle$ félegyenes és az $[\langle A,B\rangle, C\rangle$ félsík képeznek. A továbbiakban az A, B, C ponthármashoz hozzárendelt síkbeli zászlót jelölje $\mathcal{Z}(A,B,C)$. Eszerint fennáll $\mathcal{Z}(A,B,C) = ([A,B\rangle, [\langle A,B\rangle, C\rangle)$.



8. ábra. *Az A, B, C ponthármassal meghatározott $\mathcal{Z}(A,B,C)$ síkbeli zászló.*

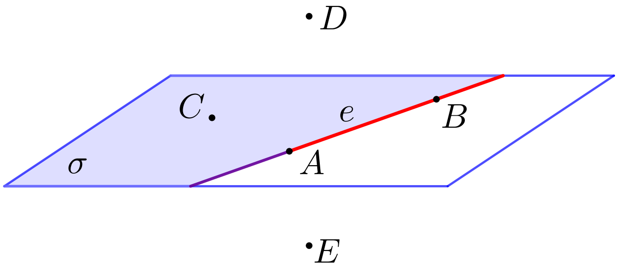
Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a $\mathcal{Z}(A,B,C)$ és $\mathcal{Z}(B,A,C)$ zászlók különbözőek, mivel az első zászlónak az $[A,B\rangle$ félegyenes a rúdja, a másodiknak pedig a $[B,A\rangle$ félegyenes.

A síkbeli zászló analógiájára értelmezhető a térbeli zászló fogalma.

1.26. Definíció. Egy félegyenesből, egy félsíkból és egy féltérből álló alakzathármast térbeli zászlónak mondunk, ha a félegyenes rajta van a félsík határegyenesén és a félsíkot tartalmazza a féltér határsíkja.

Megjegyzés. A félegyenest a zászló rúdjának, a félsíkot a zászló lapjának, a félteret pedig a térbeli zászló oldalának nevezzük.

Megjegyzés. Legyenek adva az A, B, C, D pontok, amelyek nem komplanárisak. Ez a pontnégyes az alábbiak szerint meghatároz egy térbeli zászlót, melyet $\mathcal{Z}(A,B,C,D)$ fog jelölni. Vegyük az $e = \langle A,B\rangle$ egyenest, továbbá a $\sigma = \langle A,B,C\rangle$ síkot. Tekintsük az $[A,B\rangle$ félegyenes, az $[e,C\rangle$ félsík és a $[\sigma,D\rangle$ féltér által alkotott zászlót. Rendeljük hozzá ezt az A, B, C, D pontnégyeshez. A pontnégyes által így meghatározott térbeli zászlót



9. ábra. *A $\mathcal{Z}(A,B,C)$ kibővítésével adódó térbeli zászlók $\mathcal{Z}(A,B,C,D)$ és $\mathcal{Z}(A,B,C,E)$.*

a továbbiakban jelölje $\mathcal{Z}(A,B,C,D)$.
Megjegyzés. Ha veszünk egy síkbeli zászlót, akkor annak síkja pontosan két félteret határol. Amennyiben az egyik félteret hozzávesszük a síkbeli zászlóhoz, akkor ezzel a bővítéssel egy térbeli zászlót kapunk. Ezek alapján világos, hogy bármely síkbeli zászló csak kétféleképpen bővíthető térbeli zászlóvá. (Lásd a 9. ábrát.)

Az egybevágósági axióma

Az 1.24. Definíció szerint az egybevágósági transzformáció egy olyan bijekció, amely megőrzi a pontok távolságát (más szóval távolságtartó) és egyenest egyenesbe képez.

Egybevágóságra legegyszerűbb példa az úgynevezett *identikus leképezés*, amely a tér összes pontját fixen hagyja. Ezt $id : X \to X$ fogja jelölni.

Könnyű belátni, hogy egy egybevágóság szakaszt szakaszba, síkot síkba képez. Azt is meg lehet mutatni, hogy félegyenest félegyenesbe, félsíkot félsíkba és félteret féltérbe visz. Mint ismeretes, a térbeli zászló egy félegyenesből, egy félsíkból és egy féltérből álló alakzathármas. Emiatt az egybevágósági transzformáció egy zászlót alkotó alakzathármast egy másik olyan alakzathármasba képezi, amely szintén egy zászlót ad.

A továbbiakban feltesszük, hogy teljesül az alábbi alapigazság is, melyet egybevágósági axiómának nevezünk.

(EA) *Ha adva van két térbeli zászló, akkor egyértelműen létezik egy olyan egybevágósági transzformáció, amely az első térbeli zászlót a második zászlóba viszi.*

Megjegyzés. A fenti (EA) axióma azt mondja ki, hogy ha adva vannak a $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ térbeli zászlók, akkor pontosan egy olyan $\varphi : X \to X$ egybevágóság létezik, amely a $\mathcal{Z}_1$-hez tartozó félegyenest a $\mathcal{Z}_2$ zászló rúdjába, $\mathcal{Z}_1$-hez tartozó félsíkot a $\mathcal{Z}_2$ lapjába és a $\mathcal{Z}_1$-hez tartozó félteret a $\mathcal{Z}_2$ félterébe képezi. (Ezt az összefüggést a továbbiakban a $\varphi(\mathcal{Z}_1) = \mathcal{Z}_2$ kifejezéssel írjuk majd le.)

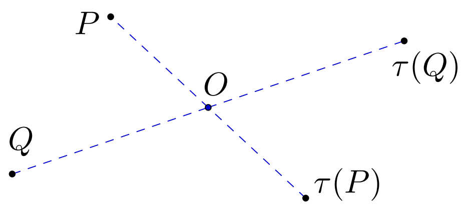
Megjegyzés. Az axiómából már következik, hogy amennyiben egy egybevágóságnál van olyan zászló, amelynek a képe önmaga, akkor a tekintett egybevágóság megegyezik az id identikus leképezéssel.

1.27. Definíció. Legyenek adva a $\varphi_1 : X \to X$ és $\varphi_2 : X \to X$ egybevágósági transzformációk. A két leképzezés $\varphi_2 \circ \varphi_1 : X \to X$ kompozícióját a φ_2, φ_1 egybevágóságok szorzatának mondjuk.
Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy a $\varphi_2 \circ \varphi_1$ szorzat–leképezés is egy egybevágóság.

Korábban már utaltunk arra, hogy egy síkbeli zászló kétféleképpen bővíthető térbeli zászlóvá. Emiatt az (EA) axióma alapján könnyen igazolni lehet a következő kijelentést.
1.28. Állítás. *Ha adva van két síkbeli zászló, akkor pontosan két olyan térbeli egybevágóság van, amely az első síkbeli zászlót a másodikba viszi.*

A centrális tükrözés

1.29. Definíció. Legyen adva a térben egy O pont. A térnek az O pontra történő tükrözésén azt a $\tau : X \to X$ leképezést értjük, ahol fennáll $\tau(O) = O$ és egy O–tól különböző P pont $\tau(P)$ képét az alábbi feltételek határozzák meg:
(1) A P, O, $\tau(P)$ pontok kollineárisak és fennáll $d(O,P) = d(O,\tau(P))$.
(2) Az O pont a P és $\tau(P)$ pontok között van.



10. ábra. *Tükrözés az O pontra.*

Megjegyzés. Az eőző definícióban leírt τ leképezést szokás nevezni centrális tükrözésnek is. Ekkor az O pontot mondjuk a tükrözés centrumának.

Megjegyzés. Egy adott $\overline{AB}$ szakasz azon F pontját, amelyre $AF = FB$ teljesül, a szakasz felezőpontjának mondjuk.
Az 1.29. Definícióban szereplő két feltétel egyenértékű azzal, hogy tetszőleges $P \in X$ pont esetén a pontra tükrözés O centruma felezőpontja a $\overline{PP'}$ szakasznak, ahol $P' = \tau(P)$.

Az eddigi feltevések és az egybevágósági axióma alapján már bizonyítható a következő állítás is.
1.30. Állítás. *A pontra tükrözés egy egybevágósági transzformáció.*
Bizonyítás vázlata.
A τ pontra tükrözés centrumát jelölje O. Rögzítsünk a térben olyan B, C, D pontokat, amelyekkel fennáll, hogy az O, B, C, D pontok nincsenek egy síkban, vagyis nem komplanárisak. Vegyük azon B_x, C_x és D_x pontokat, amelyekre teljesül, hogy az O felezőpontja a $\overline{BB_x}$, $\overline{CC_x}$ és $\overline{DD_x}$ szakaszoknak.
Tekintsük azon $\varphi : X \to X$ egybevágósági transzformációt, amely a $\mathcal{Z}(O,B,C,D)$ térbeli zászlót a $\mathcal{Z}(O,B_x,C_x,D_x)$ zászlóba viszi.
A φ egybevágóságról a következőket lehet belátni. A φ transzformáció egyedül az O pontot hagyja fixen és a $\mathcal{Z}(O,B_x,C_x,D_x)$ zászlót a $\mathcal{Z}(O,B,C,D)$ zászlóba képezi. Mivel

a $\varphi \circ \varphi$ szorzatleképezés a $\mathcal{Z}(O, B, C, D)$ zászlót önmagába képezi, fennáll $\varphi \circ \varphi = id$. Ha veszünk egy tetszőleges $P \in X$ pontot és annak $P' = \varphi(P)$ képét, akkor a $\overline{PP'}$ szakasznak az O éppen a felezőpontja és φ felcseréli a P, P' pontokat.

Ennek következtében a φ egybevágság azonos az O pontra történő τ tükrözéssel, tehát τ egy egybevágósági transzformáció. $\square$

Az alakzatok egybevágósága

1.31. Definíció. Legyenek adva az $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ alakzatok. Ezeket egymással egybevágóaknak mondjuk, ha van olyan φ egybevágósági transzformáció, amelyre fennáll $\varphi(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

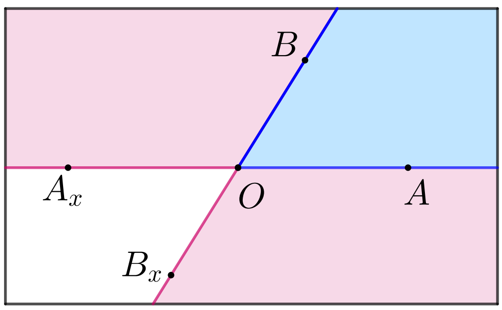
Megjegyzés. Amennyiben az $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ alakzatok egybevágóak, azaz van olyan egybevágóság, amely az $\mathcal{A}$–t a $\mathcal{B}$–be képezi, akkor ezt a kapcsolatot (más szóval relációt) az $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ kifejezéssel fogjuk jelölni.

Megjegyzés. Ha adva van egy $\varphi : X \to X$ egybevágósági transzformáció, akkor annak a φ^{-1} inverz-leképezése is egy egybevágóság. Ha tehát a φ az $\mathcal{A}$ ponthalmazt a $\mathcal{B}$ alakzatba képezi, akkor fennáll $\varphi^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$, vagyis igaz $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$.

Megjegyzés. Nyilvánvaló az (EA) axióma alapján, hogy két körvonal (illetve két gömbfelület) pontosan akkor egybevágó alakzatok, ha a sugaraik egyenlőek.

A szögek mérése

1.32. Definíció. Legyen adott egy $AOB\sphericalangle$ konvex szög. A szárakat tartalmazó egyeneseken vegyünk olyan A_x és B_x pontokat, amelyeknél az O csúcspont elválasztja az A pontot az A_x ponttól és a B pontot a B_x ponttól. Ez esetben az $AOB_x\sphericalangle$ és $BOA_x\sphericalangle$ szögeket az $AOB\sphericalangle$ mellékszögeinek mondjuk.



11. ábra. *Az $AOB\sphericalangle$ szög mellékszögei $AOB_x\sphericalangle$ és $BOA_x\sphericalangle$.*

Megjegyzés. Mivel a centrális tükrözés egy egybevágósági transzformáció, bármely konvex szög mellékszögei egybevágóak egymással.

Az eddigi feltevések alapján már igazolni lehet az alábbi állítást, amelynek bizonyítására most nem térünk ki.

1.33. Állítás. *Legyen adott egy félsík és annak határán egy $[O, A\rangle$ félegyenes. A félsíkban pontosan egy olyan konvex szög van, amelynek egyik szára megegyezik az $[O, A\rangle$ félegyenessel és amely egybevágó a mellékszögeivel.*

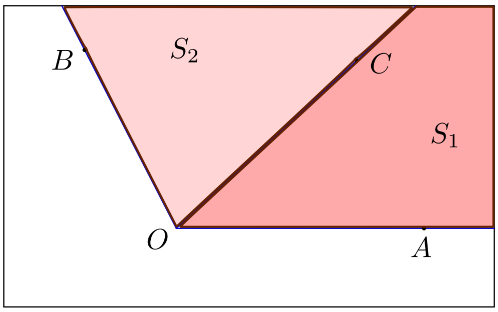
1.34. Definíció. Egy konvex szöget derékszögnek nevezünk, ha az egybevágó a mellékszögeivel.

Jelölje most $\mathcal{H}$ az összes szögtartomány halmazát. A szárszögeket (más szóval a nullszögeket) $\mathcal{H}$ nem tartalmazza. A szemlélet alapján kézenfekvő, hogy igaz az alábbi tétel, amely a szögek mérésére vonatkozik. A hosszadalmas bizonyítást nem közöljük.

1.35. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ az összes szögtartomány halmaza. A $\mathcal{H}$ halmazon egyértelműen létezik egy olyan $\mu : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:*
(1) Tetszőleges $S \in \mathcal{H}$ szögre igaz $\mu(S) > 0$.
(2) Ha S_1 és S_2 egymással egybevágó szögek, akkor fennáll $\mu(S_1) = \mu(S_2)$.
(3) Amennyiben az S szöget egy a csúcspontjából kiinduló, az S által tartalmazott félegyenessel felbontjuk az S_1 és S_2 szögtartományokra, akkor fennáll $\mu(S) = \mu(S_1) + \mu(S_2)$.
(4) Ha az S szögtartomány egy derékszög, akkor $\mu(S) = 90$.

1.36. Definíció. Tetszőleges S szög esetén a $\mu(S)$ számot az S szög mértékének mondjuk.

Megjegyzés. A szögek mérésére szolgáló μ függvény normálására a (4) feltétel szolgál. Mivel a derékszögek mértékének a 90 számot választottuk, azt mondjuk, hogy a szögeket most fokban mérjük. Ez esetben a mérték mellett feltüntetjük a fokra utaló ° jelet.



12. ábra. *Az $AOB\sphericalangle$ szög felbontása az $[O, C\rangle$ félegyenessel az S_1, S_2 szögekre.*

Az alábbi kijelentés, amelyet már le lehet vezetni az eddigi feltevésekből, ugyancsak összhangban van a szemlélettel.

1.37. Állítás. *Legyen adott egy félsík, annak határegyenesén egy $[O, A\rangle$ félegyenes, továbbá egy α pozitív valós szám, amelyre fennáll $0 < \alpha < 180$. Ekkor a félsíkban pontosan egy olyan O csúcsú szög van, amelynek mértéke α és egyik szára az $[O, A\rangle$ félegyenes.*

Megjegyzés. Mivel két szög pontosan akkor egybevágó, ha a mértékük egyenlő, a későbbiek során a szögön nemcsak egy konkrét szögtartományt értünk, hanem annak mértékét is. *Állapodjunk meg még abban, hogy a továbbiakban az $AOB\sphericalangle$ szimbólum nemcsak a konvex szöget, hanem annak a mértékét is jelölni fogja.*

Megjegyzés. Két egymással nem egybevágó szög közül azt mondjuk nagyobbnak, amelyiknek a mértéke nagyobb.

A továbbiakban a derékszögnél kisebb konvex szöget hegyesszögnek, a derékszögnél nagyobb konvex szöget pedig tompaszögnek nevezzük.

Egybevágó háromszögek

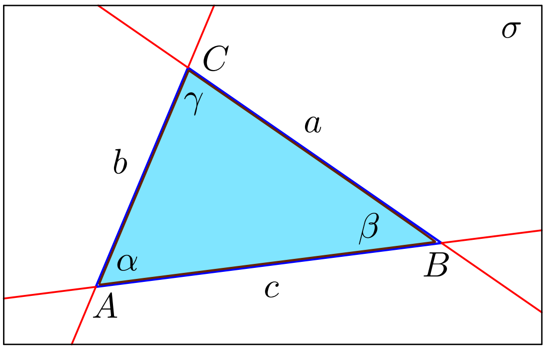
A háromszöglemez

Legyenek adva az A, B, C nem kollineáris pontok. Az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ és $\overline{CA}$ szakaszok unióját az A, B, C csúcsokhoz tartozó háromszögvonalnak nevezzük.

1.38. Definíció. Legyen adott három nem kollineáris pont A, B és C. Tekintsük az A, B, C csúcspontokkal meghatározott háromszögvonal $e = \langle B, C \rangle$, $g = \langle C, A \rangle$ és $h = \langle A, B \rangle$ oldalegyeneseit. Az $[e, A\rangle$, $[g, B\rangle$ és $[h, C\rangle$ félsíkok metszetét az A, B, C csúcsokkal meghatározott háromszöglemeznek (vagy rövidebben háromszögnek) mondjuk. Ezen háromszöglemezt $ABC\triangle$ fogja jelölni.

Az ABC háromszöglemez A, B, C csúcsokhoz tartozó szögein a $CAB\sphericalangle$, $ABC\sphericalangle$ és $BCA\sphericalangle$ szögeket értjük.

Megjegyzés. Az egyszerűség és a könnyebb megértés kedvéért az ABC háromszög $CAB\sphericalangle$, $ABC\sphericalangle$ és $BCA\sphericalangle$ szögeit a továbbiakban az α, β és γ szimbólumokkal is fogjuk jelölni. Az a, b és c latin kisbetűk pedig a háromszög oldalainak hosszát fogják majd jelölni. Ezek szerint fennáll $a = BC$, $b = CA$ és $c = AB$.



13. ábra. *Az ABC háromszög geometriai adatai:* a, b, c *és* α, β, γ.

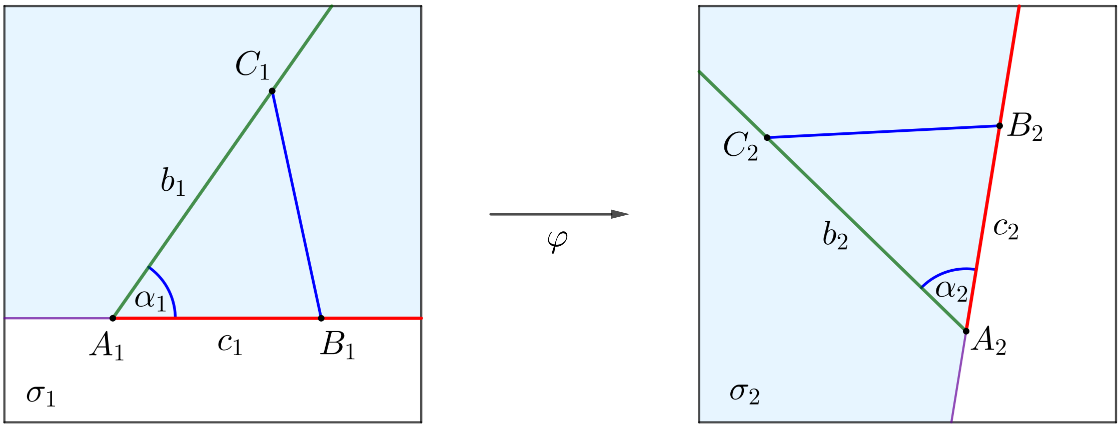
Megjegyzés. Vegyünk egy ABC háromszöget. Az $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ oldalhosszakat és az $\alpha = CAB\sphericalangle$, $\beta = ABC\sphericalangle$, $\gamma = BCA\sphericalangle$ szögmértékeket a háromszög geometriai adatainak mondjuk. Látni fogjuk, hogy ezek nem függetlenek egymástól.

Megjegyzés. Legyenek adva az $A_1B_1C_1\triangle$ és $A_2B_2C_2\triangle$ háromszögek. Ha van olyan $\varphi : X \to X$ egybevágóság, amelyre fennáll $\varphi(A_1) = A_2$, $\varphi(B_1) = B_2$ és $\varphi(C_1) = C_2$, akkor nyilvánvaló, hogy φ az első háromszöget a másodikba viszi, vagyis fennáll
$\varphi(A_1B_1C_1\triangle) = A_2B_2C_2\triangle$. Világos, hogy ekkor a két háromszög egybevágó, továbbá a háromszögek megfelelő oldalai és szögei páronként egyenlőek, azaz teljesül
$a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ és $\alpha_1 = \alpha_1$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$.

A következő tétel arról szól, hogy bizonyos esetekben a két háromszög egybevágóságához már három geometriai adat megegyezése is elegendő.

1.39. Tétel. *Legyen adott két háromszög $A_1B_1C_1\triangle$ és $A_2B_2C_2\triangle$. Létezik olyan egybevágóság, amely az A_1 pontot A_2–be, a B_1 pontot B_2–be és a C_1 pontot C_2–be viszi, amennyiben az alábbi két feltételrendszer közül legalább az egyik teljesül:*
(1) $A_1B_1 = A_2B_2,\ A_1C_1 = A_2C_2$ *és* $\alpha_1 = \alpha_2$.
(2) $A_1B_1 = A_2B_2,\ \alpha_1 = \alpha_2$ *és* $\beta_1 = \beta_2$.

Bizonyítás.
Korábban már tárgyaltuk, hogy egy nem kollineáris ponthármas egyértelműen meghatároz egy síkbeli zászlót. Tekintsük most a két háromszög csúcsai által meghatározott $\mathcal{Z}(A_1, B_1, C_1)$ és $\mathcal{Z}(A_2, B_2, C_2)$ síkbeli zászlókat. Vegyük az egyik olyan $\varphi : X \to X$ egybevágóságot, amely a $\mathcal{Z}(A_1, B_1, C_1)$ síkbeli zászlót a $\mathcal{Z}(A_2, B_2, C_2)$ zászlóba viszi. Eszerint φ az első zászló $[A_1, B_1\rangle$ rúdját az $[A_2, B_2\rangle$ félegyenesbe, az $[\langle A_1, B_1\rangle, C_1\rangle)$ lapját pedig az $[\langle A_2, B_2\rangle, C_2\rangle)$ félsíkba képezi. (Lásd a 14. ábrát.)
(1) Tegyük fel, hogy fennáll $A_1B_1 = A_2B_2,\ A_1C_1 = A_2C_2$ és $\alpha_1 = \alpha_2$. Mivel igaz $\varphi([A_1, B_1\rangle) = [A_2, B_2\rangle$, a távolságtartásból azonnal adódik, hogy $\varphi(A_1) = A_2$ és $\varphi(B_1) = B_2$ teljesül. A $\varphi([\langle A_1, B_1\rangle, C_1\rangle) = [\langle A_2, B_2\rangle, C_2\rangle$ és $\alpha_1 = \alpha_2$ egyenlőségekből pedig az 1.37. Állítás alapján következik, hogy igaz $\varphi([A_1, C_1\rangle) = [A_2, C_2\rangle$. Figyelembe véve, hogy φ megőrzi a pontok távolságát, ebből már adódik a $\varphi(C_1) = C_2$ összefüggés.



14. ábra. $c_1 = c_2,\ b_1 = b_2$ *és* $\alpha_1 = \alpha_2$ *fennállása esetén a két háromszög egybevágó.*

(2) Tegyük fel most azt, hogy teljesül $A_1B_1 = A_2B_2,\ \alpha_1 = \alpha_2$ és $\beta_1 = \beta_2$. Ekkor a fenti φ egybevágóságnál igaz $\varphi(A_1) = A_2$ és $\varphi(B_1) = B_2$. Az 1.37. Állításból következik, hogy φ az $[A_1, C_1\rangle$, $[B_1, C_1\rangle$ félegyeneseket az $[A_2, C_2\rangle$, $[B_2, C_2\rangle$ félegyenesekbe képezi. Ily módon az $[A_1, C_1\rangle$, $[B_1, C_1\rangle$ félegyenesek C_1 metszéspontjának φ szerinti képe megegyezik a másik két félegyenes metszéspontjával, vagyis fennáll $\varphi(C_1) = C_2$. Ezzel igazoltuk, hogy a φ egybevágóság az $A_1,\ B_1,\ C_1$ ponthármast az $A_1,\ B_1,\ C_1$ ponthármasba képezi. □

Egy háromszöget egyenlő szárúnak mondunk, ha van két olyan oldala, amelyek egyenlő hosszúságúak. A következő állítás az 1.40. Tétel alapján is igazolható. Mi azonban egy olyan igazolást adunk, amely csakis az (EA) egybevágósági axiómán alapul.

1.40. Állítás. *Egy ABC háromszögben fennáll $a = b$ akkor és csak akkor, ha igaz $\alpha = \beta$.*

Bizonyítás.

(1) Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben teljesül $a = b$, vagyis $BC = AC$. Legyen $\varphi : X \to X$ az egyik olyan egybevágósági transzformáció, amely a $\mathcal{Z}(C, A, B)$ síkbeli zászlót a $\mathcal{Z}(C, B, A)$ síkbeli zászlóba képezi. Ekkor a $[C, A\rangle$ félegyenes képe a $[C, B\rangle$ félegyenes lesz és teljesül $\varphi(C) = C$, $\varphi(A) = B$. Mivel a $[\langle C, A\rangle, B\rangle$ félsík a $[\langle C, B\rangle, A\rangle$ félsíkba képeződik, az 1.37. Állítás miatt φ a $[C, B\rangle$ félegyenest a $[C, A\rangle$ félegyenesbe viszi, amiből már következik, hogy $\varphi(B) = A$. Eszerint a φ egybevágóság egymásba képezi a $CAB\sphericalangle$, $CBA\sphericalangle$ szögtartományokat. Mivel a két szög egybevágó, a mértékeik is egyenlőek, azaz $\alpha = \beta$.

(2) Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben fennáll $\alpha = \beta$, vagyis $BAC\sphericalangle = ABC\sphericalangle$. Vegyük az egyik olyan φ egybevágóságot, amely $\mathcal{Z}(A, B, C)$ síkbeli zászlót a $\mathcal{Z}(B, A, C)$ síkbeli zászlóba képezi. Világos, hogy ekkor fennáll $\varphi(A) = B$ és $\varphi(B) = A$. Mivel az A, B csúcsoknál lévő szögek egyenlőek, az 1.37. Állítás következtében φ egymásba képezi az $[A, C\rangle$ és $[B, C\rangle$ félegyeneseket, melyek a C pontban metszik egymást. Emiatt $\varphi(C) = C$ teljesül. A φ egybevágóság tehát egymásba képezi az $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ szakaszokat. Ebből pedig következik, hogy teljesül $AC = BC$. □

A párhuzamossági probléma

Mint ismeretes, két egyenest egymással párhuzamosnak mondunk, ha egyazon síkban vannak és nincs közös pontjuk. Az alábbi állítás szerint a centrális tükrözés egy a centrumon nem átmenő egyenest vele párhuzamos egyenesbe képez.

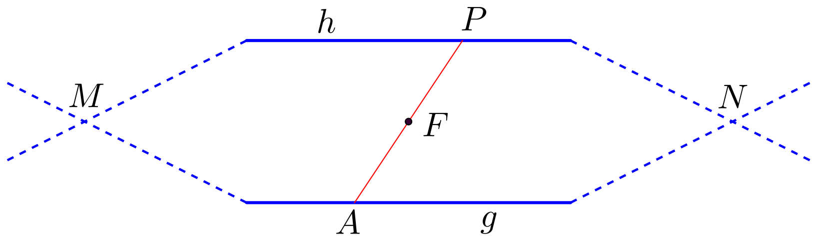
1.41. Állítás. *Legyen adott egy g egyenes és egy arra nem illeszkedő F pont. Tekintsük az F pontra történő tükrözést, amelyet jelöljön τ. Ekkor a $\tau(g)$ képegyenes párhuzamos a g egyenessel.*

Bizonyítás.

A τ centrális tükrözés a $\langle\, g, F\,\rangle$ síkot önmagába képezi, tehát a $\tau(g) = h$ képegyenes benne van ebben a síkban. Vegyünk egy A pontot, amely illeszkedik g-re. Ezt a τ tükrözés vigye A-t a $P = \tau(A)$ pontba. Vegyük észre, hogy a P képpont nem lehet rajta a g egyenesen, mivel az $\overline{AP}$ szakasz F felezőpontja nincs rajta g-n. Ebből következik, hogy a g, h egyenesek különbözőek, azaz $g \neq h$. Mint ismeretes a τ tükrözésre igaz $\tau \circ \tau = id$, amiből következik, hogy teljesül $\tau(h) = g$.

Tételezzük fel, hogy a g, h egyeneseknek van egy M-mel jelölt közös pontja, vagyis $M \in g \cap h$. Világos, hogy fennáll $M \neq F$. Mivel τ egymásba képezi a g, h egyeneseket, a $\tau(M) = N$ képpont is közös pontja a $\tau(g) = h$ és $\tau(h) = g$ egyeneseknek. A τ centrális tükrözésnek F az egyedüli fixpontja, tehát $M \neq N$. Eszerint a g, h egyeneseknek van két közös pontja, amiből az következik az (IA2) kijelentés alapján, hogy $g = h$. Ez viszont ellentmond azon korábbi megállapításunknak, hogy a g, h egyenesek különbözőek. Ily módon azt kapjuk, hogy a g, $h = \tau(g)$ egyeneseknek nem lehet közös pontja.

Tehát a g, h egyenesek egyazon síkban vannak és nincs közös pontjuk, ami azt jelenti, hogy párhuzamosak egymással. □



15. ábra. *Az 1.41. Állítás bizonyításának szemléltetése.*

Az előző állítás alapján már könnyen igazolható az alábbi tétel.

1.42. Tétel. *Legyen adott egy g egyenes és egy arra nem illeszkedő P pont. Az általuk meghatározott síkban van egy olyan egyenes, amely áthalad a P ponton és párhuzamos a g egyenessel.*

Bizonyítás.
Vegyünk a g egyenesen egy A pontot és az $\overline{AP}$ szakasz F felezőpontját. Tükrözzük a teret az F pontra. Nyilvánvaló, hogy az F pontra történő $\tau : X \to X$ centrális tükrözés az A pontot a P–be viszi. Az előbbi 1.41. Állítás szerint a P ponton átmenő $\tau(g) = h$ képegyenes párhuzamos g–vel. □

A geometria egy klasszikus problémája

Felvetődik a kérdés, hogy az eddigi feltevések (vagyis a bizonyítás nélkül elfogadott alapigazságok) alapján vajon be lehet–e bizonyítani az alábbi kijelentést, amely összhangban áll a szemléletünkkel.

Ha adott egy g egyenes és egy arra nem illeszkedő P pont, akkor az őket tartalmazó síkban csak egy olyan egyenes van, amely áthalad a P ponton és nem metszi g–t.

A fenti kérdésfelvetést szokás mondani a *parallellák problémájának.* A szemléletből fakadóan a XIX. század első feléig sok matematikus úgy gondolta, hogy igenlő a válasz, bár a bizonyítást nem sikerült megtalálni. *A korrekt válasz azonban nemleges.* Ez a felfedezés Bolyai János magyar és N. I. Lobacsevszkij orosz matematikusok nevéhez fűződik. Az 1820–as évek végén ők egyidejűleg jutottak arra a következtetésre, hogy amennyiben a fenti kijelentés tagadását veszik alapigazságnak (más szóval axiómának), akkor azzal is egy ellentmondásmentes matematikai elméletet lehet felépíteni. Ezt a geometriai elméletet később hiperbolikus geometriának nevezték el.

A páhuzamossági axióma

Az elmondottak alapján tehát szükségünk van az alábbi alapigazságra is, amely megfelel a szemléletünknek és amelyet *párhuzamossági axiómának* nevezünk.

(PA) *Ha adott egy g egyenes és egy arra nem illeszkedő P pont, akkor az általuk meghatározott síkban csak egy olyan egyenes van, amely áthalad a P ponton és nem metszi g–t.*

A továbbiakban feltesszük a (PA) párhuzamossági axióma teljesülését is. Azt a matematikai elméletet, amely az eddig kimondott feltevésekre és axiómára épül nevezik euklideszi geometriának.

A háromszög szögeinek összege az euklideszi geometriában

Az 1.41. Állításból már következik a centrális tükrözésekre vonatkozó alábbi kijelentés, amelyet célszerűnek tartunk külön kimondani.

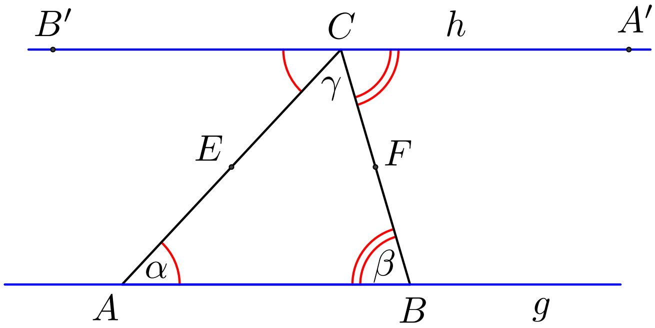
1.43. Következmény. *A pontra tükrözés egy egyenest vagy vele párhuzamos egyenesbe, vagy pedig önmagába képez.*

Az euklideszi geometriában fontos szerepet játszik az alábbi tétel, amelyet a párhuzámossági axióma alkalmazásával lehet igazolni.

1.44. Tétel. *Tetszőleges háromszögben a szögek összege* $180°$.

Bizonyítás.

Vegyünk egy $ABC\triangle$ háromszöget. Az $\overline{AC}$ oldal felezőpontját jelölje E, a $\overline{BC}$ oldal felezőpontját pedig F. Az A, B, C csúcsoknál lévő szögek mértékét jelölje α, β és γ.



16. ábra. *Egy háromszög szögeinek összegzése.*

Tekintsük a $g = \langle A, B\rangle$ egyenest. A (PA) párhuzamossági axióma miatt csak egy olyan egyenes van, amely áthalad C–n és párhuzamos g-vel. Jelöljük ezt az egyenest h–val. Az E, F pontokra történő tükrözések legyenek τ_E és τ_F. Nyilván fennáll $\tau_E(A) = C$ és $\tau_F(B) = C$. Ezek a tükrözések g–t a C ponton áthaladó párhuzamos egyenesbe viszik, vagyis teljesül $\tau_E(g) = h$ és $\tau_F(g) = h$.

Az A pontnak az F-re vonatkozó tükörképe legyen az $A' = \tau_F(A)$ pont, a B-nek az E-re vonatkozó tükörképe pedig legyen a $B' = \tau_E(B)$ pont. Ezek az A' és B' pontok egyaránt rajta vannak a g–vel párhuzamos h egyenesen. Világos, hogy a $CAB\sphericalangle$ szög egybevágó az $ACB'\sphericalangle$ szöggel és a $ABC\sphericalangle$ egybevágó az $A'CB\sphericalangle$ szöggel, hiszen a τ_E, τ_F centrális tükrözések egymásba képezik ezeket a szögeket. Emiatt igaz $ACB'\sphericalangle = \alpha$ és $A'CB\sphericalangle = \beta$.

Látható, hogy a C csúcsnál lévő $ACB'\sphericalangle$, $ACB\sphericalangle$ és $A'CB\sphericalangle$ szögek együttesen egy egyenesszöget adnak. Ily módon fennáll $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. □

1.45. Definíció. Egy háromszögnél a csúcsbeli szögek mellékszögeit a háromszög külső szögeinek mondjuk.

Megjegyzés. Az előző tételből következik, hogy a háromszög egy külső szöge megegyezik a nem mellette fekvő két belső szög összegével. Emiatt a külső szög mindig nagyobb a nem mellette fekvő belső szögnél.

Megjegyzés. Az 1.44. Tételből azonnal adódik az is, hogy egy háromszögben legalább két hegyesszög van.

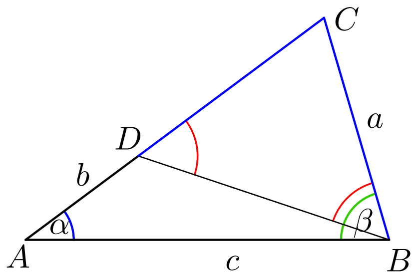
A háromszög-egyenlőtlenség igazolása

A következő állításunk azt mondja ki, hogy egy háromszögben a nagyobb szöggel szemközti oldal a hosszabb.

1.46. Állítás. *Egy $ABC\triangle$ háromszögben az $a = BC$, $b = AC$ oldalakra fennáll $a < b$ akkor és csak akkor, ha igaz $\alpha < \beta$.*

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy az $ABC\triangle$ háromszögben teljesül $a < b$, vagyis $BC < AC$. A $\overline{CA}$ oldalon vegyük azt a D pontot, amelyre fennáll $CD = CB$. Mivel a $DBC\triangle$ háromszög egyenlő szárú, $DBC\sphericalangle = CDB\sphericalangle$ teljesül.



17. ábra. *A háromszögben a nagyobb szöggel szemközti oldal a hosszabb.*

A $CDB\sphericalangle$ egy külső szöge az $ABD\triangle$ háromszögnek, így az A csúcsnál lévő $\alpha = CAB\sphericalangle$ szög kisebb a $CDB\sphericalangle$ szögnél. Emiatt fennáll az $\alpha < CDB\sphericalangle = DBC\sphericalangle < \beta$ összefüggés.

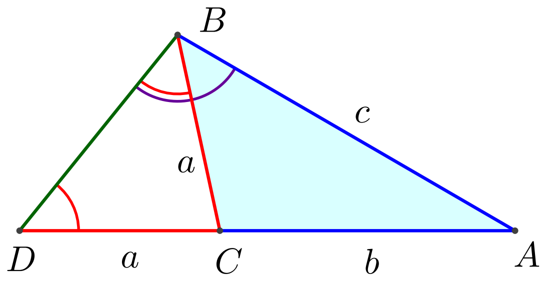
A tétel megfordítása már könnyen belátható az indirekt bizonyítás módszerével. □

1.47. Tétel. *Tetszőleges $ABC\triangle$ háromszögben az oldalak hosszaira fennáll az $a + b > c$ egyenlőtlenség.*

Bizonyítás.

Az $ABC\triangle$ háromszög $\langle A, C\rangle$ oldalegyenesén vegyük azt a D pontot, amely C–től a távolságra van és amelyet a C pont elválaszt A–tól. Eszerint igaz $AD = a + b$. A $BDC\triangle$

háromszögben fennáll $BC = DC$. Ebből következik, hogy a $CBD\sphericalangle$, $CDB\sphericalangle$ szögek egyenlőek.



18. ábra. *A háromszög-egyenlőtlenség igazolásának szemléltetése.*

Tekintsük most az $ABD\triangle$ háromszöget. Evidens, hogy ezen háromszögben a B csúcsnál lévő $ABD\sphericalangle$ szög nagyobb a D csúcsnál lévő $ADB\sphericalangle$ szögnél. Az előző állítás szerint emiatt az AD oldalhossz nagyobb AB–nél. Ily módon azt kaptuk, hogy fennáll az $a+b > c$ egyenlőtlenség. $\square$

Megjegyzés. A fenti 1.47. Tétel azt mondja ki, hogy egy háromszögben két oldal hosszának az összege nagyobb a harmadik oldal hosszánál.

Ennek következtében, ha A, B és C nem kollineáris pontok, akkor igaz az $AB + BC > AC$ összefüggés.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a fentiek szerint a $d : X \times X \to \mathbb{R}$ távolságfüggvényre vonatkozóan tetszőleges A, B, C pontok esetén fennáll a $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ egyenlőtlenség.

Megjegyzés. Az 1.47. Tételt felhasználva már könnyű belátni, hogy ha egy háromszögben vesszük két oldal hosszának a különbségét, akkor az így nyert szám abszolút értéke kisebb a harmadik oldal hosszánál, tehát teljesül $|a - b| < c$.

A háromszög-egyenlőtlenség ismeretében bizonyítani lehet az alábbi kijelentést is.

1.48. Állítás. *A tér pontjainak X halmazán legyen adott egy olyan $\varphi : X \to X$ leképezés, amely távolságtartó, azaz tetszőleges A, $B \in X$ pontokra fennáll $d(A, B) = d(\varphi(A), \varphi(B))$. Ekkor φ egy egybevágósági transzformáció.*

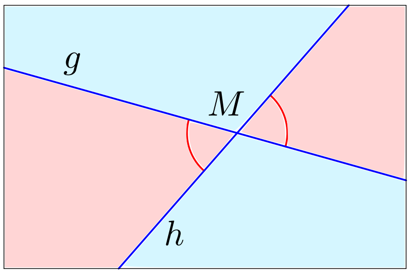
Bizonyítás vázlata.

A távolságtartásból adódik, hogy a φ leképezés kölcsönösen egyértelmű (vagy más szóval injektív). Az 1.47. Tételt alkalmazva igazolható, hogy a φ leképezés egyenest egyenesbe képez. Ezek alapján be lehet látni azt is, hogy φ egy bijektív leképezés. Ily módon φ eleget tesz az 1.24. Definícióban szereplő feltételeknek. $\square$

Két metsző egyenes hajlásszöge

1.49. Definíció. Legyenek adva a g és h metsző egyenesek. Az általuk meghatározott síkot a g, h egyenesek felosztják négy olyan konvex szögtartományra, melyek szárai a

g, h egyenesekre esnek és közös csúcspontjuk a metszéspont. A két egyenes hajlásszögének mondjuk az így nyert szögek közül azokat (illetve azok mértékét), amelyek derékszögnél nem nagyobbak.



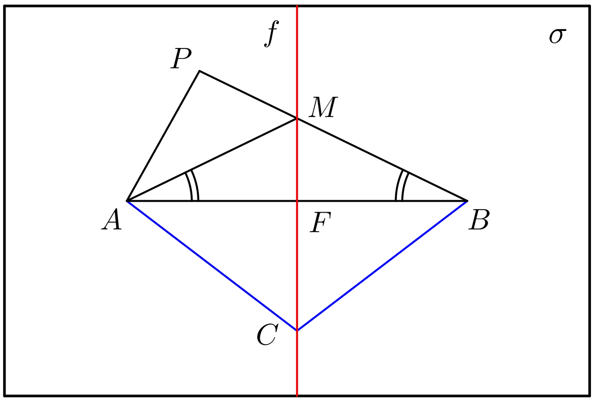
19. ábra. *A g, h egyenesek hajlásszöge.*

1.50. Definíció. Két metsző egyenesről azt mondjuk, hogy merőlegesek egymásra, ha a hajlásszögük derékszög.

További elégséges feltételek két háromszög egybevágóságához

1.51. Definíció. Egy $\overline{AB}$ szakasz ($A \neq B$) felezőmerőlegeseinek mondjuk azon egyeneseket, amelyek átmennek az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontján és merőlegesek az $\langle A, B \rangle$ egyenesre.

Az eddigi eredmények alapján már igazolni lehet az alábbi tételt is. A bizonyításra nem térünk ki, de a mellékelt 20. ábra segítségével már nem nehéz azt megadni.
1.52. Tétel. *Egy σ síkban legyen adva két pont A és B. Legyen f az $\overline{AB}$ szakasz σ–beli felezőmerőleges egyenese. Ekkor igazak az alábbi kijelentések.*
(1) Az f felezőmerőleges megegyezik a σ sík azon pontjainak halmazával, amelyek A–tól és B–től egyenlő távolságra vannak.
(2) Ha egy σ–beli P pont nincs rajta az f egyenesen és benne van az $[f, A\rangle$ félsíkban, akkor fennáll $AP < BP$.



20. ábra. *Az $\overline{AB}$ szakasz f felezőmerőlegesének szerepe: $AC = BC$, $AP < BP$.*

Bizonyítható, hogy amennyiben két háromszögben az oldalak páronként egyenlőek, akkor a két háromszög egybevágó. Az egybevágósághoz az is elegendő, ha a két háromszögben két–két oldal és a hosszabbik oldallal szemközti szög egyenlő. Tehát igaz az alábbi kijelentés, amely kapcsolódik a korábban kimondott 1.39. Tételhez.

1.53. Tétel. *Legyen adott két háromszög $A_1B_1C_1\triangle$ és $A_2B_2C_2\triangle$. Létezik olyan egybevágóság, amely az A_1 pontot A_2–be, a B_1 pontot B_2–be és a C_1 pontot C_2–be viszi, amennyiben az alábbi két feltételrendszer közül legalább az egyik teljesül:*
(3) $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ *és* $c_1 = c_2$.
(4) $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ *és* $\alpha_1 = \alpha_2$, *továbbá* $a_1 \geq b_1$.

A sokszögekkel kapcsolatos alapvető fogalmak és összefüggések

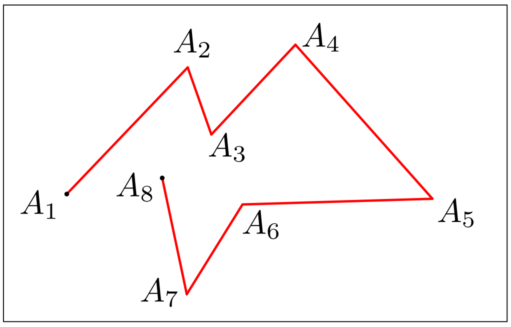
A poligonálisan összefüggő alakzat fogalma

1.54. Definíció. Legyen adva egy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ véges pontsorozat ($n \geq 2$). A pontsorozat szomszédos elemeit összekötő $\overline{A_iA_{i+1}}$ ($i = 1, \ldots, n-1$) szakaszok unióját töröttvonalnak nevezzük.

Az A_1, A_n pontokat a töröttvonal végpontjainak, az $A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ pontokat a töröttvonal csatlakozási pontjainak mondjuk. Az $\overline{A_iA_{i+1}}$ ($i = 1, \ldots, n-1$) szakaszokat hívjuk a töröttvonal oldalainak.

Megjegyzés. Véges pontsorozat alatt azt értjük, hogy adva van véges sok pont és azoknak egy (az indexelés szerint) kitüntetett sorrendje. Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontsorozattal meghatározott töröttvonalat az $\overline{A_1A_2\ldots A_n}$ szimbólummal jelöljük.

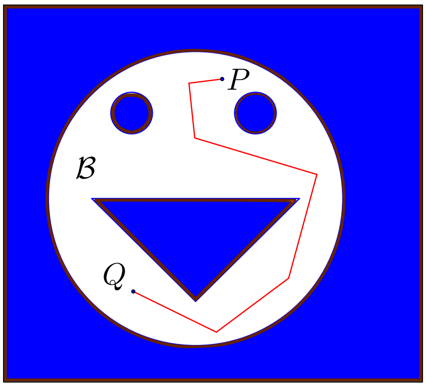
A töröttvonal hosszán az oldalak hosszainak az összegét értjük. Könnyű belátni, a töröttvonal hossza nem lehet kisebb a végpontok távolságánál.



21. ábra. *Egy nyílt töröttvonal.*

1.55. Definíció. Egy $\overline{A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}}$ töröttvonalat zártnak mondunk, ha fennáll $A_1 = A_{n+1}$. Amennyiben $A_1 \neq A_{n+1}$ teljesül, akkor a töröttvonalat nyíltnak nevezzük.

1.56. Definíció. Egy $\mathcal{B}$ alakzatot poligonálisan összefüggőnek nevezünk, ha tetszőleges $P \in \mathcal{B}$, $Q \in \mathcal{B}$ pontok esetén van olyan a $\mathcal{B}$ ponthalmaz által tartalmazott töröttvonal, amelynek végpontjai P és Q.



22. ábra. *Egy poligonálisan összefüggő $\mathcal{B}$ síkbeli alakzat.*

Megjegyzés. A konvex alakzatok nyilván poligonálisan összefüggőek. A konkáv szögtartomány szintén egy poligonálisan összefüggő ponthalmaz.

Legyen adva egy tetszőleges σ sík és egy ahhoz illeszkedő e egyenes. Nem nehéz belátni, hogy a $\sigma \setminus e$ és az $X \setminus \sigma$ ponthalmazok poligonálisan nem összefüggőek.

Megjegyzés. Amennyiben az $\overline{A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}}$ töröttvonal zárt, akkor az $A_1 = A_{n+1}$ pontot is a csatlakozási pontok közé soroljuk.

A töröttvonal egy A_i csatlakozási pontját egyben töréspontnak is mondjuk, ha az A_{i-1}, A_i, A_{i+1} pontok nem kollineárisak.

1.57. Definíció. Egy töröttvonalat egyszerűnek mondunk, ha az összes csatlakozási pontja töréspont és bármely két oldalának az esetleges csatlakozási ponton kívül más közös pontja nincs.

A sokszög értelmezése

Egy töröttvonalat síkbelinek mondunk, ha van olyan sík, amely azt tartalmazza. A továbbiakban olyan egyszerű zárt töröttvonalakat tanulmányozunk majd, amelyek csatlakozási pontjai egyazon síkban vannak (más szóval komplanárisak).

1.58. Definíció. Sokszögvonalon egy olyan síkbeli töröttvonalat értünk, amely zárt és egyszerű.

A sokszögvonalat szokás poligonnak is nevezni. Ez indokolja azt, hogy a sokszögvonalat a továbbiakban Π–vel jelöljük.

1.59. Definíció. Legyen adott egy $\Pi = \overline{A_1A_2 \dots A_nA_1}$ sokszögvonal. Ez esetben az A_i $(i = 1, \dots, n)$ csatlakozási pontokat a Π sokszögvonal csúcspontjainak, az $\langle A_j, A_{j+1} \rangle$ $(j = 1, \dots n-1)$ és $\langle A_n, A_1 \rangle$ egyeneseket a sokszögvonal oldalegyeneseinek nevezzük. Az $\overline{A_1A_2}$, $\dots$, $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$ szakaszokat hívjuk a sokszögvonal oldalainak, a tartalmazó síkot pedig a Π poligon síkjának.

Megjegyzés. A $\Pi = \overline{A_1A_2 \dots A_nA_1}$ sokszögvonalra az oldalak és a csúcspontok közös száma alapján az n–oldalú sokszögvonal elnevezést használjuk. Vegyük észre, hogy mindig fennáll $n \geq 3$.

1.60. Definíció. Egy $\mathcal{B}$ alakzatot korlátosnak nevezünk, ha van olyan Q pont és r pozitív valós szám, hogy tetszőleges $P \in \mathcal{B}$ pont esetén fennáll a $QP \leq r$ összefüggés.

Az alábbi tételben szereplő kijelentések a szemlélet alapján evidensnek tűnnek, de a bizonyításuk valójában nehéz. Emiatt itt nem is térünk ki a bizonyításra.

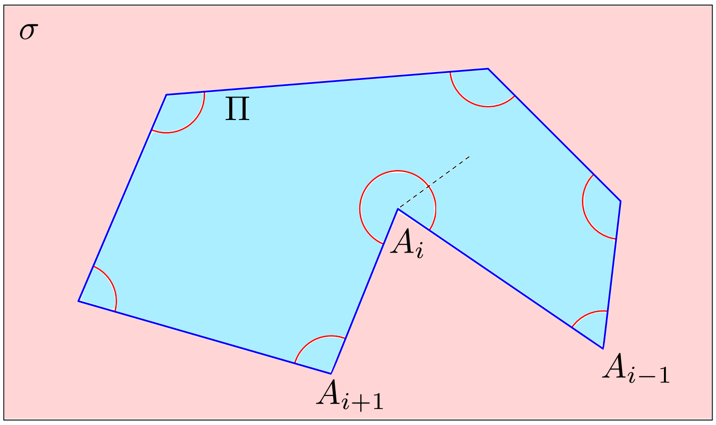
1.61. Tétel. *Egy σ síkban legyen adva egy Π sokszögvonal. Ekkor igazak az alábbi kijelentések.*
(1) A $\sigma \setminus \Pi$ alakzat poligonálisan nem összefüggő.
(2) A $\sigma \setminus \Pi$ ponthalmaz egyértelműen áll elő két olyan alakzat uniójaként, amelyek poligonálisan összefüggőek és nincs közös pontjuk. A két alakzat közül az egyik korlátos.

Megjegyzés. Az előző tétel szerint egy Π sokszögvonal az őt tartalmazó σ síkot két olyan poligonálisan összefüggő alakzatra (vagy más szóval tartományra) osztja fel, melyeknek nincs közös pontjuk.

Mint ismeretes, két halmazt egymással diszjunktnak mondunk, ha nincs közös elemük.

1.62. Definíció. Egy σ síkban legyen adva egy Π sokszögvonal. A $\sigma \setminus \Pi$ ponthalmaz előáll két diszjunkt, poligonálisan összefüggő alakzat uniójaként. Vegyük közülük azt az alakzatot, amelyik korlátos. Ezen alakzat és a Π sokszögvonal unióját a Π által határolt sokszögtartománynak (vagy rövidebben csak a Π által határolt sokszögnek) mondjuk.

Megjegyzés. A $\sigma \setminus \Pi$ ponthalmazt unióként előállító két poligonálisan összefüggő alakzat közül a korlátosat a Π *által határolt nyílt sokszögtartománynak* nevezzük. Ennek pontjait mondjuk a Π által határolt sokszög belső pontjainak.



23. ábra. *Egy nem konvex sokszög és annak szögei.*

1.63. Definíció. Egy σ síkban legyen adva egy Π sokszögvonal. Tekintsük a Π által határolt sokszöget és annak az A_i csúcspontját. Az $A_{i-1}A_iA_{i+1}\angle$ szögvonal által határolt két szögtartomány közül vegyük azt, amelyik tartalmaz nem száron fekvő, A_i kezdőpontú szakaszt. Ezt a szöget mondjuk a sokszög A_i csúcsbeli szögének.

Megjegyzés. Mint ismeretes, a nem konvex szögtartományt konkáv szögnek hívjuk. Ennek mértéke nagyobb, mint 180°.

Világos, hogy egy konvex sokszögnek nem lehet konkáv szöge, tehát az összes szöge konvex. Igazolható az is, hogy amennyiben egy sokszög összes szöge kisebb 180°–nál, akkor a sokszögtartomány egy konvex alakzat. Ezek alapján a következő megállapítást tehetjük.

1.64. Állítás. *Egy sokszögtartomány konvex akkor és csak akkor, ha az összes szöge konvex.*

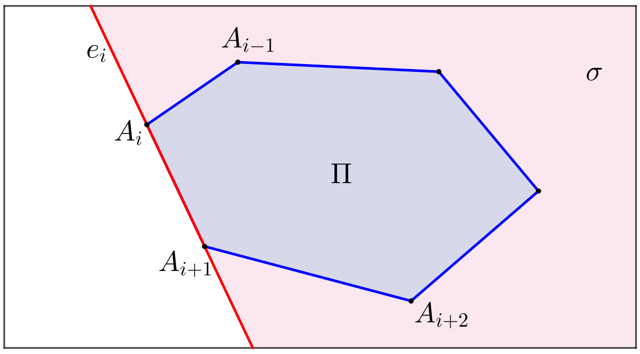
Megjegyzés. A továbbiakban a Π sokszögvonal által határolt sokszöget is Π fogja jelölni. Ha a sokszög oldalainak száma n, akkor azt n–oldalú sokszögnek nevezzük.

A konvex sokszögek egyik tulajdonsága

Tekintsünk egy olyan n–oldalú Π sokszöget, amely konvex. Legyenek ezen konvex sokszögtartomány csúcsai sorrendben $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$, a tartalmazó sík pedig legyen σ.

Ha egy σ–beli egyenesnek van a Π sokszöggel közös pontja, akkor a konvexitás miatt az egyenes Π–vel vett metszete vagy egy szakasz, vagy pedig egyetlen pont. Eszerint az $e_i = \langle A_i, A_{i+1} \rangle$ oldalegyenesnek a Π–vel vett metszete megegyezik az $\overline{A_i A_{i+1}}$ oldallal. Ez alapján könnyű belátni, hogy a határoló sokszögvonal benne van az e_i oldalegyenes által határolt egyik félsíkban. Ebből pedig az következik, hogy a félsík a sokszögtartományt is tartalmazza. (Lásd a 24. ábrát.)

1.65. Definíció. Egy σ síkban legyen adva egy Π konvex sokszög. Azt a σ–beli félsíkot, amelyet az e_i oldalegyenes határol és amely tartalmazza a sokszöget, a Π sokszög e_i oldalegyenessel határolt támaszfélsíkjának nevezzük.



24. ábra. *A Π konvex sokszög egyik oldalegyeneséhez tartozó támaszfélsík.*

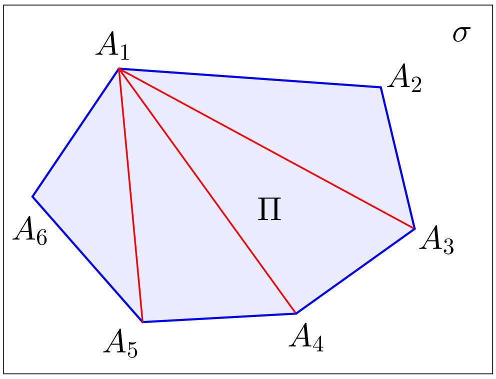
A fentiek szerint evidens, hogy egy n–oldalú konvex sokszög esetében n számú olyan támaszfélsík van, amelyeknek határegyenese a sokszög egyik oldalegyenese. Igazolható az alábbi kijelentés, amely a szemlélet alapján kézenfekvőnek tűnik.

1.66. Állítás. *Egy konvex sokszög előáll az oldalegyenesekkel határolt támaszfélsíkjainak metszeteként.*

Megjegyzés. Egy sokszög két csúcsát összekötő szakaszt a sokszög átlójának nevezzük, amennyiben a csúcsok nem szomszédosak.

Egy sokszög szögeinek összege

A konvex sokszög szögeinek összegére vonatkozik a következő jólismert állítás.
1.67. Állítás. *Egy n-oldalú konvex sokszög szögeinek az összege* $(n-2)\cdot 180°$.
Bizonyítás.
Az 1.44. Tétel szerint a háromszögekben a szögösszeg 180°, tehát a háromszögekre igaz a fenti kijelentés. Ezt a tételt alkalmazzuk az $n \geq 4$ esetben is. Legyen adott egy n-oldalú



25. ábra. *Konvex sokszög háromszögekre való felbontása átlókkal.*

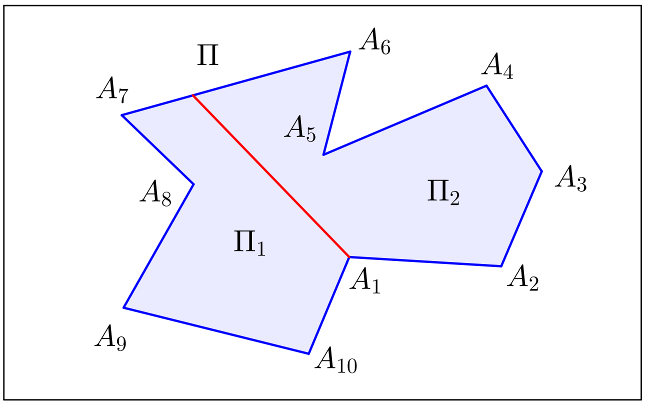
konvex sokszög, amelynél az oldalak számára fennáll $n \geq 4$. A sokszög csúcsai legyenek az $A_1, \ldots, A_n$ pontok. Vegyük a konvex sokszög A_1 csúcsból kiinduló átlóit. Ezek $n-2$ számú háromszögre bontják fel a sokszöget. (Lásd a 25. ábrát.) Világos, hogy a sokszög szögeinek összege megegyezik az átlókkal nyert háromszögek szögeinek összegével. Emiatt a konvex sokszög szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$. □

A szögösszeget megadó kifejezés nemcsak a konvex sokszögek esetében igaz.
1.68. Tétel. *Tetszőleges n–oldalú sokszögnél a sokszög szögeinek összege* $(n-2)\cdot 180°$.
Bizonyítás.
A bizonyítást a sokszögek konkáv szögeinek számára vonatkozó teljes indukcióval végezzük. A továbbiakban jelölje m a tekintett sokszög azon szögeinek a számát, amelyek mértéke nagyobb 180°–nál.

Amennyiben fennáll $m = 0$, akkor a sokszög konvex, tehát az 1.67. Állítás miatt igaz a tételben szereplő összefüggés.

Tegyük fel, hogy a szögösszegre vonatkozó formula igaz az olyan sokszögekre, melyekben a konkáv szögek számára fennáll az $m \leq k$ egyenlőtlenség.

Tekintsünk egy olyan Π sokszöget, amelyben a konkáv szögek száma $m = k+1$. Vegyünk az egyik konkáv szög csúcsából kiinduló olyan szakaszt, amely a csúcsbeli szöget két konvex szögre, a sokszöget pedig két sokszögre bontja fel. A szakasz megfelelő



26. ábra. Π *felbontása olyan* Π_1, Π_2 *sokszögekre, melyekben kevesebb a konkáv szög.*

megválasztásával elérhető, hogy a másik végpontja az Π egyik oldalának a belső pontja legyen. Jelölje n a Π sokszög oldalainak számát. A felbontással nyert Π_1 és Π_2 sokszögek oldalainak száma legyen n_1 és n_2. Világos, hogy teljesül az $n_1 + n_2 = n + 3$ egyenlőség.

A Π_1 és Π_2 sokszögekben a konkáv szögek száma nem nagyobb k–nál. Emiatt az indukciós feltevés alapján ezen sokszögekben a szögek összege $(n_1 - 2) \cdot 180°$ és $(n_2 - 2) \cdot 180°$. Vegyük észre, hogy a tekintett Π sokszög szögeinek összegét úgy kaphatjuk meg, ha a Π_1 és Π_2 sokszögek együttes szögösszegéből kivonjuk az egyenesszög mértékét. Eszerint a Π sokszög szögeinek összege:
$(n_1 - 2) \cdot 180° + (n_2 - 2) \cdot 180° - 180° = (n_1 + n_2 - 5) \cdot 180° = (n - 2) \cdot 180°$.

Ebből már következik, hogy a sokszögbeli konkáv szögek bármely m értéke esetén teljesül a tételben szereplő összefüggés a szögösszegre vonatkozóan. $\square$

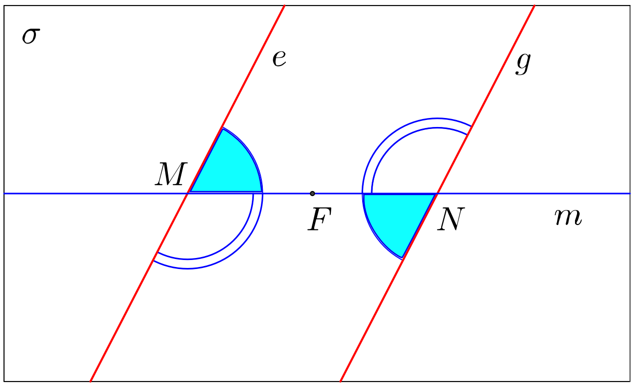
A paralelogramma tulajdonságai

Az euklideszi geometria felépítésében a háromszög mellett fontos szerepet játszik a paralelogramma. Ennek jellemzéséhez szükség van a következő állításra, amely szerint két egysíkú egyenes párhuzamosságát el lehet dönteni a szögek összehasonlításával.

1.69. Állítás. *Egy síkban legyen adott két egyenes e és g. A sík egy további m egyenese metssze el ezeket az egymástól különböző M, N pontokban. Az e, m és g, m egyenespárok a síkot négy-négy szögtartományra bontják fel, melyek csúcsai M és N. Az így nyert szögek közül vegyünk két olyan szöget az M és N csúcsokkal, melyek szárai tartalmazzák az $\overline{MN}$ szakaszt és az m egyenesnek más-más oldalára esenek. Ez esetben az e, g egyenesek párhuzamosak egymással akkor és csak akkor, ha ez a két szög egyenlő.*

Bizonyítás.
Tegyük fel, hogy az M, N csúcsoknál kiválasztott szögek egyenlőek. Ekkor az e, g egyenesek nem metszhetik egymást, mert ellenkező esetben a metszésponttal és M, N pontokkal, mint csúcsokkal, meghatározott háromszögben a szögösszeg nagyobb lenne 180°-nál. Ebből viszont már következik, hogy e és g párhuzamosak.

Tegyük fel most azt, hogy e és g párhuzamos egyenesek. Vegyük az $\overline{MN}$ szakasz



27. ábra. *Két egysíkú egyenes párhuzamosságának jellemzése szögekkel.*

F felezőpontját. Az F pontra történő tükrözés egymásba képezi az e, g egyeneseket, továbbá felcseréli az m által határolt két félsíkot. Emiatt centrális tükrözés a két szöget is egymásba viszi. A két kijelölt szög tehát egybevágó, vagyis a mértékük egyenlő. $\square$

A továbbiakban egy n–oldalú sokszöget rövidebben csak n–szögnek nevezünk. Ha a sokszög oldalainak párhuzamosságáról szólunk, akkor ezen azt értjük, hogy az oldalakat tartalmazó egyenesek párhuzamosak egymással.

Tekintsünk egy négyszöget, melynek csúcsai sorrendben A, B, C és D. Ezt követően nevezzük ezt $ABCD$ négyszögnek. Világos, hogy az $ABCD$ négyszögnél az $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ oldalakat, továbbá a $\overline{BC}$, $\overline{DA}$ oldalakat hívjuk egymással szemközti oldalaknak.

Az alábbi tételt úgy lehet igazolni, ha felhasználjuk a háromszögek egybevágóságával kapcsolatos eredményeket, a centrális tükrözés módszerét és az 1.69. Állítást. A gyorsabb előrehaladás érdekében a bizonyítástól ezúttal eltekintünk.

1.70. Tétel. *Legyen adva egy $ABCD$ négyszög. A négyszöggel kapcsolatos alábbi kijelentések egyenértékűek egymással, vagyis ha egyikük igaz, akkor az összes többi teljesül.*
(1) A szemközti oldalak egyenesei egymással párhuzamosak.
(2) A négyszög átlói a felezőpontjukban metszik egymást.
(3) A négyszög szemközti oldalainak hossza egyenlő, azaz fennáll $AB = CD$ és $BC = DA$.
(4) A négyszögnek van két olyan szemközti oldala, amelyek párhuzamosak és egyenlőek.
(5) A négyszögben a szemközti szögek egyenlőek.

1.71. Definíció. Paralelogrammán egy olyan négyszöget értünk, amelynél a szemközti oldalak egyenesei egymással párhuzamosak.

Megjegyzés. A paralelogramma definíciójában az előző tétel (1) kijelentésének megfelelő tulajdonságot alkalmaztuk feltételként.

Későbbi vizsgálatainkban fontos szerephez jutnak majd a paralelogrammák, amelyek tulajdonságait az 1.70. Tétel írja le.

2) A hasonlósági transzformációk

A hasonlóság egy olyan transzformáció, amelynél bármely két térbeli pont képének távolsága egy rögzített számszorosa a két pont távolságának. Azonban annak igazolásához, hogy az euklideszi geometriában vannak olyan hasonlóságok is, amelyek nem egybevágósági transzformációk, szükség van a párhuzamos szelők és a párhuzamos szelőszakaszok tételére. Emiatt először ezen tételek bizonyítására kerül sor.

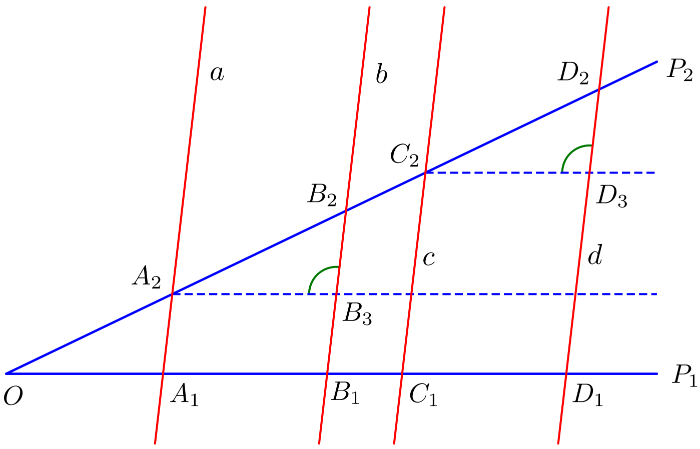
A párhuzamos szelők és a párhuzamos szelőszakaszok tétele

Az alábbi állítás bizonyításában azt a tényt használjuk fel, hogy a parallelogramma szemközti oldalai egyenlő hosszúságúak.

2.1. Állítás. *Legyen adott egy nem elfajuló $P_1OP_2\angle$ szögvonal, amelynek szárait rendre elmetszik az egymással párhuzamos a, b, c, d egyenesek. Jelöljék A_i, B_i, C_i, D_i $(i = 1, 2)$ a megfelelő metszéspontokat. Ha teljesül az $A_1B_1 = C_1D_1$ egyenlőség, akkor $A_2B_2 = C_2D_2$ is igaz.*

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy a párhuzamos egyenesek által az első száron lemetszett szakaszokra fennáll $A_1B_1 = C_1D_1$.



28. ábra. *A 2.1. Állítás bizonyításának szemléltetése.*

A jelöléseket válasszuk meg oly módon, hogy az A_1 pont közelebb legyen az O csúcshoz, mint a B_1 pont, továbbá a C_1 pont közelebb legyen az O csúcshoz, mint a D_1 pont. Vegyük azon A_2 és C_2 kezdőpontú félegyeneseket, amelyek egyező irányúak az $[O, P_1\rangle$ félegyenessel. Az A_2 kezdőpontú félegyenesnek a b–vel vett metszéspontja legyen B_3, továbbá a C_2 kezdőpontú félegyenesnek a d–vel vett metszéspontját jelölje D_3.

Az $A_1B_1B_3A_2$ négyszögben és a $C_1D_1D_3C_2$ négyszögben a szemközti oldalak párhuzamosak, tehát mindkét négyszög paralelogramma. Az 1.70. Tétel szerint ekkor teljesül $A_1B_1 = A_2B_3$ és $C_1D_1 = C_2D_3$. Ebből viszont $A_2B_3 = C_2D_3$ következik.

Tekintsük az $A_2B_3B_2\triangle$ és $C_2D_3D_2\triangle$ háromszögeket. Vegyük észre, hogy a $B_3A_2B_2\sphericalangle$, $D_3C_2D_2\sphericalangle$ szögek, illetve az $A_2B_3B_2\sphericalangle$, $C_2D_3D_2\sphericalangle$ szögek egyállású szögpárokat képeznek, tehát egyenlőek. Emiatt az 1.39. Tételből már adódik, hogy fennáll az

$A_2B_3B_2\triangle \cong C_2D_3D_2\triangle$ egybevágóság. Ily módon azt kapjuk, hogy igaz az $A_2B_2 = C_2D_2$ összefüggés. $\square$

A fenti állításon alapul a következő nevezetes tételnek (a párhuzamos szelők tételének) bizonyítása.

2.2. Tétel. *Legyen adott egy $P_1OP_2\angle$ szögvonal és olyan a, b ($a \neq b$) egyenesek, amelyek a szög szárait az O csúcstól különböző pontokban metszik. Tekintsük az $A_i = [O, P_i\rangle \cap a$, $B_i = [O, P_i\rangle \cap b$ $(i = 1, 2)$ metszéspontokat. Ez esetben az a, b egyenesek párhuzamosak egymással akkor és csak akkor, ha fennáll az $\dfrac{OB_1}{OA_1} = \dfrac{OB_2}{OA_2}$ összefüggés.*

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy a szög szárait metsző a, b egyenesek párhuzamosak.

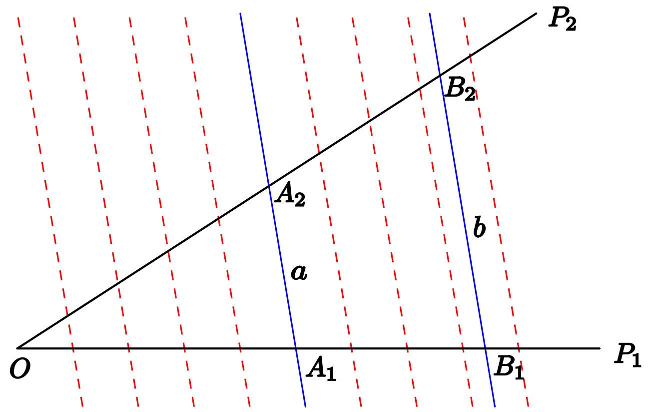
Vegyünk egy m pozitív egész számot. Az $\overline{OA_1}$ szakaszt osszuk fel m számú egyenlő részre. Tekintsük az így nyert $\dfrac{OA_1}{m}$ hosszúságú részszakaszok végpontjain áthaladó azon egyeneseket, amelyek párhuzamosak a–val. Az előző 2.1. Állítás szerint ezen egyeneseknek az $[O, P_2\rangle$ szárral vett metszéspontjai az $\overline{OA_2}$ szakaszt osztják fel m egyenlő részre. Az OB_1 szakaszhosszt véve evidens, hogy egyértelműen létezik egy olyan n nemnegatív egész szám, amellyel teljesül

$$n\,\frac{OA_1}{m} \leq OB_1 < (n+1)\,\frac{OA_1}{m}\,.$$

Amennyiben a fenti egyenlőtlenségben osztást végzünk az OA_1 pozitív számmal, az

$$\frac{n}{m} \leq \frac{OB_1}{OA_1} < \frac{n+1}{m}$$

összefüggéshez jutunk.



29. ábra. *Szemléltető ábra a 2.2. Tétel bizonyításához ($m = 5$ eset).*

Az O csúcsból kiindulva mérjük fel $(n+1)$–szer az $\dfrac{OA_1}{m}$ hosszt az $[O, P_1\rangle$ szárra, és a felmérések által kapott részszakaszok összes végpontján át húzzunk párhuzamosat az a–val. Ismét alkalmazva a 2.1. Állítást belátható, hogy fennáll

$$n\,\frac{OA_2}{m} \leq OB_2 < (n+1)\,\frac{OA_2}{m}\,.$$

Osszuk el a fenti összefüggésben szereplő értékeket az OA_2 pozitív számmal. Ily módon azt kapjuk, hogy teljesül

$$\frac{n}{m} \leq \frac{OB_2}{OA_2} < \frac{n+1}{m}.$$

Beláttuk, hogy az $\dfrac{OB_1}{OA_1}$ és $\dfrac{OB_2}{OA_2}$ hányadosok egyaránt nem kisebbek az $\dfrac{n}{m}$ számnál, viszont kisebbek az $\dfrac{n+1}{m}$ számnál. Ennek következtében a különbségükre igaz az

$$\left|\frac{OB_1}{OA_1} - \frac{OB_2}{OA_2}\right| < \frac{1}{m}$$

egyenlőtlenség. Mivel ez bármilyen nagy m pozitív egész szám esetén teljesül, a két hányados különbsége csakis 0 lehet. Ily módon igazoltuk, hogy az a, b párhuzamos egyenesek által lemetszett szakaszok hosszaira fennáll $\dfrac{OB_1}{OA_1} = \dfrac{OB_2}{OA_2}$.

Fordított irányban egyszerű a bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $P_1OP_2\angle$ szögvonal szárait metsző a, b egyenesek esetében a lemetszett szakaszok hosszaira igaz az $\dfrac{OB_1}{OA_1} = \dfrac{OB_2}{OA_2}$ egyenlőség.

Mint ismeretes, a B_1 ponton át pontosan egy olyan egyenes halad, amely párhuzamos a–val. Jelölje most c ezt párhuzamost. Ennek az $[O, P_2\rangle$ szárral vett metszéspontja legyen C_2. A fentiek során beláttuk, hogy az a, c egyenesek párhuzamossága miatt $\dfrac{OB_1}{OA_1} = \dfrac{OC_2}{OA_2}$ teljesül. Ezáltal azt kapjuk, hogy fennáll $OB_2 = OC_2$, amiből $B_2 = C_2$ adódik. A c tehát átmegy a B_1, B_2 pontokon, ezért c azonos b–vel. Ez pedig azt jelenti, hogy a b egyenes párhuzamos a–val. □

Megjegyzés. A fenti tételben szereplő $\dfrac{OB_1}{OA_1} = \dfrac{OB_2}{OA_2}$ összefüggésből már könnyen levezethető $\dfrac{A_1B_1}{OA_1} = \dfrac{A_2B_2}{OA_2}$ és $\dfrac{A_1B_1}{OB_1} = \dfrac{A_2B_2}{OB_2}$ teljesülése is.

Megjegyzés. Köznapi szóhasználatban a párhuzamos szelők tételét az alábbiak szerint is szokták említeni. Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metszük el, akkor az egyik száron kimetszett szakaszok hosszainak aránya megegyezik a másik száron kimetszett megfelelő szeletek arányával.

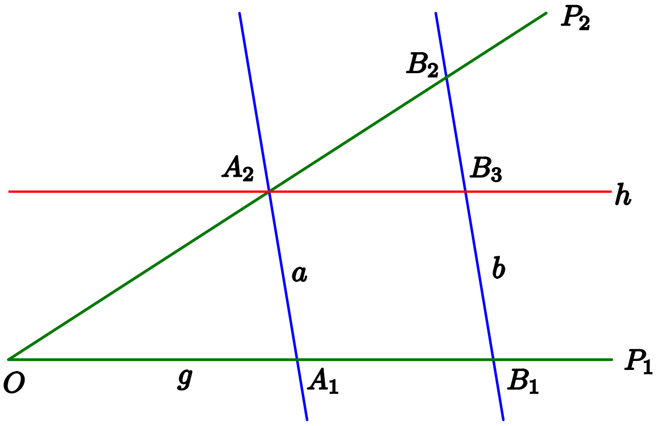
Vegyük észre, hogy a 2.2. Tétel ennél egy jóval erősebb állítást mond ki annak ellenére, hogy csak két metsző egyenesről szól.

Az alábbi tételt, amely valójában következménye az előzőnek, a *párhuzamos szelőszakaszok tételének* szokás nevezni.

2.3. Tétel. *Legyen adott egy $P_1OP_2\angle$ szögvonal és olyan a, b $(a \neq b)$ párhuzamos egyenesek, amelyek a szög szárait az O csúcstól különböző pontokban metszik. Tekintsük az $A_i = [O, P_i\rangle \cap a$, $B_i = [O, P_i\rangle \cap b$ $(i = 1, 2)$ metszéspontokat. Ez esetben fennállnak a $\dfrac{B_1B_2}{A_1A_2} = \dfrac{OB_2}{OA_2}$ és $\dfrac{B_1B_2}{A_1A_2} = \dfrac{OB_1}{OA_1}$ összefüggések.*

Bizonyítás.

Az általánosság elvét nem sértjük azzal, ha feltesszük, hogy az A_2 metszéspont közelebb van az O csúcshoz, mint a B_2 pont.



30. ábra. *Szemléltetés a 2.3. Tétel bizonyításához.*

Az $[O, P_1\rangle$ szárat tartalmazó egyenes legyen g. Tekintsük azt az A_2 ponton áthaladó h egyenest, amely párhuzamos a g–vel. Jelölje B_3 a b, h egyenesek metszéspontját. Vegyük észre, hogy az $A_1B_1B_3A_2$ négyszög egy parallelogramma, és ennek következtében fennáll $A_1A_2 = B_1B_3$.

Alkalmazzuk most a 2.2. Tételt a $B_1B_2O\angle$ szögvonalra és a g, h párhuzamos szelőkre. Ily módon azt nyerjük, hogy $\dfrac{B_1B_2}{B_1B_3} = \dfrac{OB_2}{OA_2}$ teljesül. Felhasználva, hogy igaz $B_1B_3 = A_1A_2$, a $\dfrac{B_1B_2}{A_1A_2} = \dfrac{OB_2}{OA_2}$ egyenlőséghez jutunk. A 2.2. Tétel alapján pedig fennáll a $\dfrac{B_1B_2}{A_1A_2} = \dfrac{OB_1}{OA_1}$ összefüggés is. $\square$

A hasonlósági transzformációk értelmezése

2.4. Definíció. Egy $\eta : X \to X$ bijektív leképezést hasonlósági transzformációnak (vagy más szóval hasonlóságnak) nevezünk, ha van olyan λ pozitív valós szám, hogy tetszőleges A, B pontok esetén fennáll a $d(\eta(A), \eta(B)) = \lambda \cdot d(A, B)$ összefüggés.

Amennyiben a η leképezés egy hasonlóság, akkor a λ számot az η arányának mondjuk.

Megjegyzés. Az előző definícióból adódóan igazak az alábbi kijelentések. *Amennyiben az η hasonlóság aránya 1 (vagyis $\lambda = 1$), akkor η egy egybevágóság.*

Egy η hasonlósági transzformáció η^{-1} inverz leképezése egy olyan hasonlóság, amelynek az aránya $\frac{1}{\lambda}$.

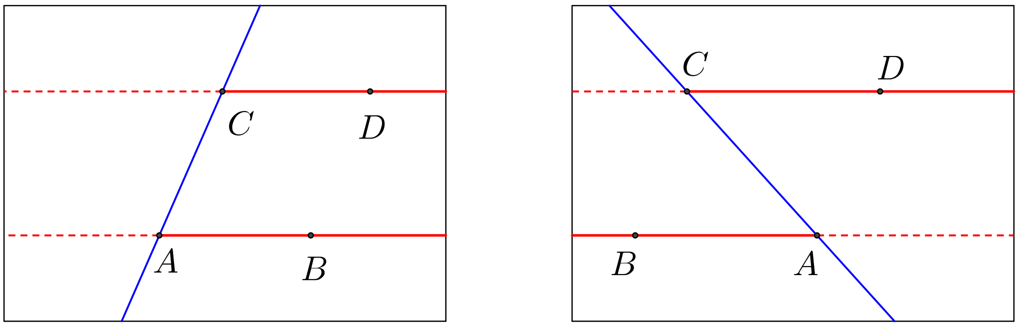
Legyenek η_1, η_2 olyan hasonlósági transzformációk, amelyek aránya λ_1, illetve λ_2. Ekkor a $\eta_2 \circ \eta_1 : X \to X$ leképezés egy olyan hasonlóságot ad, amelynek aránya $\lambda_2 \lambda_1$.

Megjegyzés. Azonban felvetődik a kérdés, hogy vannak–e olyan hasonlóságok, amelyeknek az arányszáma különbözik 1–től (vagyis amelyek nem egybevágóságok). Természetesen meg lehet mutatni, hogy a válasz igenlő.

Az egyező irányú és ellentétes irányú félegyenesek

A további vizsgálatokban majd alkalmazni fogunk két ismert fogalmat a félegyenesekkel kapcsolatosan. Ezeket célszerűnek tartjuk egzakt módon definiálni.

2.5. Definíció. Legyenek adva a térben az A, B és C, D pontok, amelyekre fennáll $A \neq B$ és $C \neq D$. Azt mondjuk, hogy az $[A, B\,\rangle$ és $[C, D\,\rangle$ félegyenesek egyező irányúak (vagy más szóval azonos irányúak), ha az alábbi két feltétel közül az egyik teljesül.
(1) Az egyik félegyenes tartalmazza a másikat.
(2) Az $\langle\, A, B\,\rangle$, $\langle\, C, D\,\rangle$ egyenesek párhuzamosak egymással és az $\langle\, A, C\,\rangle$ egyenes nem választja el a B, D pontokat.



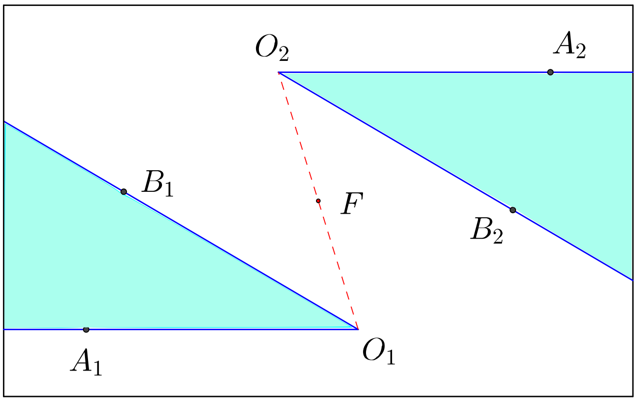
31. ábra. *Egyező irányú és ellentétes irányú* $[A, B\,\rangle$, $[C, D\,\rangle$ *félegyenesek.*

2.6. Definíció. Legyenek adva a térben az A, B és C, D pontok, amelyekre fennáll $A \neq B$ és $C \neq D$. Azt mondjuk, hogy az $[A, B\,\rangle$ és $[C, D\,\rangle$ félegyenesek ellentétes irányúak, ha az alábbi két feltétel közül az egyik teljesül.
(1) A két félegyenes egyazon egyenesen van és egyik félegyenes sem tartalmazza a másikat.
(2) Az $\langle\, A, B\,\rangle$, $\langle\, C, D\,\rangle$ egyenesek párhuzamosak egymással és az $\langle\, A, C\,\rangle$ egyenes elválasztja a B, D pontokat.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a centrális tükrözés egy félegyenest azzal ellentétes irányú félegyenesbe képez.

Az alábbi jólismert fogalmak a szögpárokra vonatkoznak.

2.7. Definíció. Legyenek adva az $A_1O_1B_1\sphericalangle$ és $A_2O_2B_2\sphericalangle$ konvex szögek. Ezekről azt mondjuk, hogy egyállású szögpárt képeznek, ha az $[O_1, A_1\rangle$ félegyenes egyező irányú az $[O_2, A_2\rangle$ szárral és az $[O_1, B_1\rangle$ félegyenes azonos irányú az $[O_2, B_2\rangle$ szárral. Amennyiben a $A_1O_1B_1\sphericalangle$ és $A_2O_2B_2\sphericalangle$ szögek megfelelő szárai ellentétes irányúak, akkor azt mondjuk, hogy $A_1O_1B_1\sphericalangle$ és $A_2O_2B_2\sphericalangle$ egy váltószögpárt alkotnak.



32. ábra. *Az $A_1O_1B_1\sphericalangle$ és $A_2O_2B_2\sphericalangle$ váltószögek.*

Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy amennyiben az $A_1O_1B_1\sphericalangle$ és $A_2O_2B_2\sphericalangle$ szögek váltószögpárt vagy egyállású szögpárt képeznek, akkor a két szög egybevágó. Ugyanis, váltószögpár esetén az $\overline{O_1O_2}$ szakasz F felezőpontjára való tükrözés a két szöget egymásba képezi. (Lásd a 32. ábrát.)

Ha $A_1O_1B_1\sphericalangle$ és $A_2O_2B_2\sphericalangle$ egyállású szögpárt alkotnak, akkor az $\overline{O_1O_2}$ szakasz felezőpontjára és az O_2 pontra való tükrözések szorzata viszi az első szöget a másodikba.

A középpontos hasonlóságok

Az euklideszi geometria felépítésében fontos szerepet játszanak a centrális hasonlóságok.

2.8. Definíció. Legyen adott a térben egy O pont és egy λ ($\lambda \neq 0$) valós szám. Az O centrummal és λ előjeles aránnyal meghatározott középpontos hasonlóságon (vagy más szóval centrális hasonlóságon) azt a $\kappa : X \to X$ leképezést értjük, ahol $\kappa(O) = O$ és egy tetszőleges P ($P \neq O$) pont $P' = \kappa(P)$ képét az alábbi feltételek határozzák meg:
(1) Ha $\lambda > 0$, akkor P' rajta van az $[O, P\rangle$ félegyenesen. Amennyiben $\lambda < 0$, akkor P' az $\langle O, P\rangle$ egyenesnek a másik O kezdőpontú félegyenesén van.
(2) Az O, P' pontok távolságára fennáll a $d(O, P') = |\lambda| \cdot d(O, P)$ összefüggés.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a középpontos hasonlóság önmagukba képezi az O centrumon áthaladó egyeneseket és síkokat.

Világos, hogy amennyiben a középpontos hasonlóság előjeles aránya -1, akkor az megegyezik az O pontra való tükrözéssel

A fenti definíció alapján könnyű belátni azt is, hogy igaz az alábbi kijelentés.

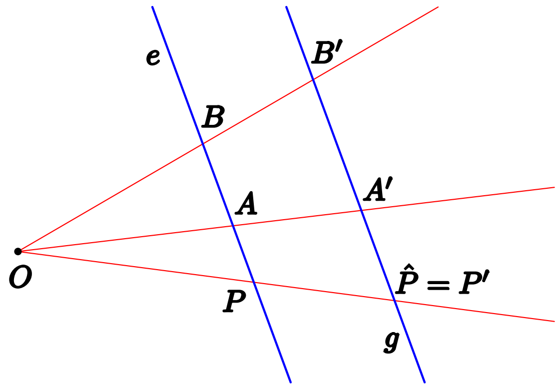
2.9. Állítás. *Legyen adott egy $\kappa : X \to X$ középpontos hasonlóság, melynek centruma az O pont és előjeles aránya λ. Tekintsük a térnek az O pontra történő $\tau : X \to X$ tükrözését. Ez esetben a $\kappa \circ \tau = \tau \circ \kappa$ szorzatleképezés azt a centrális hasonlóságot adja, amelynek középpontja O és előjeles aránya $-\lambda$.*

A következő tétel bizonyításában fel fogjuk használni a párhuzamos szelők és a párhuzamos szelőszakaszok tételét.

2.10. Tétel. *Egy O középponttal és egy λ ($\lambda \neq 0$) előjeles aránnyal meghatározott $\kappa : X \to X$ középpontos hasonlóságra igazak az alábbi kijelentések.*
(1) A κ leképezés egy hasonlósági transzformáció az $|\lambda|$ aránnyal.
(2) A κ bármely egyenest azzal párhuzamos egyenesbe vagy önmagába, szakaszt szakaszba képez.
(3) A κ leképezés tetszőleges síkot azzal párhuzamos síkba vagy önmagába képez.
(4) A κ egy félegyenest azzal egyező irányú félegyenesbe képez, ha fennáll $\lambda > 0$. Ha a λ értéke negatív, akkor κ egy félegyenest azzal ellentétes irányú félegyenesbe visz.

Bizonyítás.
Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor a λ előjeles arány egy pozitív szám. Tegyük fel azt is, hogy $\lambda \neq 1$, azaz $\kappa \neq id$.
(1) Azt kell igazolnunk, hogy tetszőleges A, B pontokra fennáll a $d(\kappa(A), \kappa(B)) = \lambda \cdot d(A, B)$ összefüggés. Könnyen be lehet látni, hogy ez az egyenlőség teljesül, ha az O, A, B pontok kollineárisak.

Legyenek A és B ($A \neq B$) olyan pontok, amelyek $e = \langle A, B\rangle$ egyenese nem megy át O–n. Tekintsük a két pont képén áthaladó $g = \langle A', B'\rangle$ egyenest. Alkalmazzuk a 2.2. Tételt az $AOB\angle$ szögvonalra és a szárakat metsző e, g egyenesekre. Mivel igaz $\lambda = \dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB}$, azt kapjuk, hogy az e, g egyenesek párhuzamosak egymással.



33. ábra. *A 2.10. Tétel bizonyításának szemléltetése.*

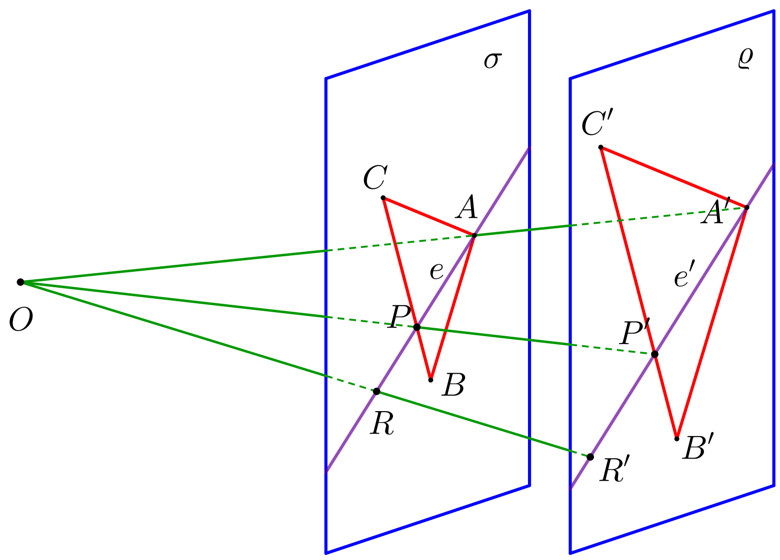
Tekintsük most az $AOB\angle$ szögvonalhoz tartozó $\overline{AB}$ és $\overline{A'B'}$ szelőszakaszokat. Ezekre a 2.3. Tétel alapján fennáll az $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{OA'}{OA} = \lambda$, összefüggés, amiből már adódik $A'B' = \lambda \cdot AB$ teljesülése.

(2) Evidens, hogy amennyiben egy egyenes áthalad az O ponton, akkor annak a κ szerinti képe önmaga. Tekintsünk most egy olyan e egyenest, amely nem megy át O–n. Vegyük az e egyenesen két pontját A–t és B–t, továbbá ezen pontok képeit. Mint az a fentiek során már kiderült, az e, g egyenesek párhuzamosak egymással. Legyen P egy tetszőleges pont az e–n, és az $\langle O, P\rangle$ egyenes messe el g–t a $\hat{P}$ pontban. Alkalmazva 2.3. Tételt az

$AOP\angle$ szögvonalra az $\dfrac{O\hat{P}}{OP} = \dfrac{OA'}{OA} = \lambda$ összefüggéshez jutunk. Eszerint fennáll $\hat{P} = P'$, vagyis a $P' = \kappa(P)$ képpont rajta van g–n. Ily módon beláttuk, hogy κ az e egyenest a vele párhuzamos g egyenesbe képezi.

Az eddig leírtakból már az is következik, hogy egy szakasz képe megegyezik a végpontok képeit összekötő szakasszal.

(3) Azt már beláttuk, hogy a κ bármely egyenest azzal párhuzamos egyenesbe vagy önmagába képez. Az egyenestartó tulajdonság alapján fogjuk most igazolni, hogy a centrális hasonlóság síkot síkba képezi.



34. ábra. *A középpontos hasonlóság szemléltető ábrája.*

Vegyünk a térben egy σ síkot és azon három nem kollineáris pontot, melyek legyenek A, B és C. Tekintsük az $A' = \kappa(A)$, $B' = \kappa(B)$ és $C' = \kappa(C)$ képpontokat, továbbá a hozzájuk illeszkedő síkot, melyet jelöljön ϱ. Legyen P a σ síknak egy olyan egy pontja, amely rajta van az $ABC\triangle$ háromszög egyik oldalegyenesén. Világos, hogy a P' képpont az $A'B'C'\triangle$ háromszög egyik oldalegyenesére esik. (Lásd a 34. ábrát.)

Válasszunk egy olyan σ–beli R pontot, amely nincs rajta az $ABC\triangle$ egyik oldalegyenesén sem. Vegyünk egy olyan a P–re illeszkedő e egyenest, amely áthalad az $ABC\triangle$ egyik csúcsán és elmetszi az azzal szemközti oldalegyenest egy P pontban. Mivel az $e' = \kappa(e)$ egyenesnek és ϱ–nak van két közös pontja, e' benne van a ϱ síkban. Ebből már következik, hogy az $R' = \kappa(R)$ pontot is tartalmazza ϱ. Ezzel beláttuk, hogy fennáll $\kappa(\sigma) = \varrho$.

Amennyiben a σ sík nem megy át az O centrumon, akkor könnyű belátni, hogy σ–nak és ϱ–nak nem lehet közös pontja. Ez viszont azt jelenti, hogy a σ és ϱ párhuzamosak.

(4) A félegyenesek κ szerinti képeire vonatkozó kijelentés teljesülése már nyilvánvaló.

Tekintsük most azt az esetet, amikor $\lambda < 0$.
Vegyük azt a $\tilde{\kappa}$ középpontos hasonlóságot, amelynek centruma O és előjeles aránya $|\lambda|$. A fentiek során igazoltuk, hogy a $\tilde{\kappa}$ transzformációra teljesülnek az (1), (2), (3) és (4) kijelentések. A 2.9. Állításnak megfelelően fennáll a $\kappa = \tau \circ \tilde{\kappa}$ összefüggés, amelyben τ az O pontra tükrözés. Mivel τ egy távoságtartó transzformáció, vagyis egybevágóság, azt kapjuk, hogy bármely A, B pontokra teljesül:
$d(\kappa(A), \kappa(B)) = d(\tau(\tilde{\kappa}(A)), \tau(\tilde{\kappa}(B))) = d(\tilde{\kappa}(A), \tilde{\kappa}(B)) = |\lambda| \cdot d(A, B)$.
Ebből már adódik, hogy κ egy hasonlósági transzformáció az $|\lambda|$ aránnyal. (Ehhez lásd a 2.4. Definíciót.)

Mivel a (2) és (3) kijelentések teljesülnek a τ és $\tilde{\kappa}$ transzformációkra, igazak a $\kappa = \tau \circ \tilde{\kappa}$ transzformáció esetében is.

A τ pontra tükrözés egy félegyenest vele ellentétes irányú félegyenesbe képez. Emiatt a (4) kijelentés is teljesül a κ középpontos hasonlóságra. $\square$

A 2.10. Tétel alapján azt már könnyű belátni, hogy a centrális hasonlóság félsíkot félsíkba, szögvonalat szögvonalba és szögtartományt szögtartományba képez.

Vegyük észre, hogy a 2.10. Tétel (4) kijelentése következtében az alábbi megállapítást tehetjük a szögekre vonatkozóan.
2.11. Állítás. *Legyen adott egy κ középpontos hasonlóság, amelynek az aránya λ. Ha fennáll $\lambda > 0$, akkor a κ bármely szöget azzal egyállású szögbe képez. Ha pedig $\lambda < 0$ teljesül, akkor egy szög és annak a κ szerinti képe váltószögpárt alkotnak.*

Megjegyzés. A vizsgálataink során tehát beláttuk, hogy a középpontos hasonlóság egy szögtartományt vele egybevágó szögtartományba képez, vagyis megőrzi a szögek mértékét.

A hasonlósági transzformációk jellemzése

Az alábbi tárgyalásunk fő célja annak igazolása, hogy a hasonlósági transzformáció egy szöget azzal egyenlő mértékű szögbe képez. Ehhez majd fel fogjuk használni a következő tételt is.
2.12. Tétel. *Egy λ arányú η hasonlósági transzformáció mindig előáll egy φ egybevágóság és egy λ arányú κ középpontos hasonlóság $\varphi \circ \kappa$ szorzataként.*
Bizonyítás.
Legyen adva egy $\eta : X \to X$ hasonlóság, amelynek az aránya λ.

Válasszunk a térben egy O pontot. Tekintsük azt a $\hat{\kappa}$ középpontos hasonlóságot. amelynek a centruma O és az aránya $\frac{1}{\lambda}$. Ekkor az $\eta \circ \hat{\kappa}$ szorzatleképezés egy olyan hasonlósági transzformáció, amelynek az aránya 1. Eszerint a $\varphi = \eta \circ \hat{\kappa}$ leképezés egy egybevágóság.

Vegyük most azt a κ középpontos hasonlóságot. amelynek szintén az O pont a centruma, de az aránya λ. Nyilvánvaló, hogy κ és $\hat{\kappa}$ inverz–leképezései egymásnak, vagyis fennáll $\hat{\kappa} \circ \kappa = id$. Ezáltal azt kapjuk, hogy $\varphi \circ \kappa = (\eta \circ \hat{\kappa}) \circ \kappa = \eta \circ (\hat{\kappa} \circ \kappa) = \eta \circ id = \eta$ teljesül. Ily módon beláttuk, hogy η előáll a φ egybevágóság és a κ centrális hasonlóság szorzataként, vagyis igaz $\eta = \varphi \circ \kappa$. $\square$

Megjegyzés. A fenti bizonyítási eljárás alapján igazolható, hogy az η hasonlóság előáll az $\eta = \kappa \circ \varphi$ szorzat alakjában is. Ez esetben előbb a φ egybevágóságot hajtjuk végre, majd azt követően a κ középpontos hasonlóságot.

Megjegyzés. A középiskolai oktatásban a hasonlósági transzformációt úgy szokták értelmezni, mint egy középpontos hasonlóság és egy egybevágóság egymás utáni végrehajtásával nyert transzformációt.

Az előző eredmények alapján már be tudjuk bizonyítani, hogy a hasonlóság egy szögtartományt azzal egybevágó szögbe képez.

2.13. Tétel. *Tetszőleges η hasonlóságra teljesülnek az alábbi kijelentések.*
(1) Egyenest egyenesbe, szakaszt szakaszba és síkot síkba képez, továbbá η megőrzi az egyenesek és a síkok párhuzamosságát.
(2) Bármely szöget azzal egyenlő mértékű szögbe képez.

Bizonyítás.
Vegyünk egy $\eta : X \to X$ hasonlósági transzformációt. A 2.12. Tétel alapján van olyan φ egybevágóság és κ középpontos hasonlóság, hogy η megegyezik ezek $\varphi \circ \kappa$ szorzatával, azaz fennáll $\eta = \varphi \circ \kappa$. Az előző vizsgálataink során már beláttuk, hogy κ–ra igazak az (1), (2) kijelentések. Emellett ezek teljesülnek bármely egybevágósági transzformációra. Ennek következtében (1) és (2) igazak az $\eta = \varphi \circ \kappa$ hasonlóságra is. □

A háromszögek hasonlóságának feltételei

A hasonló háromszögek vizsgálatához előbb be kell vezetnünk a hasonló alakzatok fogalmát. Maga a definíció egyébként kézenfekvő.

2.14. Definíció. Legyen adva két alakzat $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$. Ezeket egymással hasonlóaknak mondjuk, ha van olyan $\eta : X \to X$ hasonlósági transzformáció, amellyel fennáll $\eta(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

Megjegyzés. Amennyiben az $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ alakzatok hasonlóak, akkor az $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ szimbólummal jelöljük ezt a közöttük fennálló kapcsolatot.

Megjegyzés. Világos, hogy bármely két kör (illetve bármely két gömb) egymással hasonló alakzatok.

A hasonlóságok alapvető tulajdonsága az, hogy megőrzik a szögtartományok mértékét. Emiatt a hasonló háromszögek esetében igaz az alábbi kijelentés.

2.15. Állítás. *Legyenek $A_1B_1C_1\triangle$ és $A_2B_2C_2\triangle$ olyan háromszögek, melyekhez létezik olyan $\eta : X \to X$ hasonlósági transzformáció, hogy fennáll $\eta(A_1) = A_2$, $\eta(B_1) = B_2$ és $\eta(C_1) = C_2$. Ekkor a háromszögek szögeire és oldalaira teljesülnek az*
$\alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2,\ \gamma_1 = \gamma_2$ *és* $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{c_2}{c_1}$ *összefüggések.*

Bizonyítás.
Világos, hogy az η hasonlóság az első háromszöget a másodikba viszi. Mivel a hasonlóság szögtartó, a háromszögek szögei páronként egyenlőek.

Jelölje λ az η hasonlóságnak az arányát. Mivel η az $A_1B_1C_1\triangle$ oldalait az $A_2B_2C_2\triangle$ oldalaiba képezi, fennáll $a_2 = \lambda \cdot a_1$, $b_2 = \lambda \cdot b_1$ és $c_2 = \lambda \cdot c_1$. Ezekből pedig adódik, hogy teljesül $\lambda = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{c_2}{c_1}$. □

A következő alapvető tétel két háromszög hasonlóságához ad meg elégséges és egyúttal szükséges feltételeket.

2.16. Tétel. *Legyen adott két háromszög $A_1B_1C_1\triangle$ és $A_2B_2C_2\triangle$. Létezik olyan hasonlóság, amely az A_1 pontot A_2–be, a B_1 pontot B_2–be és a C_1 pontot C_2–be viszi, amennyiben az alábbi négy feltételrendszer közül legalább az egyik teljesül:*

(1) $\alpha_1 = \alpha_2$ *és* $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{c_2}{c_1}$.

(2) $\alpha_1 = \alpha_2$ *és* $\beta_1 = \beta_2$.

(3) $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1}$ *és* $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{c_2}{c_1}$.

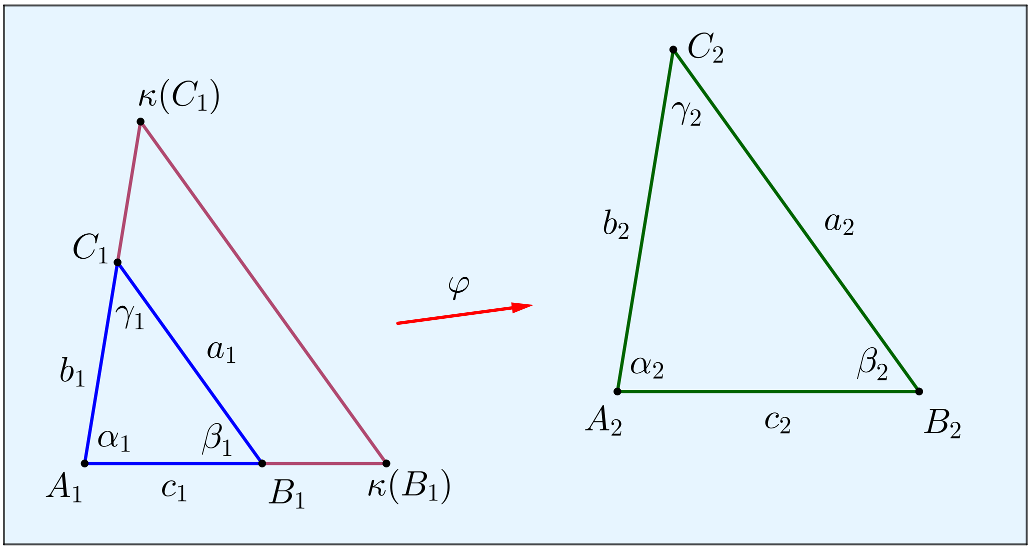
(4) $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{c_2}{c_1}$ *és* $\beta_1 = \beta_2$, *továbbá* $b_1 \geq c_1$.

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy a megadott négy feltétel közül az egyik teljesül.

Vegyük azt a κ középpontos hasonlóságot, amelynek centruma az A_1 csúcs és az aránya $\lambda = \dfrac{c_2}{c_1}$. Az első háromszög csúcsainak a κ szerinti képei legyenek $\hat{A}_1 = A_1$, $\hat{B}_1 = \kappa(B_1)$ és $\hat{C}_1 = \kappa(C_1)$. Világos, hogy az $\hat{A}_1\hat{B}_1\hat{C}_1\triangle$ háromszög $\hat{c}_1 = \hat{A}_1\hat{B}_1$ oldalára fennáll $\hat{c}_1 = c_2$, a szögeire pedig igaz $\hat{\alpha}_1 = \alpha_1$, $\hat{\beta}_1 = \beta_1$ és $\hat{\gamma}_1 = \gamma_1$.

Tekintsük az $\hat{A}_1\hat{B}_1\hat{C}_1\triangle$ és $A_2B_2C_2\triangle$ háromszögek megegyező geometriai adatait. Az 1.39. és 1.53. Tételek felhasználásával mind a négy esetben belátható, hogy van olyan φ egybevágósági transzformáció, amely az $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$, $\hat{C}_1$ ponthármast az A_2, B_2, C_2 ponthármasba képezi, vagyis az $\hat{A}_1\hat{B}_1\hat{C}_1\triangle$ háromszöget az $A_2B_2C_2\triangle$ háromszögbe viszi. Vegyük most a $\eta = \varphi \circ \kappa$ szorzatleképezést. Világos, hogy ezen η hasonlósági transzformációra teljesül $\eta(A_1) = A_2$, $\eta(B_1) = B_2$ és $\eta(C_1) = C_2$, ami igazolja a tételt. $\square$



35. ábra. *Szemléltetés a 2.16. Tétel bizonyításához.*

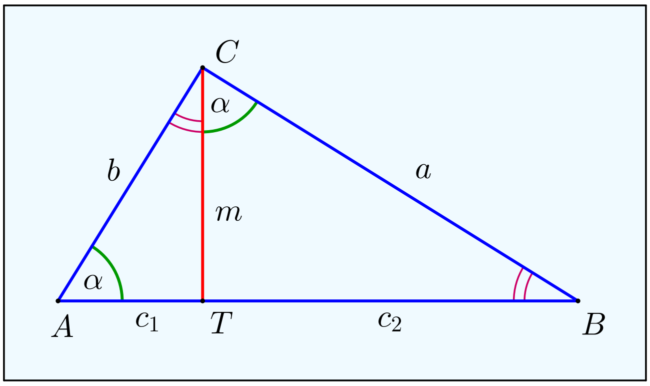
A Pitagorasz–tétel igazolása hasonlósággal

Mint ismeretes, egy háromszöget akkor mondunk derékszögűnek, ha az egyik szöge derékszög. Az előző tétel felhasználásával már könnyen igazolni lehet a következő közismert eredményt, Pitagorasz tételét.

2.17. Tétel. *Ha egy $ABC\triangle$ háromszögben a C csúcsbeli szög derékszög, akkor az oldalakra fennáll az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés.*

Bizonyítás.

Vegyünk egy olyan $ABC\triangle$ háromszöget, amelyben a C csúcsbeli szög derékszög, vagyis $\gamma = 90°$. A C csúcsból az $\langle A, B\rangle$ oldalegyeneshez húzott merőleges szakasz talppontja legyen T. Vezessük be a $c_1 = AT$, $c_2 = TB$ jelöléseket.



36. ábra. *Szemléltetés a Pitagorasz–tétel bizonyításához.*

Tekintsük az $ACT\triangle$ és $BCT\triangle$ derékszögű háromszögeket. Mivel egy derékszögű háromszögben a két hegyesszög összege 90°, azt kapjuk, hogy fennáll $ACT\sphericalangle = \beta$ és $BCT\sphericalangle = \alpha$. Mivel az $ACT\triangle$ és $ABC\triangle$ háromszögekben a szögek páronként egyenlőek, a 2.16. Tétel szerint ezek hasonlóak egymással, vagyis fennáll $ACT\triangle \sim ABC\triangle$. A 2.15. Állítás alapján a háromszögek megfelelő oldalainak hányadosai egyenlőek, azaz teljesül $\dfrac{b}{c_1} = \dfrac{c}{b}$, amiből a $b^2 = c_1\, c$ összefüggés adódik. Világos, hogy a $BCT\triangle$, $BAC\triangle$ háromszögek is hasonlóak. Ez alapján pedig azt nyerjük, hogy fennáll $\dfrac{a}{c_2} = \dfrac{c}{a}$, illetve $a^2 = c_2\, c$. A fenti eredmények következtében igaz az

$$a^2 + b^2 = c_2\, c + c_1\, c = (c_1 + c_2)c = c^2$$

összefüggés. □

Megjegyzés. Ismeretes, hogy a derékszögű háromszögben a derékszöggel szemközti oldalt átfogónak, a másik két oldalt pedig befogónak nevezzük.

Az előző bizonyítás során beláttuk, hogy az $ABC\triangle$ derékszögű háromszög a, b befogóira fennállnak az $a^2 = c_2\, c$ és $b^2 = c_1\, c$ összefüggések. Ezeket a befogótétel néven szokás említeni. Eszerint *a derékszögű háromszög bármelyik befogója mértani közepe az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének.*

Megjegyzés. Alkalmazzuk a 2.17. Tétel bizonyításában szereplő jelöléseket. (Lásd a 36. ábrát.) Világos, hogy az $ACT\triangle$, $CBT\triangle$ háromszögek is hasonlóak egymással. Emiatt a derékszögű C csúcshoz tartozó m magasságra fennáll $m/c_2 = c_1/m$, amiből az $m^2 = c_1 c_2$ összefüggés adódik. Mint ismeretes, ezt nevezik magasságtételnek.

Eddigi ismereteink alapján már könnyen igazolható a Pitagorasz–tétel megfordítása.

2.18. Állítás. *Ha egy $ABC\triangle$ háromszög oldalaira fennáll az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés, akkor a háromszög C csúcsbeli szöge derékszög.*

Bizonyítás.
Legyen adva egy olyan $ABC\triangle$ háromszög, amelynek oldalaira teljesül az $a^2 + b^2 = c^2$ egyenlőség.

Tekintsünk egy olyan $A_1B_1C_1\triangle$ háromszöget, melynek C_1 csúcsbeli szöge derékszög és a C_1B_1, C_1A_1 oldalaira fennáll $C_1B_1 = CB = a$, $C_1A_1 = CA = b$. Világos, hogy létezik ilyen $A_1B_1C_1\triangle$ háromszög. A Pitagorasz-tétel miatt az $A_1B_1C_1\triangle$ derékszögű háromszög harmadik oldalára igaz $(A_1B_1)^2 = a^2 + b^2 = c^2 = AB^2$. Emiatt az $A_1B_1C_1\triangle$ és $ABC\triangle$ háromszögek oldalai páronként egyenlőek. A 1.53. Tétel alapján van olyan φ egybevágóság, amely az A_1, B_1, C_1 ponthármast az A, B, C ponthármasba viszi, tehát az egyik háromszöget a másikba képezi. Ebből már következik, hogy az $ABC\triangle$ háromszögnek a C csúcsbeli szögére fennáll $ACB\sphericalangle = A_1C_1B_1\sphericalangle = 90°$. $\square$

Háromszögre vonatkozó állítások igazolása hasonlósággal

Legyen adva egy $ABC\triangle$ háromszög. Ismeretes, hogy a háromszög oldalainak felező merőlegesei a háromszög köré írt kör O centrumában metszik egymást. A háromszög S súlypontja a három súlyvonal közös pontja, amely harmadolja a súlyvonalakat. A magasságvonalak M metszéspontját hívjuk magasságpontnak. A szögfelező félegyenesek Q metszéspontja adja a beírt kör középpontját. Az O, S, M, Q pontokat szokás a háromszög nevezetes pontjainak nevezni. Mint látni fogjuk, a négy nevetes pont közül három egy egyenesen van.

Az következő állítás igazolásához a középpontos hasonlóságot fogjuk alkalmazni.

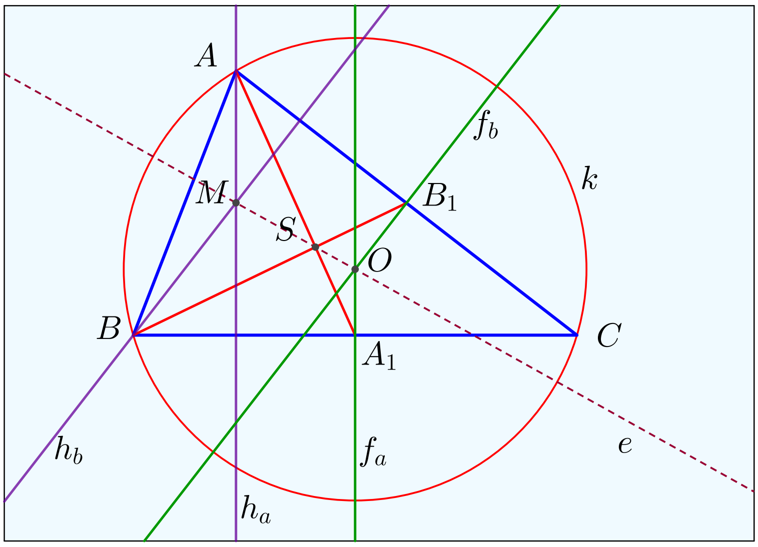
2.18. Állítás. *Tetszőleges $ABC\triangle$ háromszögre igaz, hogy az S súlypont rajta van az OM szakaszon és fennáll az* $OS = \dfrac{1}{3}OM$ *összefüggés.*

Bizonyítás.
Az $ABC\triangle$ háromszög oldalfelező merőlegesei legyenek az f_a, f_b, f_c egyenesek. Ezek O közös pontja az $ABC\triangle$ köré írt kör középpontja. Az $ABC\triangle$ magasságvonalait jelölje h_a, h_b és h_c.

Mivel ezek az egyenesek merőlegesek a háromszög oldalaira, h_a párhuzamos a f_a–val, h_b párhuzamos az f_b–vel és h_c párhuzamos az f_c–vel.

A háromszög oldalfelező pontjai legyenek A_1, B_1 és C_1. Ismeretes, hogy az $\overline{AA_1}$, $\overline{BA_1}$ és $\overline{CC_1}$ súlyvonalak S metszéspontjára fennállnak az $SA = 2\cdot SA_1$, $SB = 2\cdot SB_1$, $SC = 2\cdot SC_1$ egyenlőségek.

Tekintsük azt a κ középpontos hasonlóságot, amelynek centruma az S súlypont és az előjeles aránya $\lambda = -2$. Világos, hogy a fenti összefüggések miatt κ az oldalfelező pontokat a csúcspontokba viszi, vagyis $\kappa(A_1) = A,\ \kappa(B_1) = B,\ \kappa(C_1) = C$ teljesül.



37. ábra. *Szemléltetés a 2.18. Állítás bizonyításához.*

A 2.10. Tételnél beláttuk, hogy a centrális hasonlóság egy egyenest vele párhuzamos egyenesbe vagy önmagába képez. Ily módon az oldalfelező merőlegesek és a magasságvonalak párhuzamosságából adódik, hogy fennáll $\kappa(f_a) = h_a,\ \kappa(f_b) = h_b,\ \kappa(f_c) = h_c$.

Világos, hogy a κ transzformáció az $f_a,\ f_b$ egyenesek $O = f_a \cap f_b$ metszéspontját, a $h_a,\ h_b$ képegyenesek metszéspontjába viszi, ami éppen az M magasságpont. Eszerint a $\lambda = -2$ előjeles arányú κ középpontos hasonlóságra $\kappa(O) = M$ teljesül. Ennek következtében az S centrum rajta van az $\overline{OM}$ szakaszon és a szakaszhosszakra igaz $SM = 2 \cdot SO$, amiből az $OS = \dfrac{1}{3} OM$ egyenlőség már közvetlenül adódik. $\square$

Megjegyzés. Mint ismeretes, egy ABC háromszöget akkor nevezünk szabályosnak, ha a oldalai egyenlőek. Könnyen be lehet látni, hogy egy $ABC\triangle$ pontosan akkor szabályos, ha az $O,\ S$ pontok egybeesnek.

A fentiek alapján be lehet vezetni egy új fogalmat a háromszögekre.

2.19. Definíció. Legyen adva egy olyan ABC háromszög, amely nem szabályos. Azt az egyenest, amely áthalad a háromszöghöz tartozó $O,\ S,\ M$ pontokon az ABC háromszög Euler–egyenesének mondjuk.

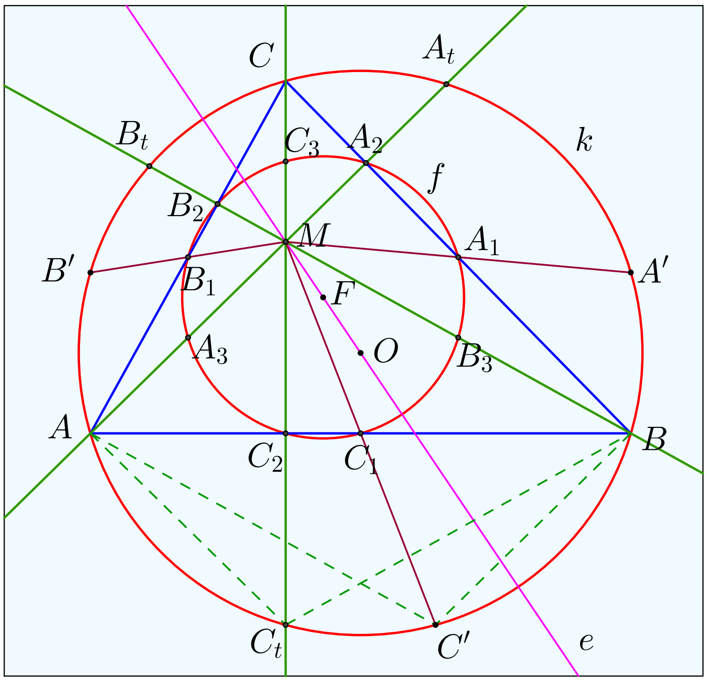
A háromszög Feuerbach-köre

Tekintsünk egy $ABC\triangle$ háromszöget. Jelölje O a háromszög köré írt k kör centrumát és M a magasságpontot. Az A, B, C csúcsokkal szemközti oldalak felezőpontjai legyenek A_1, B_1 és C_1. A csúcsokból az oldalegyenesekhez húzott merőleges magasságszakaszok talppontjait jelölje A_2, B_2 és C_2. Az M pontot az A, B, C csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai legyenek A_3, B_3 és C_3.

2.20. Állítás. *Az A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2, 3)$ pontok egy körre illeszkednek. Ezen kör centruma megegyezik az OM szakasz felezőpontjával, sugara pedig a k kör sugarának fele.*

Bizonyítás. Először azt igazoljuk, hogy ha az M pontot az oldalegyenesekre és az oldalak felezőpontjaira tükrözzük, akkor a képpontok rajta vannak a k körön. *Vegyük azt az esetet, amikor $ABC\triangle$ hegyesszögű.*

Válasszuk a C-vel szemközti oldalt és annak C_1 felezőpontját. A B_2MA_2C négyszög húrnégyszög, mivel két szemközti szöge derékszög. Emiatt fennáll
$AMB\sphericalangle = 180° - \gamma$. Az M pontnak az AB oldalegyenesre vonatkozó tükörképe legyen C_t. A tükrözés egybevágóság, tehát teljesül $AC_tB\sphericalangle = 180° - \gamma$. Világos, hogy az AC_tBC négyszög egy húrnégyszög, hiszen a C_t és C csúcsbeli szögek összege $180°$. Ebből már következik, hogy C_t is rajta van az A, B, C csúcsokon átmenő k körön.



38. ábra. *Az $ABC\triangle$ háromszög f Feuerbach-köre.*

Az M magasságpontot tükrözzük most a C_1 felezőpontra. Jelölje C' az így nyert képpontot. Evidens, hogy ez a centrális tükrözés az $AMB\sphericalangle$ szöget a $BC'A\sphericalangle$ szögbe képezi, hiszen az A, B csúcsokat felcseréli. Emiatt fennáll $BC'A\sphericalangle = 180° - \gamma$. Eszerint az $AC'BC$ négyszög is egy húrnégyszög, amiből következik, hogy a C' pont is a k körön van.

Az M magasságpontot tükrözzük a BC, CA oldalak egyenesére is, és az így nyert képpontokat jelölje A_t, B_t. Az M–nek az A_1, B_1 pontokra vonatkozó tükörképei pedig legyenek A', B'. Világos, hogy az A_t, B_t és A', B' pontok is rajta vannak az $ABC\triangle$ köré írt k körön.

Vegyük azt a κ középpontos hasonlóságot, amelynek centruma M és aránya $\lambda = 1/2$. Ez a transzformáció a k kört egy fele akkora sugarú körbe képezi. Az $f = \kappa(k)$ képkör középpontja a $\kappa(O) = F$ pont, amely felezi az MO szakaszt. A κ hasonlóság az A', B', C' pontokat az A_1, B_1, C_1 pontokba, az A_t, B_t, C_t pontokat az A_2, B_2, C_2 pontokba, az A, B, C csúcsokat az A_3, B_3, C_3 pontokba képezi. Emiatt az A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2, 3)$ pontok mind rajta vannak az f körön. $\square$

2.21. Definíció. Legyen adva egy ABC háromszög. Azt a kört, amely áthalad az oldalfelező pontokon, a magasságszakaszok talppontjain és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjain az ABC háromszög Feuerbach–körének nevezzük.

Megjegyzés. Az előző bizonyítás során azt is igazoltuk, hogy az f Feuerbach–kör centruma megegyezik az $\overline{OM}$ szakasz F felezőpontjával és sugara fele a háromszög köré írt kör sugarának.

3) Egyenesek és síkok hajlásszöge, távolsága

Két sík hajlásszöge

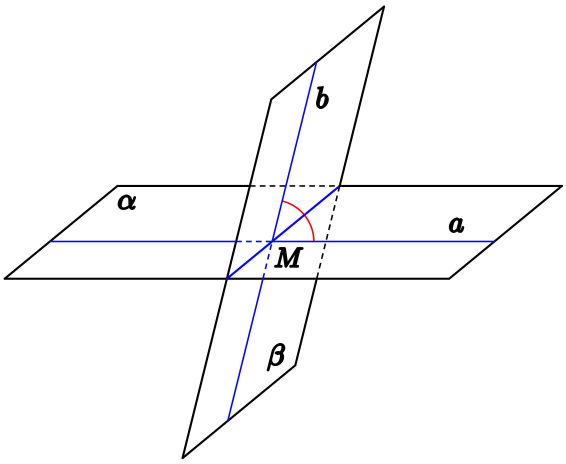
Két metsző egyenes hajlászögének fogalmát az 1.49. Definícióban adtuk meg. A fogalom kiterjeszthető a kitérő helyzetű egyenesekre is. Emlékezzünk rá, hogy két egyenest akkor mondunk kitérőnek, ha nincs olyan sík, amely mindkét egyenest tartalmazza.

3.1. Definíció. Legyenek adva az a és b kitérő helyzetű egyenesek. Válasszunk ki a térben egy P pontot. A P ponton átmenő és az a, b egyenesekkel párhuzamos egyeneseket jelölje a_1, b_1. Az a, b egyenesek hajlásszögén az a_1, b_1 metsző egyenesek szögét értjük.

Megjegyzés. A centrális tükrözés módszerével belátható, hogy a szög nem függ a P pont megválasztásától. Ugyanis, vegyünk a térben egy másik Q pontot és a rajta áthaladó azon a_2, b_2 egyeneseket, amelyek párhuzamosak a–val és b–vel. Ekkor a PQ szakasz F felezőpontjára történő tükrözés egymásba viszi az a_1, b_1 és a_2, b_2 egyenespárokat.

Az alábbiak során két metsző sík hajlásszögét is értelmezzük.

3.2. Definíció. Legyenek adva az α, β síkok, amelyek egy m egyenesben metszik egymást. Vegyük az m–nek egy tetszőleges M pontját. Tekintsük azokat az M–n áthaladó a, b egyeneseket, amelyek merőlegesek az m metszésvonalra és amelyekre fennáll $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$. Az α, β síkok hajlásszögén az a, b metsző egyenesek hajlásszögét értjük.



39. ábra. *Két metsző sík hajlásszöge.*

Megjegyzés. A centrális tükrözés alkalmazásával igazolható, hogy a fenti definícióban szereplő a, b egyenesek hajlásszögének mértéke nem függ a metszésvonal M pontjának megválasztásától.

3.3. Definíció. Két metsző síkot egymásra merőlegesnek mondunk, ha a hajlásszögük derékszög (más szóval ha a hajlásszögük 90°).

Megjegyzés. Amennyiben az α, β síkok merőlegesek egymásra, akkor ezt az $\alpha \perp \beta$ szimbólummal szokás jelölni. A továbbiakban az a, b egyenesek merőlegességének jelölésére az $a \perp b$ szimbólumot használjuk majd.

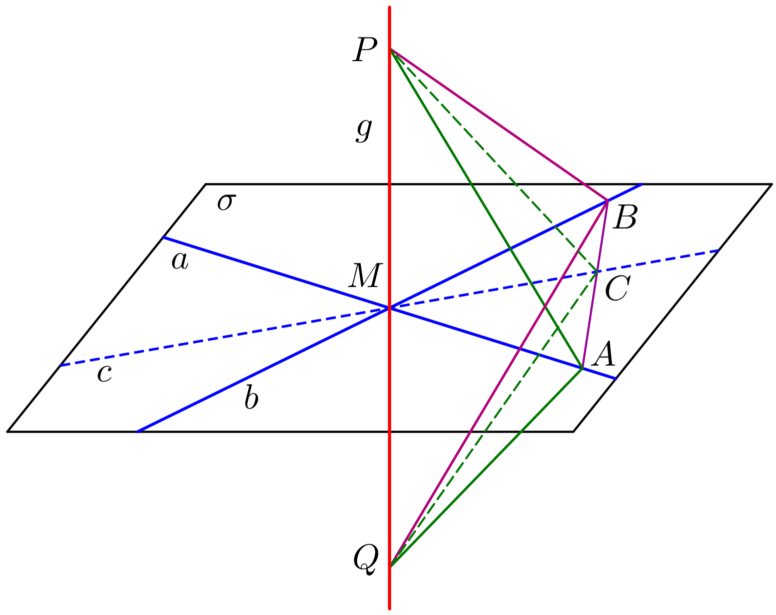
Egyenes és sík merőlegessége

Ahhoz, hogy definiálni tudjuk egy egyenes és egy sík hajlásszögét, előbb az egyenes és a sík merőlegességének fogalmát kell tisztáznunk. Az alábbi fontos tételt a háromszögek egybevágóságával kapcsolatos eredmények segítségével fogjuk bizonyítani.

3.4. Tétel. *Legyen adott egy σ sík és egy g egyenes, amelyek metszik egymást egy M pontban. Ha a σ síkban van két olyan az M metszésponton áthaladó egyenes, amelyek merőlegesek g–re, akkor g merőleges az összes olyan egyenesre, amely benne van σ–ban és áthalad M–n.*

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy a σ sík a, b egyenesei illeszkednek az M pontra és merőlegesek g–re, azaz fennáll $a \perp g$ és $b \perp g$.



40. ábra. *A tétel bizonyításának szemléltetése.*

Vegyük a σ–nak egy további c egyenesét, amely átmegy M–n. Tekintsük a c által tartalmazott M kezdőpontú félegyenesek egyikét. Az a, b egyenesek a σ síkot felosztják négy olyan szögtartományra, melyek közös csúcspontja M. Vegyük közülük azt a szöget, amelyik tartalmazza a kijelölt félegyenest. A szárakon tekintsük az M–től különböző A, B ($A \in a$, $B \in b$) pontokat. Jelöljük ki a $C = \overline{AB} \cap c$ metszéspontot. Ezt követően vegyünk a g egyenesen két olyan P, Q ($P \neq Q$) pontot, melyekre igaz az, hogy a $\overline{PQ}$ szakasz felezőpontja azonos M–mel. Ily módon teljesül $PM = QM$.

Az $AMP\sphericalangle$, $AMQ\sphericalangle$, $BMP\sphericalangle$, $BMQ\sphericalangle$ szögek mindegyike derékszög a feltevés szerint. Az 1.39. Tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy $AMP\triangle$ egybevágó az $AMQ\triangle$ háromszöggel és $BMP\triangle$ egybevágó a $BMQ\triangle$ háromszöggel. Ily módon fennáll $AP = AQ$ és $BP = BQ$. Az 1.53. Tétel alapján pedig be lehet látni, hogy fennáll az $ABP\triangle \simeq ABQ\triangle$ egybevágóság, mivel a két háromszög megfelelő oldalai páronként egyenlő hosszúságúak. Ennek következtében teljesül $PAB\sphericalangle = QAB\sphericalangle$.

A fentiek szerint a $PAC\triangle$, $QAC\triangle$ háromszögekben két–két oldal hossza megegyezik és ezen oldalak által bezárt szögek is egyenlőek. Ennek következtében fennáll az $PAC\triangle \simeq QAC\triangle$ egybevágóság, tehát igaz a $PC = QC$ összefüggés is. Végül az 1.53. Tétel ismételt alkalmazásával belátható, hogy $PMC\triangle$ és $QMC\triangle$ egybevágó háromszögek. Eszerint a $PMC\sphericalangle$, $QMC\sphericalangle$ szögek egyenlőek. Mivel ezek mellékszögei egymásnak, azt nyerjük, hogy a c, g egyenesek hajlásszöge derékszög. □

A 3.4. Tétel fontos szerephez jut a további tárgyalásban. A tétel szerint ha egy g egyenes merőleges egy σ sík két metsző egyenesére, akkor g merőleges az összes σ–beli egyenesre. Ennek ismeretében értelmezzük egyenes és sík merőlegességét.

3.5. Definíció. Egy g egyenesről és egy σ síkról azt mondjuk, hogy azok merőlegesek egymásra, ha metszőek és a metszésponton áthaladó összes σ–beli egyenes merőleges g–re.

A 3.4. Tételt felhasználva már könnyen igazolni tudjuk az alábbi kijelentést.

3.6. Állítás. *Legyen adva két sík α és β. Ha az α sík tartalmaz egy olyan egyenest, amely merőleges a β síkra, akkor az α, β metsző síkok hajlásszöge derékszög.*

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy az α sík tartalmaz egy olyan a egyenest, amely merőleges a β síkra. A két sík metszésvonalát jelölje m, az a egyenesnek a β–val vett metszéspontját pedig jelölje M. Vegyük azt a b egyenest a β síkban, amely áthalad az M ponton és merőleges az m metszésvonalra. Mivel a merőleges az összes β–beli egyenesre, az a merőleges m–re és merőleges b–re is. A 3.2. Definíció alapján az α, β metsző síkok szögét az a, b metsző egyenesek szöge adja, ami esetünkben derékszög. □

A 3.4. Tétel egy másik következménye az alábbi állítás is, melynek egyszerű bizonyítását az olvasóra bízzuk.

3.7. Állítás. *Legyen adott két metsző sík α és β, melyek hajlásszöge derékszög. Ha g egy olyan egyenes az α síkban, amely merőleges az $m = \alpha \cap \beta$ metszésvonalra, akkor g a β síkra is merőleges.*

Választ tudunk adni arra kérdésre, hogy amennyiben adott egy pont és egy egyenes, akkor hány olyan sík van, amely átmegy a ponton és merőleges az adott egyenesre.

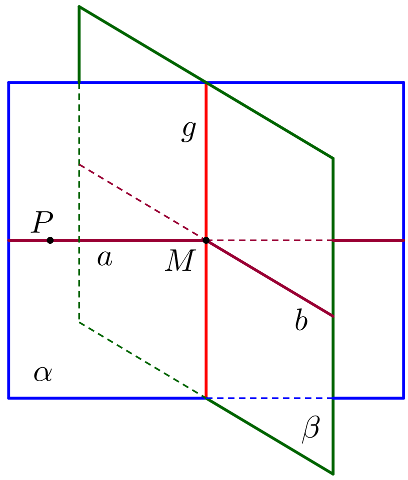
3.8. Tétel. *Legyen adott a térben egy g egyenes és egy P pont. Egyértelműen létezik egy olyan sík, amelyik illeszkedik a P ponthoz és merőleges g–re.*

Bizonyítás.

A merőleges sík létezésének igazolása.

Tegyük fel, hogy P nincs rajta a g egyenesen. A g egyenest és a P pontot tartalmazó $\alpha = \langle g, P \rangle$ síkban vegyük azt az a egyenest, amely áthalad P–n és merőleges g–re. (Lásd a 41. ábrát.) Jelölje M a g, a egyenesek metszéspontját. Ezt követően vegyünk egy olyan β síkot, amely tartalmazza g-t és különbözik α–tól. A β–ban tekintsük azt a b egyenest, amely ugyancsak merőleges g–re és átmegy az M ponton. Az a, b metsző egyeneseket tartalmazó $\sigma = \langle a, b \rangle$ sík a 3.4. Tétel szerint merőleges g–re, továbbá illeszkedik a P ponthoz.

Amennyiben $P \in g$ teljesül, akkor vegyünk két olyan síkot (α és β), amelyek tartalmazzák a g egyenest. Tekintsük a két síkban azokat az a, b egyeneseket ($a \subset \alpha$, $b \subset \beta$),



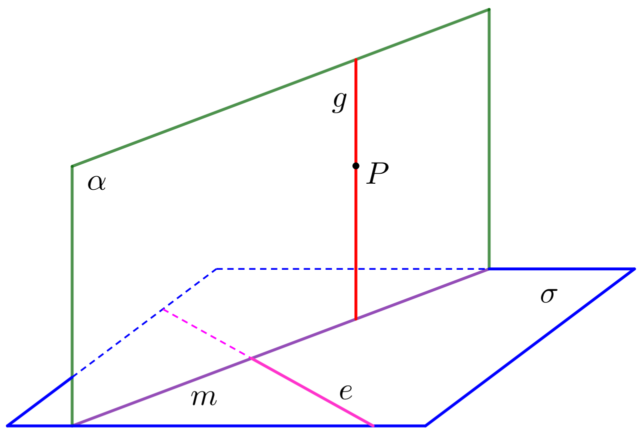
41. ábra. *A 3.8. Tétel bizonyításának szemléltetése:* $\sigma = \langle a, b \rangle$ *a* g*–re merőleges sík.*

amelyek áthaladnak P–n és merőlegesek g–re. Az a, b metsző egyeneseket tartalmazó $\sigma = \langle\, a, b \,\rangle$ sík ez esetben is merőleges lesz a g egyenesre.
Az egyértelműség igazolása.
Az indirekt bizonyítás módszerét alkalmazzuk. Tegyük fel, hogy a P ponthoz illeszkedik két olyan sík σ_1 és σ_2, amelyek merőlegesek g–re.

Amennyiben az $M_1 = g \cap \sigma_1$, $M_2 = g \cap \sigma_2$ pontok különbözőek, akkor a $PM_1M_2\triangle$ háromszögben két derékszög is van, ami viszont ellentmond az 1.44. Tételnek.

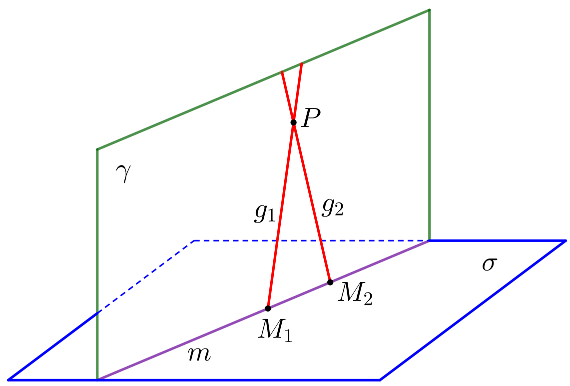
Tekintsük most azt az esetet, amikor az $m = \sigma_1 \cap \sigma_2$ metszésvonal metszi a g egyenest egy M pontban. Vegyünk egy olyan γ síkot, amely tartalmazza g–t, de nem illeszkedik m–hez. Ekkor a γ síkban lévő $h_1 = \gamma \cap \sigma_1$, $h_2 = \gamma \cap \sigma_2$ egyenesek merőlegesek g–re és áthaladnak az M ponton, ami ellentmond az 1.33. Állításnak. Ezzel pedig igazoltuk, hogy az a kiindulási feltevés, miszerint létezik két P–n átmenő és g–re merőleges sík, nem teljesülhet. $\square$

A következő tétel szintén összhangban van a szemléletünkkel.
3.9. Tétel. *Legyen adott a térben egy* σ *sík és egy* P *pont. Egyértelműen létezik egy olyan egyenes, amely áthalad a* P *ponton és merőleges a* σ *síkra.*
Bizonyítás.
A merőleges egyenes létezésének igazolása.
Vegyünk a σ síkban egy e egyenest. Alkalmazzuk az előző 3.8. Tételt. Eszerint pontosan egy olyan sík van, amely tartalmazza a P pontot és merőleges az e egyenesre. Jelölje α ezt a P–hez illeszkedő és az e–re merőleges síkot. (Lásd a 42. ábrát.) Mivel a σ sík tartalmaz egy az α–ra merőleges egyenest, a σ és α síkok merőlegesek egymásra a 3.6. Állítás miatt. Jelölje m az α és σ síkok metszésvonalát. Tekintsük azt a g egyenest az α síkban, amely áthalad a P ponton és merőleges az m metszésvonalra. A 3.7. Állítás következtében ez a g egyenes merőleges a σ síkra.



42. ábra. *A 3.9. Tételnél a létezés bizonyításának szemléltetése.*

Az egyértelműség igazolása.
Az egyértelműséget az indirekt bizonyítás módszerével igazoljuk. Tegyük fel, hogy a P ponton áthalad két olyan egyenes g_1 és g_2, amelyek merőlegesek σ–ra.



43. ábra. *A 3.9. Tételnél az egyértelműség bizonyításának szemléltetése.*

Vegyük a g_1, g_2 metsző egyenesek által meghatározott $\gamma = \langle g_1, g_2 \rangle$ síkot és az $m = \sigma \cap \gamma$ egyenest. Amennyiben a P pont nincs rajta a σ síkon, akkor az $M_1 = g \cap \sigma_1$, $M_2 = g \cap \sigma_2$ metszéspontok különbözőek. Ez esetben a $PM_1M_2\triangle$ háromszögben két derékszög is van, ami egyből ellentmondáshoz vezet.

Ha a P pont illeszkedik a σ–ra, akkor a γ síkban két olyan egyenes is átmegy a P ponton, amely merőleges az m metszésvonalra. Ez a tény viszont ellentmond az 1.33. Állításnak, tehát a kiindulási feltevés ezúttal sem teljesülhet. $\square$

3.10. Állítás. *Legyenek adva a térben az e, g egyenesek és egy σ sík. Igazak az alábbi kijelentések.*
(1) Ha az e, g egyenesek egyaránt merőlegesek a σ síkra, akkor e és g párhuzamosak.
(2) Ha az e, g egyenesek párhuzamosak egymással és e merőleges σ–ra, akkor g is merőleges a σ síkra.
Bizonyítás.
(1) Legyenek e és g ($e \neq g$) olyan egyenesek, amelyek merőlegesek σ–ra. A 3.9. Tételből adódik, hogy e–nek és g–nek nincs közös pontja. Vegyük a g egyenes egy P pontját, majd vegyük az e–hez és a P–hez illeszkedő $\alpha = \langle e, P\rangle$ síkot. Mivel α tartalmazza a σ–ra merőleges e egyenest, a 3.6. Állítás szerint az α, σ síkok merőlegesek egymásra. Tekintsük az $m = \alpha \cap \sigma$ metszésvonalat és α–ban azt a P–n átmenő h egyenest, amely merőleges az m egyenesre. A 3.7. Állítást alkalmazva azt kapjuk, hogy a h egyenes merőleges σ–ra. Emiatt a 3.9. Tételből következik, hogy fennáll $g = h$. Eszerint az e, g egyenesek egyaránt benne vannak az α síkban és nincs közös pontjuk, ami azt jelenti, hogy párhuzamosak.
Az állításban szereplő (2) kijelentés könnyen igazolható a centrális tükrözés módszerével.
$\square$

A 3.7. Állítás és a 3.9. Tétel következménye az alábbi kijelentés.
3.11. Állítás. *Legyen adott két metsző sík α és σ, melyek hajlásszöge derékszög. Ha a g egyenes merőleges a σ síkra és g–nek van az α–val közös pontja, akkor a g egyenes benne van az α síkban.*

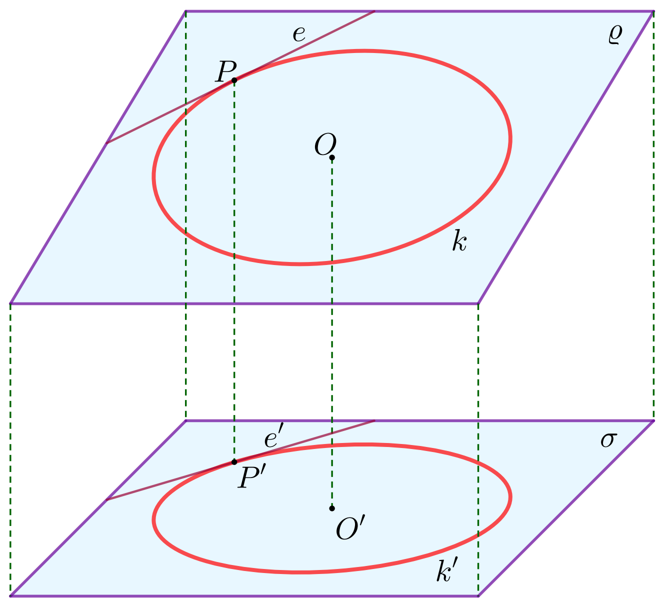
A síkra történő merőleges vetítés

A 3.9. Tétel ismeretében már definiálni tudjuk, hogy mit értük egy pont adott síkra eső merőleges vetületén.
3.12. Definíció. Legyen adott a térben egy σ sík és egy P pont. Tekintsük azt az egyértelműen létező g egyenest, amely illeszkedik P–hez és merőleges σ–ra. A $P' = g \cap \sigma$ metszéspontot a P pont σ–ra eső merőleges vetületének mondjuk.

Megjegyzés. Ha adva van egy derékszögű háromszög, akkor a háromszögben derékszöggel szemközti oldal a leghosszabb. Ebből már következik, hogy igaz az alábbi kijelentés. *Legyen adott egy P pont és egy σ sík. Tekintsük P–nek a σ síkra eső P' merőleges vetületét. A P pontot a σ síkkal összekötő szakaszok között $\overline{PP'}$ a legrövidebb.*

Értelmezni lehet egy alakzatnak egy adott síkra eső merőleges vetületét is.
3.13. Definíció. Legyen adott a térben egy σ sík és egy $\mathcal{A}$ ponthalmaz. Tekintsük az $\mathcal{A}$ alakzat összes pontjának a σ–ra eső merőleges vetületét. Ezen vetületi pontok $\mathcal{A}'$ halmazát nevezzük az $\mathcal{A}$ alakzat σ–ra eső merőleges vetületének. (Lásd a 44. ábrát.)

Megjegyzés. Hasonló módon definiálni lehet egy pontnak (illetőleg egy alakzatnak) egy adott egyenesre eső merőleges vetületét.

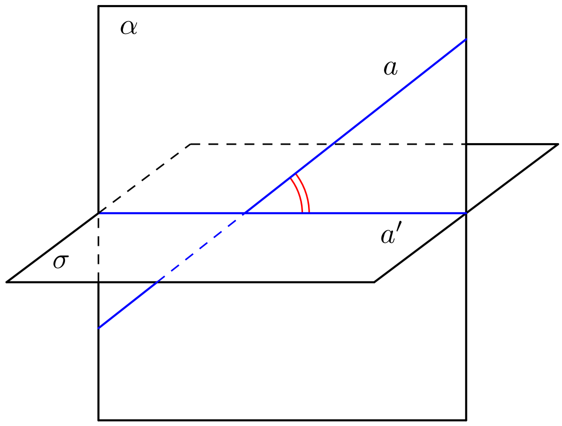


44. ábra. *Egy k kör k' merőleges vetülete egy σ síkon.*

Metsző egyenes és sík hajlásszöge

Az egyenes és a sík hajlásszögének értelmezéséhez fel fogjuk használni az alábbi állítást.
3.14. Állítás. *Legyen adott egy σ sík és egy a egyenes, amely nem merőleges σ–ra. Ez esetben igazak az alábbi kijelentések.*
(1) Pontosan egy olyan sík létezik, amely tartalmazza a–t és merőleges a σ síkra.
(2) Ennek a síknak a σ–val vett metszésvonala megegyezik az a egyenes σ síkra eső a' merőleges vetületével.
Bizonyítás.
(1) Tekintsük az a egyenes egyik P pontját, majd a P–hez illeszkedő és a σ–ra merőleges g egyenest. Az a, g metsző egyenesek által meghatározott $\alpha = \langle a, g \rangle$ sík a 3.6. Állítás szerint merőleges σ–ra. Mivel a keresett síknak tartalmaznia kell az a, g egyeneseket, evidens, hogy az α–n kívül már nincs további sík, amely eleget tesz a megadott feltételeknek.
(2) A 3.11. Állítás alapján adódik, hogy ha egy h egyenes merőleges σ–ra és átmegy az a egyenes valamelyik pontján, akkor h benne van az α síkban. Eszerint az a egyenes pontjainak a σ síkra eső merőleges vetületei rajta vannak az $\alpha \cap \sigma$ metszésvonalon. Ennek következtében fennáll $a' = \alpha \cap \sigma$. $\square$

3.15. Definíció. Legyen adott egy σ sík és egy a egyenes, amely metszi σ–t és nem merőleges σ–ra. Tekintsük a–nak a σ síkra eső a' merőleges vetületét. Az a egyenes és a σ sík hajlásszögén az a, a' metsző egyenesek hajlásszögét értjük.



45. ábra. *Az egymást metsző a egyenes és a σ sík hajlásszöge.*

Két alakzat távolsága

Kézenfekvőnek tűnik két ponthalmaz távolságát az alábbiak szerint értelmezni. Vegyük a két alakzat egy–egy pontját összekötő szakaszokat, és ezek közül a legrövidebb szakasz hosszát tekintsük a távolságnak. Azonban nem biztos, hogy a két alakzatot összekötő szakaszok között van legrövidebb. Ily módon a korrekt definícióhoz szükségünk van az alulról korlátos valós számhalmaz infimumának (vagy más szóval alsó határának) a fogalmára is. A szokásoknak megfelelően egy alulról korlátos $\mathcal{H}$ számhalmaz infimumát $\inf \mathcal{H}$ jelöli.

3.16. Definíció. Legyen adott két nemüres ponthalmaz $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$. Az $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ alakzatok távolságán a

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf \{\ PQ \ \mid \ P \in \mathcal{A},\ Q \in \mathcal{B}\ \}$$

kifejezéssel meghatározott nemnegatív számot értjük.

Pont távolsága egyenestől és síktól

Mint már utaltunk rá, a pontokat, az egyeneseket és a síkokat közös néven térelemeknek is szokás nevezni. Vizsgálataink során majd megmutatjuk, hogy két térelem között mindig van legrövidebb összekötő szakasz.

Vegyünk egy P pontot és egy arra nem illeszkedő e egyenest. Ekkor egyértelműen létezik olyan a P-n átmenő m egyenes, amely e-t derékszögben metszi. Jelöljük az e, m egyenesek metszéspontját T-vel.

Könnyű belátni, hogy a P pontot e-vel összekötő szakaszok között $\overline{PT}$ a legrövidebb. Vegyünk egy T-től különböző Q pontot az e egyenesen. Ekkor a $PTQ\triangle$ háromszögben a T csúcsnál lévő szög derékszög, amely nagyobb a másik két szögnél. Ily módon az 1.46. Állítás szerint a háromszög PQ oldala hosszabb, mint a PT oldal.

Következmény. *Egy pont és egy azt nem tartalmazó egyenes távolsága megegyezik a a pontból az egyeneshez húzott merőleges összekötő szakasz hosszával.*

Világos, hogy igaz az alábbi kijelentés is.

Következmény. *Egy pont és egy azt nem tartalmazó sík távolsága megegyezik a pontból a síkhoz húzott merőleges összekötő szakasz hosszával.*

Párhuzamos egyenesek és síkok távolsága

A következő állítás ugyan kézenfekvőnek tűnik, de ezúttal célszerűnek tartjuk megadni a bizonyítást is.

3.17. Állítás. *Legyen adott két egymással párhuzamos egyenes a és b. Az a egyenes valamely A_1, A_2 pontjaiból a b–hez húzott merőleges összekötő szakaszok talppontjai legyenek B_1 és B_2. Ekkor a szakaszokat tartalmazó egyenesek az a–t is derékszögben metszik és fennáll $A_1B_1 = A_2B_2$.*

Bizonyítás.

Mivel a és b párhuzamosak, van olyan σ sík, amely mindkét egyenest tartalmazza. Az a egyesen kiválasztott A_1, A_2 pontokon áthaladó és a b–re merőleges σ–beli egyenesek legyenek m_1, m_2. Ezek metsszék el a b egyenest a B_1, B_2 pontokban. Az 1.69. Állításból következik, hogy a b-re merőleges m_1 és m_2 egyenesek párhuzamosak egymással. Világos, hogy az $\overline{A_1B_2}$ szakasz F felezőpontjára történő tükrözés egymásba képezi a párhuzamos a, b és a m_1, m_2 egyeneseket. Emiatt a centrális tükrözés egymásba képezi az A_1, B_2 és A_2, B_1 pontokat, továbbá az $\overline{A_1B_1}$ és $\overline{B_2A_2}$ szakaszokat. Innen már következik, hogy teljesül az $A_1B_1 = A_2B_2$ egyenlőség, és m_1, m_2 az a egyenest is derékszögben metszik. □

A fenti állítás szerint két párhuzamos egyenes esetén vannak olyan összekötő szakaszok, amelyek mindkét egyenesre merőlegesek, és ezek hosszai egyenlőek. Világos, hogy a két egyenest összekötő szakaszok között ezek a legrövidebbek.

A 3.17. Állítás következtében igazak az alábbi kijelentések.

Következmény.

(1) Két párhuzamos egyenes távolsága megegyezik az egyik egyenes tetszőleges pontjának a másik egyenestől mért távolságával.

(2) Ha adva van egy egyenes és egy vele párhuzamos sík, akkor a távolságuk megegyezik az egyenes tetszőleges pontjának a síktól mért távolságával.

(3) Két párhuzamos sík távolsága megegyezik az egyik sík tetszőleges pontjának a másik síktól mért távolságával.

Két kitérő egyenes normáltranszverzálisa

A továbbiakban azt a kérdést tárgyaljuk, hogy két kitérő helyzetű egyeneshez létezik–e legrövidebb összekötő szakasz.

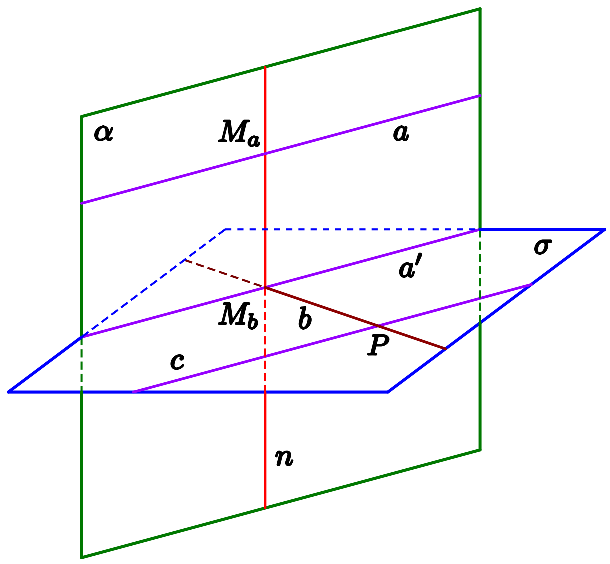
3.18. Állítás. *Legyen adott két kitérő egyenes a és b. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan egyenes, amely a–t és b–t egyaránt derékszögben metszi.*

Bizonyítás.

Vegyünk a b egyenesen egy P pontot. Jelölje c azt a P–n átmenő egyenest, amely párhuzamos az a–val. Tekintsük a b, c metsző egyeneseket tartalmazó $\sigma = \langle b, c\rangle$ síkot. A σ tartalmaz egy az a–val párhuzamos egyenest, nevezetesen a c–t, ezért a és σ párhuzamosak egymással.

A 3.14. Állításnak megfelelően vegyük azt az α síkot, amely tartalmazza a–t és merőleges σ–ra. Ismeretes, hogy az a–nak a σ síkra eső a' merőleges vetülete megegyezik az $\alpha \cap \sigma$ metszésvonallal. Evidens, hogy az a' vetületi egyenes párhuzamos a–val és c–vel.

Legyen M_b a σ–beli a' és b egyenesek metszéspontja. Vegyük azt az n egyenest, amely átmegy ezen M_b ponton és merőleges a σ síkra. Ezen n egyenes benne van α–ban és



46. ábra. *Szemléltetés a 3.18. Állítás bizonyításához.*

merőleges a σ–beli b, a' egyenesekre. Ebből már következik, hogy n az a egyenest is derékszögben metszi.

A fenti konstrukció alapján belátható, hogy az n mellett nincs további olyan egyenes, amely derékszögben metszi el a–t és b–t. $\square$

3.19. Definíció. Legyen adott két kitérő egyenes a és b. Azt az egyenest, amely a–t és b–t egyaránt derékszögben metszi, a két kitérő egyenes normáltranszverzális egyenesének mondjuk.

Azt a szakaszt, amely ezen egyenesnek az a, b egyenesekkel vett metszéspontjait köti össze, a kitérő egyenesek normáltranszverzális szakaszának nevezzük.

Az eddigi eredmények alpján már könnyen igazolható az alábbi kijelentés.

3.20. Állítás. *Két kitérő egyenes távolsága egyenlő a hozzájuk tartozó normáltranszverzális szakasz hosszával.*

Bizonyítás.

A két kitérő helyzetű egyenes legyen a és b. A 3.18. Állítás igazolásánál alkalmaztuk azt a σ síkot, amely tartalmazza b–t és párhuzamos az a–val. (Lásd a 46. ábrát.) Vegyük észre, hogy az $\overline{M_aM_b}$ normáltranszverzális szakasz hossza adja meg az a egyenes és a vele párhuzamos σ sík távolságát, mivel ennek n egyenese merőleges σ–ra. Mivel a b egyenes benne van σ–ban, az a, b egyeneseket összekötő szakaszok között nincs olyan, amelyik rövidebb lenne az $\overline{M_aM_b}$ szakasznál. $\square$.

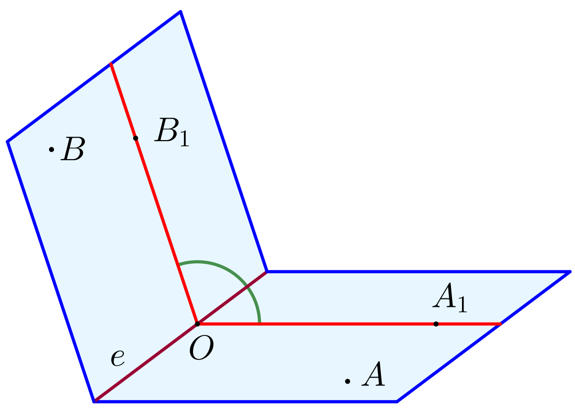
A lapszög értelmezése

3.21. Definíció. Lapszögfelületen két olyan félsík unióját értjük, amelyek határegyenese azonos. A két félsíkot mondjuk a lapszögfelület lapjainak. A közös határegyenest a lapszögfelület élének nevezzük.

Megjegyzés. Legyen adva a térben egy e egyenes és az arra nem illeszkedő A, B pontok. Az $[e, A\rangle$ és $[e, B\rangle$ félsíkok uniójaként nyert lapszögfelületet a továbbiakban $AeB\angle$ fogja jelölni.

3.22. Definíció. Legyen adott egy olyan $AeB\angle$ lapszögfelület, amelynek lapjai nincsenek egyazon síkban. Az $[e, A\rangle$, $[e, B\rangle$ félsíkokat tartalmazó síkokat jelölje α és β. A lapszögfelület által határolt $AeB\sphericalangle$ konvex lapszögtartományon az $[\alpha, B\rangle$ és $[\beta, A\rangle$ félterek metszetét értjük.

Megjegyzés. A fenti definíció alapján az $AeB\sphericalangle$ konvex lapszögtartományra (vagy más néven lapszögre) fennáll $AeB\sphericalangle = [\alpha, B\rangle \cap [\beta, A\rangle$.



47. ábra. *Az $AeB\sphericalangle$ lapszög mértékét az $A_1OB_1\sphericalangle$ szög adja.*

3.23. Definíció. Legyen adott egy $AeB\sphericalangle$ konvex lapszög. Jelöljünk ki az e élegyenesen egy O pontot. Tekintsük azon O kezdőpontú félegyeneseket, amelyek merőlegesek az e egyenesre és benne vannak az $[e, A\rangle$, $[e, B\rangle$ félsíkokban. Vegyük azt az O csúcsú konvex szöget, amelynek ezek a félegyenesek a szárai. Ezen szög mértékét mondjuk az $AeB\sphericalangle$ lapszög mértékének.

Megjegyzés. A konvex lapszög mértéke $90°$–nál nagyobb is lehet. Amennyiben az $AeB\sphericalangle$ lapszög mértéke nem nagyobb $90°$–nál, akkor az megegyezik a lapokat tartalmazó α, β síkok hajlásszögével.

4) Konvex poliéderek

Ebben a fejezetben előbb a konvex poliédereket, majd a szabályos poliédereket fogjuk tárgyalni.

Térbeli topológiai alapfogalmak

A konvex poliéder definíciójának megadása előtt bevezetünk néhány térbeli topológiai fogalmat. A tér pontjainak halmazát továbbra is X jelöli. Valamely P, Q pontok távolságára egyaránt használjuk a $d(P,Q)$ és a PQ jelölést.

Legyen adott egy O pontot és egy r pozitív valós szám. Mint ismeretes, az O középponttal és r sugárral meghatározott gömbfelületen a $\mathcal{G}(O,r) = \{\ P \in X \mid OP = r\ \}$ alakzatot értjük. A következőkben fontos lesz majd számunkra a gömbtest (vagy más szóval a golyó) fogalma is.

4.1. Definíció. A $\mathcal{B}(O,r) = \{\ P \in X \mid OP \le r\ \}$ alakzatot az O centrummal és r sugárral vett zárt gömbtestnek mondjuk.

Az O középponttal és r sugárral meghatározott nyílt gömbtesten az $\mathcal{N}(O,r) = \{\ P\in X \mid d(O,P) < r\ \}$ ponthalmazt értjük.

A belső pont és a határpont értelmezéséhez a nyílt gömbtesteket alkalmazzuk.

4.2. Definíció. Legyen adott egy $\mathcal{A}$ alakzat a térben. Egy P pontot az $\mathcal{A}$ ponthalmaz térbeli belső pontjának nevezünk, ha van olyan $r > 0$ szám, hogy fennáll $\mathcal{N}(P,r) \subset \mathcal{A}$.

Egy Q pontot az $\mathcal{A}$ alakzat határpontjának mondunk, ha tetszőleges $r > 0$ szám esetén teljesül $\mathcal{N}(Q,r) \cap \mathcal{A} \ne \emptyset$ és $\mathcal{N}(Q,r) \cap (X \setminus \mathcal{A}) \ne \emptyset$.

Megjegyzés. A továbbiakban egy $\mathcal{A}$ alakzat térbeli belső pontjainak halmazát $Int(\mathcal{A})$, határpontjainak halmazát pedig $Bd(\mathcal{A})$ fogja jelölni.

4.3. Definíció. Az $\mathcal{A}$ alakzatot nyíltnak mondjuk, ha az összes pontja belső pont, vagyis ha fennáll $Int(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Az $\mathcal{A}$ alakzatot zártnak nevezzük, amennyiben az $X \setminus \mathcal{A}$ ponthalmaz nyílt.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a $\mathcal{B}(O,r)$ zárt gömbtesttel kapcsolatban fennállnak az $Int(\mathcal{B}(O,r)) = \mathcal{N}(O,r)$ és $Bd(\mathcal{B}(O,r)) = \mathcal{G}(O,r)$ összefüggések.

Nem nehéz igazolni, hogy egy $\mathcal{A}$ térbeli alakzat zárt pontosan akkor, ha tartalmazza az összes határpontját, vagyis ha fennáll a $Bd(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ összefüggés.

A konvex poliéder fogalma

A korlátosság fogalmát már az 1.60. Definícióban értelmeztük. A konvex poliéder definiálásakor ezt is alkalmazzuk.

4.4. Definíció. Konvex poliéderen egy olyan Ω alakzatot értünk, amelynek van térbeli belső pontja, korlátos és előáll véges sok féltér metszeteként.

Megjegyzés. A konvex poliéder definíciójában három feltétel szerepel. A térbeli belső pont létezését azért kell kikötni, mert ez garantálja, hogy az Ω alakzat nincs egy síkban. Vegyük észre, hogy egy konvex sokszöget is elő lehet állítani véges sok féltér metszeteként, de a sokszögnek nincs térbeli belső pontja.

Belátható, hogy egy zárt gömbtest is előállítható végtelen sok féltér metszeteként, de véges sok féltér metszeteként nem jöhet létre.

A konvex lapszögtartomány sem poliéder, mivel nem korlátos, és így a három feltételből csak kettőnek tesz eleget.

Megjegyzés. Mivel a félterek konvex alakzatok, a metszetükként nyert Ω alakzat is konvex.

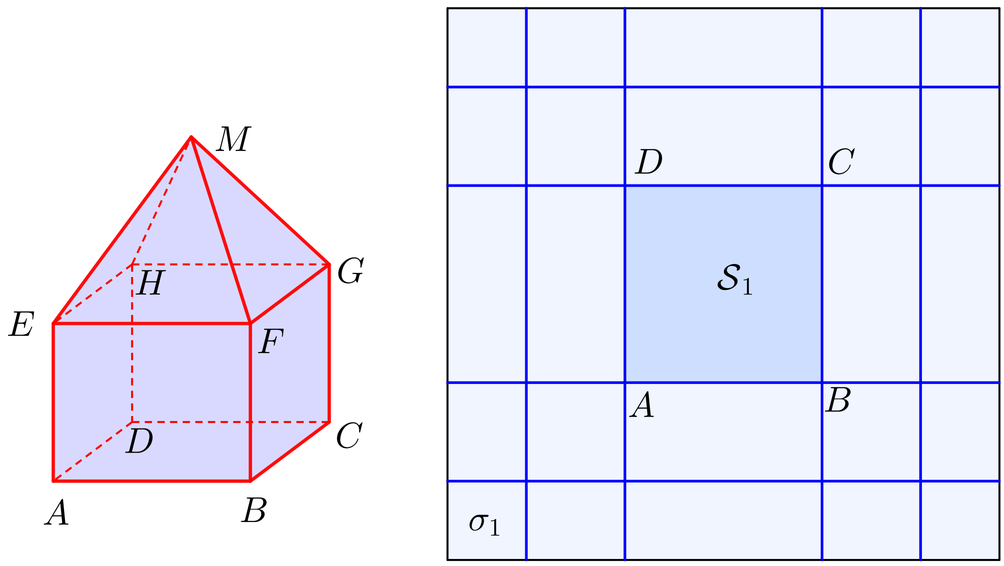
A definíciónak megfelelően egy Ω konvex poliéder megegyezik véges sok zárt féltér metszetével. A továbbiakban csak azokat az $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_l$ féltereket vesszük a poliéder $\Omega = \cap_{i=1}^{l} \mathcal{F}_i$ előállításában, amelyek nem hagyhatóak el, mivel elhagyásuk esetén az Ω poliédernél egy bővebb alakzatot kapnánk. Ezt nevezzük az Ω poliéder reguláris előállításának.

Megjegyzés. Belátható, hogy tetszőleges Ω konvex poliédernek az $\Omega = \cap_{i=1}^{l} \mathcal{F}_i$ reguláris előállításában legalább négy féltér szerepel, azaz fennáll $l \geq 4$.

A konvex poliédernél a lapok, az élek és a csúcsok értelmezése

Vegyünk egy $\Omega = \cap_{i=1}^{l} \mathcal{F}_i$ konvex poliédert. A korábbi megállapodásnak megfelelően a kifejezésben nem szerepel elhagyható féltér. A reguláris előállításban szereplő $\mathcal{F}_i$ félteret határoló síkot jelölje σ_i $(i = 1, \ldots, l)$.

Válasszuk ki az $\mathcal{F}_1$ félteret határoló σ_1 síkot. Az alábbiak során megmutatjuk, hogy a σ_1 síknak az Ω poliéderrel vett $\mathcal{S}_1 = \sigma_1 \cap \Omega$ metszete egy konvex sokszög.



48. ábra. *Egy poliéder féltereinek a σ_1 hátársíkkal vett $\mathcal{S}_1$ metszete.*

Világos, hogy az $\mathcal{S}_1$ alakzatra fennáll az

$$\mathcal{S}_1 = \sigma_1 \cap \Omega = \sigma_1 \cap \left(\cap_{i=1}^{l} \mathcal{F}_i\right) = \cap_{i=1}^{l} \left(\sigma_1 \cap \mathcal{F}_i\right) = \cap_{j=2}^{l} \left(\sigma_1 \cap \mathcal{F}_j\right)$$

egyenlőség. Az Ω poliéder egy P belső pontja közös belső pontja az $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_j$ $(j = 2, \ldots, l)$ féltereknek. Emiatt az $\mathcal{F}_j$ féltér a σ_1 határsíkot vagy elmetszi egy félsíkban, vagy tartalmazza. Ha az $\mathcal{F}_j$ féltérnek a σ_1 síkkal vett $\sigma_1 \cap \mathcal{F}_j$ metszete egy félsík, akkor ennek határegyenese megegyezik a σ_1, σ_j síkok metszésvonalával. Ennek következtében az $\mathcal{S}_1$ metszet előáll véges sok σ_1–beli félsík metszeteként. Vegyük észre, hogy az $\mathcal{S}_1$ alakzat nem lehet rajta egy egyenesen, mivel az $\mathcal{F}_1$ féltér nem hagyható el az előállításból. Eszerint $\mathcal{S}_1 = \sigma_1 \cap \Omega$ egy olyan síkbeli alakzat, amely korlátos, nincs rajta egy egyenesen és előáll véges sok félsík metszetekét. Ebből pedig már következik, hogy $\mathcal{S}_1$ egy konvex sokszög.

Hasonlóan adódik, hogy az $\mathcal{S}_j = \sigma_j \cap \Omega$ $(j = 2, \ldots, l)$ metszetek is konvex sokszögek. Ezek alapján már értelmezni tudjuk a poliéder lapjait, továbbá az éleit és a csúcsait.

4.5. Definíció. Legyen adva egy Ω konvex poliéder, amely az $\mathcal{F}_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ félterek metszeteként áll elő. Vegyük a féltereket határoló síkot σ_i $(i = 1, \ldots, l)$ síkokat. Az Ω poliéder lapjain az $\mathcal{S}_i = \sigma_i \cap \Omega$ konvex sokszögeket értjük. Ezen sokszögek oldalait a poliéder éleinek nevezzük. A lapok csúcsait mondjuk a poliéder csúcsainak.

Megjegyzés. A poliéder lapjait úgy értelmeztük, mint az előállításában szereplő félterek határsíkjainak a poliéderrel vett metszeteit. Beláttuk, hogy ezek a metszetek konvex sokszögek.

Megjegyzés. Világos, hogy amennyiben a konvex poliéder két lapjának van közös pontja, akkor a metszetük vagy egy él, vagy pedig egy csúcs.

Megjegyzés. Könnyű belátni, hogy igazak az alábbi kijelentések. *A poliéder bármely éle két lapnak az oldala, illetve bármely élt két csúcs határol. A poliéder bármely csúcsából legalább három él indul ki.*

Igazolható, hogy az $\Omega = \cap_{i=1}^{l} \mathcal{F}_i$ poliéder határpontjainak halmaza megegyezik lapjainak az uniójával, vagyis fennáll a $Bd(\Omega) = \cup_{i=1}^{l} S_i$ összefüggés. Emiatt bevezetünk egy további fogalmat.

4.6. Definíció. Az Ω konvex poliéderhez tartozó poliéderfelületen Ω lapjainak az unióját értjük.

Megjegyzés. A konvex poliéder lapjainak unióját szokás határoló poliéderfelületnek is nevezni. Világos, hogy a poliéderfelület egy olyan poligonálisan összefüggő alakzat, amely nem konvex.

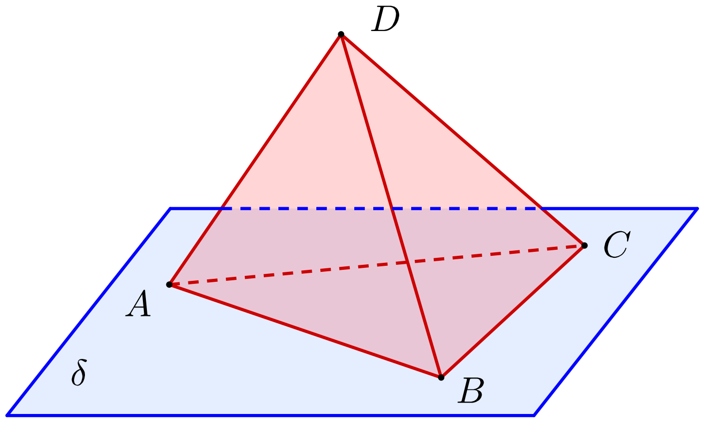
A tetraéder

Emlékezzünk rá, hogy amennyiben adott egy σ sík egy arra nem illeszkedő T pont, akkor $[\sigma, T\rangle$ jelöli a σ által határolt és a T pontot tartalmazó félteret.

4.7. Definíció. Legyenek adva a térben az A, B, C, D nem komplanáris pontok. Vegyük a ponthármasok által meghatározott $\alpha = \langle B,\ C,\ D\rangle$, $\beta = \langle C,\ D,\ A\rangle$, $\gamma = \langle D,\ A,\ B\rangle$ és $\delta = \langle A,\ B,\ C\rangle$ síkokat. Az $[\alpha, A\rangle$, $[\beta, B\rangle$, $[\gamma, C\rangle$ és $[\delta, D\rangle$ féleterek metszetét az A, B, C, D csúcspontok által meghatározott tetraédernek mondjuk.

Megjegyzés. A továbbiakban ezt a tetraédert $\mathcal{T}(A, B, C, D)$ fogja jelölni. Evidens, hogy a tetraédernek négy háromszöglapja és hat éle van.

Megjegyzés. A poliéderek között a tetraéder tölti be azt a szerepet, amit a sokszögek között a háromszög. Bármely poliéder feldarabolható véges sok olyan tetraéderre, amelyek között bármely kettőnek nincs közös belső pontja.



49. ábra. *Az A, B, C, D csúcsokkal meghatározott tetraéder.*

Euler tétele a konvex poliéderekre

A konvex poliédernél a lapok, az élek és a csúcsok száma közötti kapcsolatról szól az alábbi nevezetes tétel. Ennek bizonyítását elsőként L. Euler svájci matematikus adta meg.
4.8. Tétel. *Legyen adva egy Ω konvex poliéder, amelynél a lapok számát l, az élek számát e, a csúcsok számát pedig c jelöli. Ekkor fennáll az $l + c = e + 2$ összefüggés.*
Bizonyítás.
A tételre egy konstruktív bizonyítást adunk, amelyet a későbbiekben majd átszínezési eljárásnak nevezünk.

Induljunk ki abból, hogy az Ω poliéder összes lapja, az élekkel és a csúcsokkal együtt, kék színűre van befestve. Az alábbi rekurzív eljárással a lapok belsejét és egyes éleket átszínezünk pirosra. (Lásd az 50. ábrát.)

Első lépésként válasszunk ki egy lapot, amelyet jelöljön $\mathcal{L}_0$. Ennek belsejét színezzük át pirosra, tehát a lap élei egyelőre kék színűek maradnak.

Az eljárás második lépéseként válasszuk ki az $\mathcal{L}_0$ lap egyik élét, melyet jelöljön w_1. Ezt az élt és az általa határolt kék színű $\mathcal{L}_1$ lap belsejét színezzük át pirosra. A w_1 élnek a végpontjait nem festjük át, azok továbbra is kék színűek maradnak.

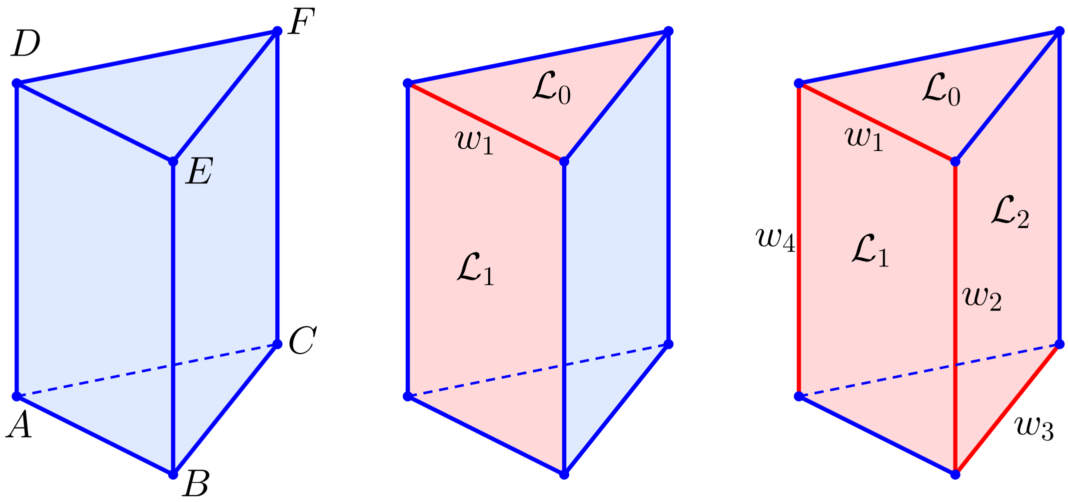
Ezt követően minden lépésben egy élnek és egy lapnak a belsejét színezzük át pirosra a következő rekurzív eljárással. Tegyük fel, hogy már i $(i = 2, \ldots, l-1)$ számú lapnak és $i-1$ számú élnek a belseje át lett színezve pirosra. Kiválasztunk egy olyan kék színű élt, amely egy piros lapnak és egy kék színű lapnak az oldala. Jelölje w_i a kiválasztott élt és $\mathcal{L}_i$ általa határolt kék színű lapot. Az $(i+1)$–edik lépésben átszínezzűk pirosra ezen w_i élnek és az $\mathcal{L}_i$ lapnak a belsejét.

Világos, hogy l számú átszínezési lépést követően már az összes lap belseje piros színű lesz és összesen $l-1$ számú él kerül átszínezésre, azaz $l-1$ számú piros élünk lesz.

Az átszínezési eljárással kapcsolatosan a következőket állapíthatjuk meg.

Amennyiben $i \geq 2$, akkor az i–edik átszínezési lépést követően azoknak lapoknak belseje lesz piros, amelyeknek az egyik éle már átszínezésre került.

Bármely lépést követően a poliéderfelületen átszínezett pontoknak (vagyis a piros pon-



50. ábra. *Egy háromoldalú hasábnál az átszínezési eljárás három fázisa.*

toknak) a tartománya egy poligomálisan összefüggő alakzat. Ez azt jelenti, hogy bármely piros színű pontból egy másik piros színű pontba el lehet jutni egy olyan töröttvonal mentén, amely az Ω–t határoló poliéderfelületen van és az összes pontja piros.

Bármely lépést követően az egyik tetszőlegesen kiválasztott csúcsból egy másik tetszőleges csúcsba el lehet jutni egy olyan töröttvonal mentén, amelynek az összes oldala kék színű él. Ezt a kijelentést a következőképpen, indukcióval láthatjuk be. Világos, hogy a 2. lépést követően igaz volt a kijelentés. Tegyük fel, hogy az i–edik lépést követően is teljesült, vagyis egy tetszőleges B_1 csúcsból el lehetett jutni egy másik B_2 csúcsba kék színű élek mentén. Az $i+1$–edik lépésben átszíneztük a w_i élt. Ha w_i szerepelt a kék színű élekből álló és a B_1, B_2 csúcsokat összekötő töröttvonal oldalai között, akkor az összekötésben a w_i oldalt helyettesíteni lehet az $\mathcal{L}_i$ lap többi oldalával alkotott töröttvonallal, mivel a többi oldal kék színű maradt. Ez pedig azt jelenti, hogy a kijelentés az $(i+1)$–edik átszínezési lépést követően is igaz marad.

Az átszínezési eljárás végrehajtását követően tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai a poliéder csúcsai és élei a poliéder azon élei, amelyek kék színűek maradtak. A fenti kijelentés következtében ez a gráf összefüggő.

Azt is állítjuk, hogy az egymáshoz csatlakozó kék színű élekből (azaz a gráf éleiből) nem képezhető zárt töröttvonal.

Ezt indirekt bizonyítással könnyen igazolhatjuk. Az eljárást követően az összes lap belseje piros lett és már megállapítottuk, hogy a piros poliéderfelületi pontok tartománya poligonálisan összefüggő.

Ha a kék színű élekből képezhető lenne egy zárt töröttvonal, akkor az a töröttvonal a poliéderfelületet felosztaná két olyan tartományra, hogy az egyik tartományba eső lap belső pontjából nem lehetne eljutni piros töröttvonal mentén a másik tartomány lapjainak belső pontjaiba. Ebből viszont az következne, hogy vannak olyan piros színű pontok a poliéderfelületen, amelyeket nem lehet összekötni piros színű töröttvonallal, ami ellentmondana a korábbi megállapításnak.

A leírtak alapján azt mondhatjuk, hogy az átszínezési eljárás után a poliéder csúcsai és kék színben maradt élei egy olyan összefüggő gráfot alkotnak, amelyben nincs "kör". Mint ismeretes, a körmentes és összefüggő gráfot nevezik fának. Azt pedig könnyen be lehet látni, hogy ha egy fagráfban a csúcsok száma c, akkor az élek száma $c-1$.

Tehát az átszínezési eljárás során pirosra színeztünk $l-1$ élt és végül kék színű maradt $c-1$ él. Emiatt az Ω poliéder éleinek e számára fennáll az $e=(l-1)+(c-1)$ összefüggés, amely már igazolja a tételt. □

Megjegyzés. Az átszínezési eljárás folyamata leírható oly módon, ha megadjuk a kiinduláskor átszínezett $\mathcal{L}_0$ lapot és az átszínezésre kerülő élek $w_1,\ w_2,\dots,w_{l-1}$ sorozatát.

Világos, hogy az 50. ábrán bemutatott átszínezésnél az $\mathcal{L}_3$ lap az ABC háromszög, és az $\mathcal{L}_4$ lap az $ACFD$ paralelogramma.

A poliéderhez rendelhető geometriai adatok

Legyen adott egy Ω konvex poliéder. Természetesen vehetjük a poliéder éleinek a hosszait (vagy más szóval az élhosszakat). A poliéder lapjainak a szögeit a poliéder élszögeinek mondjuk. Emellett az összes élhez hozzárendelünk egy lapszöget az alábbiak szerint.

Legyen az $\overline{AB}$ szakasz az Ω egyik éle. Vegyük a poliédernek azt a két lapját, amelyeknek $\overline{AB}$ az egyik oldala. Tekintsük az $\overline{AB}$ szakaszt tartalmazó g egyenest, továbbá azt a két félsíkot, melyek határegyenese g és amelyek tartalmazzák az $\overline{AB}$ élhez tartozó két lapot. Ezen két félsík uniója egy lapszögfelületet ad, amely egy konvex lapszögtartományt határol. Világos, hogy az Ω poliédert tartalmazza ez a lapszög. Ennek mértékét a poliéder $\overline{AB}$ éléhez tartozó lapszögnek mondjuk.

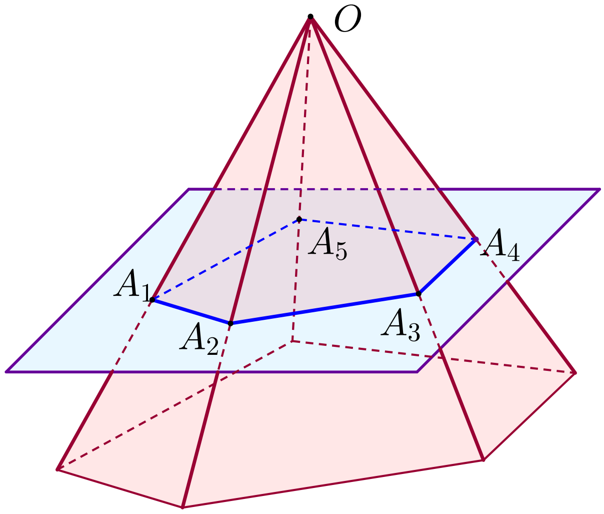
Megjegyzés. A legismertebb konvex poliéder a kocka, amely 6 féltér metszeteként állítható elő. Világos, hogy a kocka esetében az összes élszög és élekhez tartozó összes lapszög derékszög.

A konvex szöglet fogalma

4.9. Definíció. Legyen adott egy O pont, egy ahhoz nem illeszkedő σ sík, továbbá a σ síkban egy n–oldalú $\mathcal{S}$ konvex sokszög, amelyet az $\overline{A_1 \dots A_n A_1}$ $(n \geq 3)$ sokszögvonal határol. A $\mathcal{S}$ konvex sokszög pontjain áthaladó, O kezdőpontú félegyenesek unióját egy n–élű konvex szöglettartománynak (rövidebben konvex szögletnek) mondjuk.

Az O pontot a szöglet csúcsának, az $[O, A_i\rangle$ $(i = 1, \dots, n)$ félegyeneseket a szöglet éleinek nevezzük. Az $A_iOA_{i+1}\sphericalangle$ $(i = 1, \dots, n-1)$, $A_nOA_1\sphericalangle$ szögtartományokat mondjuk a konvex szöglet oldalainak. (Szokás használni az n–oldalú konvex szöglet elnevezést is.)

A definícióban szereplő konvex szöglet minden éléhez hozzárendelünk egy lapszöget az alábbiak szerint. Tekintsük az $e_i = \langle O, A_i\rangle$ $(i = 1, \dots, n)$ élegyenest. Az $A_{i-1}e_iA_{i+1}\sphericalangle$ lapszöget a konvex szöglet $[O, A_i\rangle$ élhez tartozó szögének mondjuk. Mint ismeretes, ezt úgy mérjük, hogy veszünk az e_i egyenesen egy tetszőleges M pontot, majd azokat az $[M, B_{i-1}\rangle$, $[M, B_{i+1}\rangle$ félegyeneseket, amelyek merőlegesek e_i–re, és amelyekre fennáll a $[M, B_{i-1}\rangle \subset [e_i, A_{i-1}\rangle$ és $[M, B_{i+1}\rangle \subset [e_i, A_{i+1}\rangle$ tartalmazás. Az $A_{i-1}e_iA_{i+1}\sphericalangle$ lapszögtartomány mértékén a $B_{i-1}MB_{i+1}\sphericalangle$ szög mértékét értjük.



51. ábra. *Egy ötélű konvex szöglettartománynak egy darabja.*

Megjegyzés. Világos, hogy a konvex szöglettartomány egy olyan nem korlátos alakzat, amely véges sok féltér metszeteként áll elő. A konvex szögletet szokás végtelen gúlának is nevezni. Emiatt a továbbiakban a konvex szögletet $\mathcal{G}$–vel fogjuk jelölni.

Nem nehéz belátni, hogy az élekhez rendelt konvex lapszögtartományok metszete éppen a $\mathcal{G}$ konvex szöglet.

A $\mathcal{G}$ konvex szöglet határpontjainak $Bd(\mathcal{G})$ halmaza megegyezik a $\mathcal{G}$ oldalainak, vagyis az $A_iOA_{i+1}\sphericalangle$ szögtartományoknak, az uniójával.

Megjegyzés. A háromélű konvex szögletet mondjuk triédernek.
Vegyünk egy háromélű konvex szögletet, melynek csúcsa legyen az O pont. A szöglet élein, melyek O kezdőpontú félegyenesek, jelöljünk ki egy–egy pontot, melyek legyenek A, B és C. Világos, hogy a triéder azon O kezdőpontú félegyenesek uniója, amelyek metszik az $ABC\triangle$ háromszöglemezt. Eszerint az O, A, B, C pontnégyes már egyértelűen meghatározza a szöglettartományt. Emiatt ezt a triédert a továbbiakban $Tr(O, A, B, C)$ fogja jelölni.

Egy konvex poliéder minden csúcsához hozzá lehet rendelni egy szöglettartományt az alábbiak szerint.
4.10. Definíció. Legyen adva egy Ω konvex poliéder és annak egy C csúcsa. Vegyük azon C kezdőpontú félegyenesek unióját, amelyeknek van a C–től különböző közös pontja a poliéderrel. A félegyenesek uniójaként egy konvex szögletet kapunk, melyet az Ω poliéder C csúcshoz tartozó szögletének nevezzük.

Az alakzat konvex burka

4.11. Definíció. Legyen adva egy nem üres $\mathcal{H}$ ponthalmaz. Ennek konvex burkán a $\mathcal{H}$–t tartalmazó összes konvex alakzatnak a metszetét értjük.
A továbbiakban $Konv(\mathcal{H})$ fogja jelölni a $\mathcal{H}$ alakzat konvex burkát.

Megjegyzés. Világos, hogy amennyiben a $\mathcal{H}$ ponthalmaz konvex, akkor a konvex burka önmaga, vagyis fennáll $Konv(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.

Megjegyzés. Ismeretes, hogy konvex alakzatok metszete egy konvex ponthalmazt ad. Emiatt $Konv(\mathcal{H})$ egy konvex alakzat. Nyilvánvaló az is, hogy fennáll a $\mathcal{H} \subset Konv(\mathcal{H})$ tartalmazás.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy $Konv(\mathcal{H})$ a legszűkebb konvex alakzat, amely tartalmazza a $\mathcal{H}$ ponthalmazt.

4.12. Állítás. *Legyen adott egy Ω konvex poliéder, melynek csúcsai a B_1, $B_2, \dots B_n$ pontok. Vegyük a csúcsokból álló $\mathcal{H} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ ponthalmazt. Ekkor a $Konv(\mathcal{H})$ konvex burok azonos az Ω poliéderrel.*
Bizonyítás.
Az Ω poliéder egy olyan konvex alakzat, amely tartalmazza a $\mathcal{H}$ ponthalmazt, emiatt fennáll a $Konv(\mathcal{H}) \subset \Omega$ összefüggés.

Mivel $Konv(\mathcal{H})$ egy konvex alakzat, így bármely két pontjának az összekötő szakasz is benne van a $Konv(\mathcal{H})$ ponthalmazban. Az Ω élei a szomszédos csúcsok összekötő szakaszaival azonosak, tehát $Konv(\mathcal{H})$ tartalmazza a poliéder összes élét. Ha az Ω egyik lapjának egy az oldalakra nem eső pontját tekintjük, akkor ahhoz vannak olyan szakaszok, amelyek áthaladnak ezen a ponton és határpontjaik a poliéder élein vannak. Ennek következtében a poliéder lapjait is tartalmazza $Konv(\mathcal{H})$.

Végül legyen egy P pont az Ω–nak térbeli belső pontja. Tekintsünk egy a P–n átmenő egyenest. Világos, hogy ez az egyenes a $Bd(\Omega)$ poliéderfelületet két pontban metszi el és P ezen metszéspontok között van. Mivel a két metszéspont benne van a $Konv(\mathcal{H})$

alakzatban, az összekötő szakaszukat is tartalmazza $Konv(\mathcal{H})$, vagyis P egy pontja a $Konv(\mathcal{H})$ alakzatnak. A leírtak alapján $Konv(\mathcal{H})$ az Ω összes pontját tartalmazza, vagyis teljesül az $\Omega \subset Konv(\mathcal{H})$ összefüggés is.

Ezek alapján pedig fennáll $Konv(\mathcal{H}) \subset \Omega$, ami igazolja az állítást. $\square$.

Megjegyzés. A leírtak alapján már könnyű belátni, hogy igaz az alábbi kijelentés is. *Legyen adva egy $\mathcal{S}$ konvex sokszög, amelynek csúcsai az $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ pontok. Ekkor a csúcsokból álló $\mathcal{H} = \{\, A_1,\ A_2, \ldots, A_n \,\}$ ponthalmaz $Konv(\mathcal{H})$ konvex burka megegyezik az $\mathcal{S}$ sokszöggel.*

Igaz az alábbi kijelentés is, amelynek időigényes bizonyítására ezúttal nem térünk ki.

4.13. Állítás. *Legyen adva egy véges sok pontból álló $\mathcal{H} = \{\, B_1,\ B_2, \ldots, B_n \,\}$ ponthalmaz, amelynek elemei nincsenek egyazon síkon. Ekkor a $\mathcal{H}$ alakzat $Konv(\mathcal{H})$ konvex burka egy olyan poliéder, amelynek csúcsai elemei a $\mathcal{H}$ ponthalmaznak.*

Megjegyzés. Legyenek $A,\ B,\ C,\ D$ olyan pontok, amelyek nincsenek egy síkon. Világos, hogy a $\mathcal{H} = \{\, A,\ B,\ C,\ D \,\}$ ponthalmaz konvex burka megegyezik az $A,\ B,\ C,\ D$ csúcspontokkal meghatározott $\mathcal{T}(A, B, C, D)$ tetraéderrel.

Megjegyzés. Vegyünk a térben öt olyan pontot, amelyek közül bármely négy nincs rajta egy síkon. Ezen öt pontból álló alakzat konvex burka lehet vagy egy tetraéder, vagy pedig egy úgynevezett *kettős tetraéder*. Az utóbbi poliéder két olyan teraéder uniója, melyeknek az egyik háromszöglapja közös és a negyedik csúcsok összekötő szakasza elmetszi a közös lapot. (A konvex burok akkor lesz tetraéder, ha az öt pont egyike benne van a másik négy által meghatározott tetraéderben.)

Szabályos sokszögek

Mielőtt rátérnénk a szabályos poliéderek tárgyalására, áttekintjük a szabályos sokszögekkel kapcsolatos ismereteket.

4.14. Definíció. Egy sokszöget szabályosnak mondunk, ha bármely két oldala egyenlő és bármely két szöge egyenlő.

Legyen adva egy n–oldalú szabályos $\mathcal{S}$ sokszög, amelynek csúcsai az $A_1, \ldots, A_n$ pontok ($n \geq 3$). A sokszöget tartalmazó síkot jelölje σ. Világos, hogy az 1.67. Állítás következtében az $\mathcal{S}$ poligon szögeinek mértéke $\alpha = \dfrac{n-2}{n}\, 180°$.

Az oldalak és a szögek egyenlőségéből adódik, hogy amennyiben vesszük az oldalak felezőmerőleges egyeneseit és a szögek szögfelező egyeneseit, akkor az ezekre történő σ–beli tengelyes tükrözések a sokszöget önmagába képezik. Ebből adódik, hogy az n–oldalú szabályos sokszögnek a tartalmazó σ síkban n számú szimmetriatengelye van.

Az A_1 csúcsbeli szögfelező és az A_1A_2 oldal felezőmerőlegese metsszék el egymást az O pontba. Belátható, hogy az O pont rajta van az $\mathcal{S}$ összes szimmetriatengelyén. Az O egyenlő távolságra van a csúcspontoktól és a sokszög oldalegyeneseitől. Emiatt az $\mathcal{S}$ szabályos sokszög köré és a sokszögbe is lehet kört írni.

Megjegyzés. Világos, hogy amennyiben az $\mathcal{S}$ és $\tilde{\mathcal{S}}$ olyan szabályos sokszögek, amelyek oldalszáma megegyezik, akkor $\mathcal{S}$ és $\tilde{\mathcal{S}}$ hasonlóak egymással.

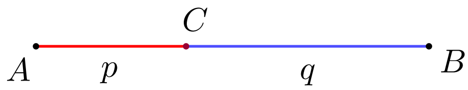
Az aranymetszés és a szabályos ötszög kapcsolata

A továbbiak során majd alkalmazni fojuk az alábbi fogalmat.

4.15. Definíció. Legyen adott két pont A és B. Az $\overline{AB}$ szakaszon vett aranymetszésen a szakasz azon C pontjának a kijelölését értjük, amelyre fennáll az $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{CB}{AB}$ összefüggés.

Megjegyzés. A fenti definíciónál az $\overline{AC}$ és $\overline{CB}$ szakaszokat az aranymetszés szeleteinek nevezzük. (Lásd az 52. ábrát.)

Azt is szokás mondani, hogy az aranymetszés során a szakaszt egy belső pontjával oly módon osztjuk fel két szeletre, hogy a kisebbik szelet hossza úgy aránylik a nagyobbikhoz, mint a nagyobbik szelet hossza a teljes szakaszhosszhoz.



52. ábra. *Aranymetszés az $\overline{AB}$ szakaszon.*

Számítsuk ki, hogy az aranymetszésnél milyen értéket kapunk a szeletek hányadosára. Vezessük be a $p = AC$ és $q = CB$ jelölést. Ekkor az $\overline{AB}$ szakasz hosszára igaz $AB = p+q$. Ily módon felírhatjuk a $\dfrac{p}{q} = \dfrac{q}{p+q}$ összefüggést, amelyből a $p^2 + p\,q - q^2 = 0$ egyenlet adódik. Ezt elosztva q^2–tel a p/q hányadosra a

$$(p/q)^2 + p/q - 1 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek pozitív megoldása $\dfrac{p}{q} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

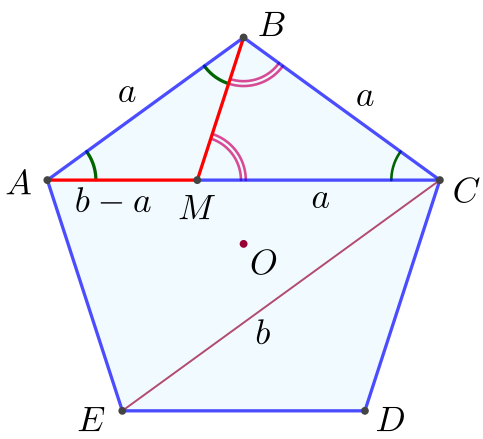
Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a fentiek kapott hányados reciprokának értéke $\dfrac{q}{p} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Emellett az is igaz, hogy a nagyobbik szeleten, azaz a $\overline{CB}$ szakaszon végrehajtott aranymetszésnek a p szakaszhossz adja a nagyobbik szeletét és $q-p$ a kisebbik szeletet, mivel a kiindulási egyenlőségből levezethető a $\dfrac{q-p}{p} = \dfrac{p}{q}$ összefüggés.

Az aranymetszésnek a szabályos sokszögek közül az ötszöggel és a tízszöggel van kapcsolata. Erről szól a következő állítás.

4.16. Állítás. *Legyen adva egy szabályos ötszög. Ha ennek az egyik átlóján aranymetszést hajtunk végre, akkor az aranymetszéssel kapott nagyobbik szelet hossza egyenlő az ötszög oldalával.*

Bizonyítás.

A szabályos ötszög csúcsai legyenek sorrendben A, B, C, D és E. Az oldalak hosszát jelölje a, az átlók hosszát pedig jelölje b. Világos, hogy a szabályos ötszög szögeinek a mértéke $108°$. Tekintsük az A, B, C csúcsokkal meghatározott $ABC\triangle$ egyenlő szárú háromszöget. Mivel a B csúcsbeli szög $108°$, ebben a háromszögben az A és C csúcsoknál lévő szög mértéke $36°$.



53. ábra. *Aranymetszés egy szabályos ötszög átlóján.*

A CA átlóra mérjük fel az a oldalhosszt a C csúcsból. Jelölje M az átló azon pontját, amelyre igaz $CM = a$. Tekintsük a $BMC\triangle$ háromszöget, ahol $BC = MC$. Ezen háromszögben a B és M csúcsokhoz tartozó szögek mértéke $\frac{1}{2}(180° - 36°) = 72°$. Mivel fennáll $MBC\sphericalangle = 72°$, azt kapjuk, hogy $ABM\sphericalangle = 36° = MAB\sphericalangle$. Tehát az $ABM\triangle$ háromszög is egyenlő szárú, két szöge $36°$ és a harmadik szöge $108°$, továbbá teljesül $AM = BM = b-a$.

Vegyük észre, hogy az $ABM\triangle$ és $ACB\triangle$ háromszögek hasonlóak, mivel szögeik páronként egyenlőek. Ennek következtében a megfelelő oldalak arányai megegyeznek, vagyis fennáll a $\dfrac{b-a}{a} = \dfrac{a}{b}$ egyenlőség. Ez pedig azt mutatja, hogy az M pont az $\overline{AC}$ átlón aranymetszést ad. $\square$

Szabályos poliéderek

A megfelelő előkészítést követően megadjuk a szabályos poliéder fogalmát.

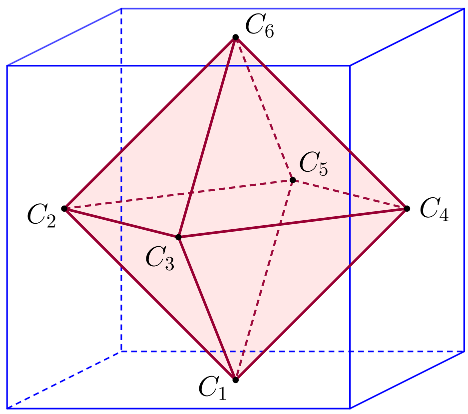
4.17. Definíció. Egy konvex poliédert szabályosnak mondunk, ha bármely két élének hossza egyenlő, bármely két élszöge egyenlő és bármely két éléhez tartozó lapszög egyenlő.

Megjegyzés. A kocka élszögei és lapszögei egyaránt derékszögek, továbbá az élei is egyenlőek. Tehát a kocka a definícióban szereplő mindhárom feltételnek eleget tesz.

Ugyancsak szabályos poliéder az úgynevezett szabályos tetraéder, amelynek lapjai szabályos háromszögek.

Megjegyzés. Mivel a szabályos poliéderben az élek és élszögek (továbbá az élekhez rendelt lapszögek) egyenlőek, a lapok egymással egybevágó szabályos sokszögek.

A kockát alkalmazva könnyen konstruálhatunk egy további szabályos poliédert. Legyen adva a térben egy kocka. Vegyük a kocka négyzetlapjainak $C_1,\ C_2,\ldots,C_6$ középpontjait és az általuk alkotott $\mathcal{H} = \{C_1,\ C_2,\ldots,C_6\}$ ponthalmazt. Könnyű belátni, hogy a ponthalmaz $Konv(\mathcal{H})$ konvex burka egy olyan poliéder, amelynek lapjai szabályos háromszögek. Az is könnyen igazolható, hogy az élekhez tartozó lapszögek egyenlőek. Emiatt a konvex burok egy szabályos poliédert ad, amelnyek 8 háromszöglapja, 12 éle és 6 csúcsa van. A lapszámok alpján ezt szabályos oktaédernek mondjuk.



54. ábra. *A kocka lapközéppontjaival meghatározott oktaéder.*

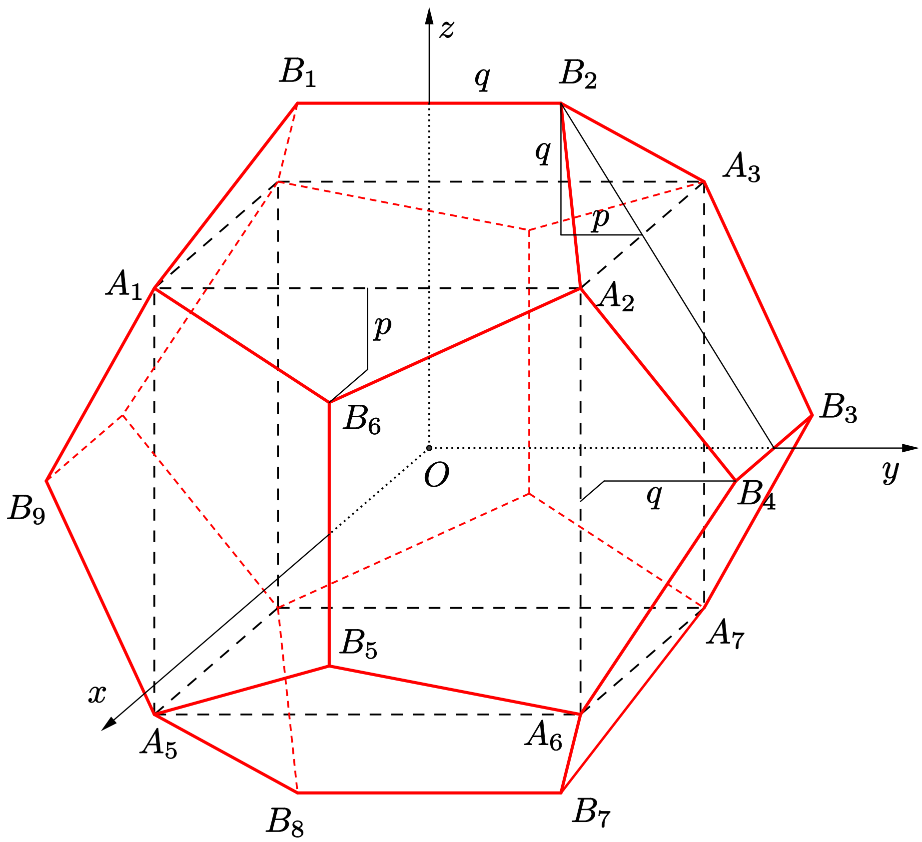
Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az oktaéder lapközéppontjainak konvex burkaként egy kockát nyerünk. A kockát és az oktaédert egymás duális poliédereinek szokás mondani, mert élszámuk közös és az egyik poliéder lapszáma megegyezik a másik csúcsainak számával.

A szabályos dodekaéder konstrukciója

Az alábbiak során leírjuk, hogy miként kaphatunk olyan szabályos poliédert, amelynek 12 szabályos ötszög lapja van és minden csúcsába 3 él fut be. A konstrukció az aranymetszés és a szabályos ötszög kapcsolatán alapul. Egy kocka összes lapjához két pontot rendelünk. Ezen pontokból és a kocka csúcsaiból álló ponthalmaznak a konvex burka adja keresett a poliédert.

Tekintsünk egy kockát, amelynél az élek hossza $2a$. Az alábbi ábrának megfelelően a kocka csúcsai legyenek $A_1,\ A_2,\ldots,A_8$. Amennyiben alkalmazunk egy olyan térbeli derékszögű koordináta-rendszert, amelynek O kezdőpontja megegyezik a kocka középpontjával és amelynél a tengelyek a kocka éleivel párhuzamosak, akkor a csúcsok koordinátái: $A_1(a,-a,a),\ A_2(a,a,a),\ A_3(-a,a,a),\ldots,A_8(-a,-a,-a)$.

Az a hosszúságú szakaszon végrehajtott aranymetszés nagyobbik szeletének hosszát jelölje q, a kisebb szelet hosszát pedig p. Ennek következtében fennállnak az $a = p + q$, $a^2 = q\,a + q^2$ és $q^2 = p\,q + p^2$ egyenlőségek.



55. ábra. *A dodekakéder származtatása a kockából.*

Az ábrának megfelelően vegyük azon $2q$ hosszúságú B_1B_2, B_3B_4 és B_5B_6 szakaszokat, melyek párhuzamosak a kocka egy-egy élével és egy-egy laptól q távolságra vannak. Ha alkalmazzuk a térbeli koordináta-rendszert, akkor a szakaszok végpontjainak koordinátái a következők: $B_1(0,-q,a+q)$, $B_2(0,q,a+q)$, $B_3(-q,a+q,0)$, $B_4(q,a+q,0)$, $B_5(a+q,0,-q)$, $B_6(a+q,0,q)$. Ezen pontoknak az O kezdőpontra vonatkozó tükörképei legyenek a B_7, $B_8,\dots,B_{12}$ pontok.

Vegyük a kocka A_1, $A_2,\dots,A_8$ csúcsaiból és a B_1, $B_2,\dots,B_{12}$ pontokból álló $\mathcal{H}$ ponthalmazt. Ezen 20 pontból álló $\mathcal{H}$ alakzat konvex burkaként egy olyan szabályos poliédert kapunk, melynek lapjai szabályos ötszögek és 12 lapja, 30 éle, 20 csúcsa van. A lapok száma alapján ezt dodekaédernek nevezik.

Újabb szabályos poliéder származtatása a dodekaéderből

Vegyünk egy szabályos dodekaédert, melynek lapjai szabályos ötszögek. A lapok középpontjai legyenek a C_1, $C_2,\dots,C_{12}$ pontok. Tekintsük a 12 lap centrumaiból álló halmaz konvex burkát. Ez a konvex burok egy olyan poliéder lesz, amelynek 12 csúcsa, 20 lapja van és a lapjai szabályos háromszögek. Igazolható, hogy az így nyert poliéderben a lapszögek is egyenlőek. Ily módon egy újabb szabályos poliéderhez jutunk. A lapok száma alapján ezt ikozaédernek nevezik.

Az ikozaéder egy másik konstrukciója

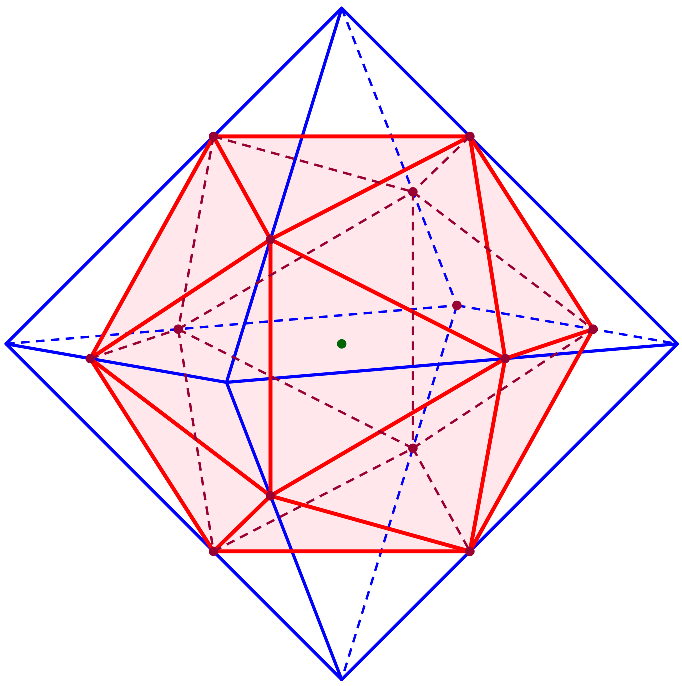
Vegyünk egy szabályos oktaédert, amelynél az élek hosszát jelölje a. Az a szakaszhosszhoz tartozó aranymetszés kisebbik szeletének hossza legyen p, a nagyobbik szelet hossza pedig q. Mint ismeretes, ezen hosszakra fennáll $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,a$ és $p = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,q$.

Az oktaéder mind a 12 élén jelöljünk ki egy–egy pontot, amelyek az éleken vett aranymetszésnek felelnek meg. A kijelölést úgy hajtsuk végre, hogy bármely háromszöglap két szomszédos élét tekintve teljesüljön az alábbi feltétel: *Az egyik élen kijelölt pont a közös csúcstól p távolságra legyen, míg a másik élen kijelölt pont a közös csúcstól q távolságra essen.*

Ily módon 12 pontot jelölünk ki. Ezen pontok halmazát a továbbiakban jelölje $\mathcal{H}$. Könnyű belátni, hogy ezek a pontok egyenlő távolságra vannak az oktaéder középpontjától. Közvetlen számolással igazolható, hogy ha kiválasztunk egy pontot a $\mathcal{H}$ halmazból, akkor pontosan öt olyan kijelölt pont van az éleken, amelyek tőle $\sqrt{2}\,p$ távolságra esnek.

Bizonyítható, hogy a $\mathcal{H}$ ponthalmaz $Konv(\mathcal{H})$ konvex burka egy olyan poliéder, amelynek 20 szabályos háromszöglapja, 12 csúcsa és 30 éle van, továbbá az élekhez tartozó lapszögei is egyenlőek. Ebből már adódik, hogy a kapott poliéder a korábban már értelmezett szabályos ikozaéder.

Megjegyezzük, hogy a $Konv(\mathcal{H})$ ikozaéder csúcsai az oktaéder élein előzetesen kijelölt pontok.



56. ábra. *Az ikozaéder származtatása az oktaéderből az éleken vett aranymetszéssel.*

A síkra tükrözés, mint térbeli egybevágóság

A szabályos poliéderek tárgyalása során alkalmazni fogjuk a síkra történő tükrözéseket, amelyek speciális egybevágósági transzformációk a térben.

4.18. Definíció. Legyen adva a térben egy σ sík. A σ síkra történő tükrözésen azt a $\tau : X \to X$ leképezést értjük, amely a σ sík pontjait fixen hagyja és egy a σ–ra nem illeszkedő P pont $P' = \tau(P)$ képét az alábbi feltételek határozzák meg.

(1) A P' pont rajta van azon az egyenesen, amely merőleges σ–ra és áthalad P–n.

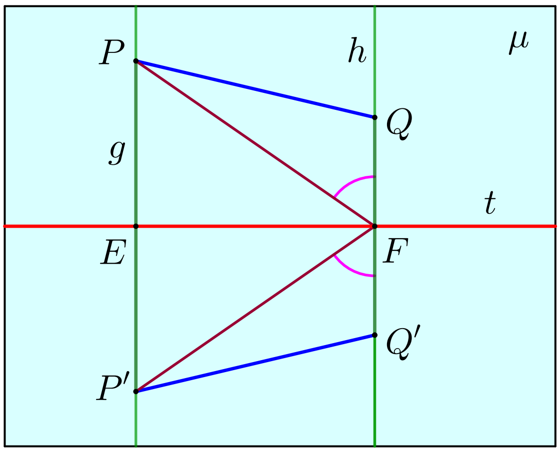
(2) A merőleges egyenesnek a σ–val vett metszéspontja felezi a $\overline{PP'}$ szakaszt.

Egybevágó háromszögek felhasználásával fogjuk igazolni az alábbi kijelentést.

4.19. Állítás. *A síkra történő tükrözés egy egybevágósági transzformáció.*

Bizonyítás.

Tekintsük a σ síkra történő $\tau : X \to X$ tükrözést. Legyenek P és Q valamely térbeli pontok. Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor P és Q a σ sík által határolt egyazon féltérben vannak. A képpontok legyenek $P' = \tau(P)$ és $Q' = \tau(Q)$. A tükrözés definíciója következtében a $g = \langle P, P' \rangle$ és $h = \langle Q, Q' \rangle$ egyenesek derékszögben metszik el a σ síkot. A 3.10. Állítás szerint ezen egyenesek párhuzamosak egymással, tehát benne vannak egy a σ–ra merőleges μ síkban. A μ és σ síkok metszésvonala legyen t. (Lásd az 57. ábrát.)



57. ábra. *Szemléltető ábra a síkra tükrözéshez.*

A g, h merőleges egyeneseknek a σ–val vett metszéspontjait jelölje E és F. Vegyük a $\overline{PF}$ és $\overline{P'F}$ összekötő szakaszokat is.

Világos, hogy a $PEF\triangle$ és $P'EF\triangle$ háromszögek egybevágóak, hiszen az EF oldal közös, fennáll $EP = EP'$, és az E csúcsbeli szögek derékszögek. Ebből viszont az következik, hogy $PF = P'F$ és $PFE\sphericalangle = P'FE\sphericalangle$ is teljesül. Vegyük észre, hogy emiatt fennáll a $PFQ\sphericalangle = P'FQ'\sphericalangle$ egyenlőség is.

A $PFQ\triangle$ és $P'FQ'\triangle$ háromszögek ugyancsak egybevágóak egymással, mivel az F

csúcsbeli szögeik egyenlőek, továbbá igaz $FP = FP'$ és $FQ = FQ'$. Ennek következtében teljesül $PQ = P'Q'$.

Megfelelő háromszögek egybevágóságát felhasználva belátható, hogy a $d(P,Q) = d(P',Q')$ egyenlőség akkor is fennáll, ha a P, Q pontok a σ által határolt más–más féltérben vannak. A leírtak alapján a síkra tükrözés megőrzi a pontok távolságát. □

A szabályos poliéderek jellemzése

Az n–élű konvex szöglet (vagy más néven az n–oldalú végtelen konvex gúla) fogalmát a 4.9. Definícióban adtuk meg. Ezen szöglethez n számú oldalszöget és n számú lapszöget lehet rendelni. Az élekhez tartozó lapszögeket nevezik a konvex szöglet szögeinek.

4.20. Definíció. Egy n–élű konvex szögletet szabályosnak mondunk, ha bármely két oldalszöge egyenlő és bármely két éléhez rendelt lapszöge egyenlő egymással.

Megjegyzés. Szabályos szögletet a következő módon kaphatunk. Egy σ síkban vegyünk egy n–oldalú $\mathcal{S} = A_1A_2\dots A_n$ szabályos sokszöget, melynek középpontja legyen K. A K ponton átmenő és a σ síkra merőleleges egyenesen jelöljünk ki egy O $(O \neq K)$ pontot. Ha vesszük azon O kezdőpontú félegyenesek $\mathcal{G}$ unióját, amelyeknek van közös pontja az $\mathcal{S}$ szabályos sokszöggel, akkor ez egy szabályos konvex szögletet ad. (Lásd az 51. ábrát.)

Be lehet látni, hogy minden szabályos szögletet elő lehet állítani ezzel az eljárással.

Amennyiben veszünk egy n–élű szabályos szögletet, akkor annak megfelel egy oldalszög és egy lapszög. Azonban adott n $(n \geq 3)$ élszám mellett az egyenlő szárú háromszögek alkalmazásával az egyik szög ismeretében már ki lehet számítani a másikat. Erről szól a következő állítás, melynek igazolására ezúttal nem térünk ki.

4.21. Állítás. *Egy n–élű $\mathcal{G}$ szabályos szögletben az oldalszögek közös mértéke legyen α, az élekhez rendelt lapszögek közös mértéke pedig legyen β. Ekkor az α, β szögek egyike már egyértelműen meghatározza a másikat.*

Megjegyzés. Belátható, hogy az n–élű szabályos szögletnél az oldalszögre mindig fennáll az $\alpha < \dfrac{360°}{n}$ egyenlőtlenség, a lapszögre pedig teljesül $\dfrac{n-2}{n}\,180° < \beta < 180°$.

A 4.7. Definícióból azonnal adódik, hogy amennyiben adva van egy Ω szabályos poliéder, akkor az Ω csúcsaihoz tartozó konvex szögletek is szabályosak. (A csúcsokhoz rendelt szögletet a 4.10. Definícióban értelmeztük.)

Az alábbi kijelentés már könnyen igazolható a kimondott definíciók alapján.

4.22. Állítás. *Az Ω konvex poliéder szabályos akkor és csak akkor, ha a lapjai szabályos sokszögek és a csúcsokhoz tartozó szögletek szabályosak.*

Meg fogjuk mutatni, hogy a szabályos poliédernél a csúcsokból kiinduló élek száma is azonos. Kézenfekvő, hogy egy poliéder két csúcsát akkor mondjuk szomszédosnak, ha az őket összekötő szakasz a poliédernek egy éle.

4.23. Állítás. *Legyen adva egy Ω szabályos poliéder és annak a B_1, B_2 szomszédos csúcsai. Tekintsük a térben a $\overline{B_1B_2}$ szakasz σ felezőmerőleges síkját és a σ síkra történő $\tau : X \to X$ tükrözést. Ekkor a τ tükrözés az Ω poliéder B_1, B_2 csúcsokhoz tartozó szögleteit egymásba képezi.*

Bizonyítás.

Világos, hogy $\tau(B_1) = B_2$ és $\tau(B_2) = B_1$ teljesül. Az Ω poliéderben a két csúcshoz rendelt konvex szögletet jelölje $\mathcal{S}(B_1)$ és $\mathcal{S}(B_2)$. Ezek oldalai olyan szögtartományok, melyek mértéke azonos. Emiatt a τ tükrözés az $\mathcal{S}(B_1)$ szögletnek a $\overline{B_1B_2}$ élt tartalmazó két lapját az $\mathcal{S}(B_2)$ szöglet azon két lapjába képezi, amelyekben benne van a $\overline{B_1B_2}$ szakasz.

Az $\mathcal{S}(B_1)$ szögletben vegyük most azon lapokat (vagy azt a lapot), amelyek a fenti két lappal szomszédosak. Az élekhez tartozó lapszögek egyenlősége miatt a τ tükrözés ezeket olyan B_2 csúcsú szögtartományokba képezi, amelyek lapjai az $\mathcal{S}(B_2)$ szögletnek.

Ezt az eljárást folytatva megállapíthatjuk, hogy a τ tükrözés az $\mathcal{S}(B_1)$ konvex szöglet lapjait rendre az $\mathcal{S}(B_2)$ szöglet lapjaiba képezi. Vegyük azonban észre, hogy ez fordított irányban is igaz, vagyis az $\mathcal{S}(B_2)$ lapjai az $\mathcal{S}(B_1)$ szöglet lapjaiba képeződnek. Ebből pedig már következik, hogy fennáll $\tau(\mathcal{S}(B_1)) = \tau(\mathcal{S}(B_2))$ és $\tau(\mathcal{S}(B_2)) = \tau(\mathcal{S}(B_1))$. $\square$

Megjegyzés. Az előző bizonyítást folytatva az Ω lapjainak egybevágóságából adódik, hogy a τ tükrözés a szabályos poliéder B_1–gyel szomszédos csúcsait a B_2–vel szomszédos csúcsokba képezi. Ez alapján már belátható, hogy $\tau(\Omega) = \Omega$ is teljesül, vagyis a τ tükrözés önmagába viszi a poliédert.

A 4.23. Állításból már az is könnyen levezethető, hogy igaz az alábbi kijelentés.

4.24. Következmény. *Ha az Ω konvex poliéder szabályos, akkor a csúcsaihoz tartozó szabályos szögletek egymással egybevágóak.*

A szabályos poliéderek osztályozása

Az eddigi tárgyalás során már megmutattuk, hogy van legalább öt különböző típusú szabályos poliéder. Ezek a tárgyalt szabályos poliéderek a következők: szabályos tetraéder, kocka, oktaéder, dodekaéder, ikozaéder.

Világos, hogy bármely két szabályos tetraéder, illetve bármely két kocka hasonlósági transzformációval egymásba vihető. Az előzőekben beláttuk hogy az oktaéder, a dodekaéder és az ikozaéder pedig megkonstruálhatóak egy ponthalmaz konvex burkaként, ha ahhoz egy megfelelő élhosszú kockát veszünk alapul. Ebből már adódik, hogy amennyiben két azonos típusú szabályos poliédert veszünk, akkor azok egymással hasonlóak.

Korábbi vizsgálataink során beláttuk, hogy a szabályos poliédernél nemcsak a lapok oldalszáma egyenlő, hanem a csúcsokba befutó élek száma is azonos.

Felvetődik a kérdés, hogy vannak–e még további szabályos poliéderek. Az alábbiak során igazoljuk, a válasz nemleges.

4.25. Tétel. *Hasonlóság erejéig öt szabályos konvex poliéder létezik. Ezek a szabályos poliéderek a tetraéder, a kocka, az oktaéder, a dodekaéder és az ikozaéder.*

Bizonyítás.

Legyen Ω egy szabályos poliéder, amelynél a lapok száma l, az élek száma e és a csúcsok száma c. Jelölje n az Ω lapjainak oldalszámát és jelölje m az egy csúcsba befutó élek számát. Ezen egész számokra nyilván igaz, hogy $m \geq 3$ és $n \geq 3$. Mivel minden él két csúcsba fut be és két lapot határol, fennállnak az

$$l\,n = 2\,e, \qquad c\,m = 2\,e \tag{4.1}$$

összefüggések. Ezekből pedig az $\dfrac{l}{2e} = \dfrac{1}{n}$ és $\dfrac{c}{2e} = \dfrac{1}{m}$ egyenlőségek adódnak.

Vegyük az Euler–tétel szerinti $l+c=e+2$ összefüggést. Szorozzuk meg ezen egyenlet mindkét oldalát az $\dfrac{1}{2e}$ számmal. Ily módon azt kapjuk, hogy teljesül

$$\frac{l}{2e}+\frac{c}{2e}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}\,.$$

A fenti egyenlőségek következtében fennáll az

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}\,. \tag{4.2}$$

összefüggés. Mivel az $1/e$ egy pozitív racionális szám, ebből az

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}>\frac{1}{2}$$

egyenlőtlenséget nyerjük. Ezt megszorozva a $2\,m\,n$ pozitív számmal, azt kapjuk, hogy fennáll $2\,m+2\,n>m\,n$, illetve

$$m\,n-2\,m-2\,n<0\,.$$

Adjunk hozzá a fenti egyenlőtlenség mindkét oldalához 4–t. Ily módon a bal oldali kifejezést szorzattá alakíthatjuk, és azt kapjuk, hogy teljesül

$$(m-2)(n-2)<4\,. \tag{4.3}$$

Mivel igaz $m\geq 3$ és $n\geq 3$, az $m-2$ és $n-2$ tényezők pozitív egész számok. Emiatt a (4.3) egyenlőtlenség csak abban az öt esetben áll fenn, amikor a bal oldalon szereplő szorzat vagy $1\cdot 1$, vagy $1\cdot 2$, vagy $2\cdot 1$, vagy $1\cdot 3$, vagy pedig $3\cdot 1$. Ennek megfelelően az m, n egész számok csak öt esetben tesznek eleget a (4.3) feltételnek.

Vegyük észre, hogy amennyiben m és n értékét rögzítjük, akkor a (4.2) egyenlőség alapján előbb kiszámíthatjuk az e értékét, majd ezt követően (4.1) felhasználásával megkapjuk a c csúcsszámot és a lapok l számát. Nézzük példaként az $m=3$ és $n=5$ esetet. Ekkor az

$$\frac{1}{e}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{30}$$

egyenlőség miatt a poliéder éleinek száma $e=30$. Ennek ismeretében azt kapjuk, hogy a csúcsok száma $c=\dfrac{2e}{m}=20$ és a lapok száma $l=\dfrac{2e}{n}=12$. Tehát ennek a szabályos poliédernek 12 lapja van, amelyek szabályos ötszögek és minden csúcsba 3 él fut be. Világos, hogy ekkor az Ω poliéder éppen a dodekaéder.

Ily módon megállapíthatjuk, hogy a tekintett Ω szabályos poliéder adatai az alábbi táblázatban szereplő öt eset egyikének felelnek meg. Az öt különböző esetnek megfelelő poliéder pedig megegyezik a tételben kimondottak egyikével.

m	n	e	c	l	Poliéder neve
3	3	6	4	4	tetraéder
3	4	12	8	6	kocka
4	3	12	6	8	oktaéder
3	5	30	20	12	dodekaéder
5	3	30	12	20	ikozaéder

Ezzel a tételünk bizonyítást nyert. $\square$

Megjegyzés. A szabályos poliéderek konstrukciójából is adódik, hogy igaz a következő. Bármely Ω szabályos poliéder esetén egyértelműen létezik a térben egy olyan pont, amely egyenlő távolságra van az Ω csúcsaitól. Ezt a pontot nevezzük az Ω középpontjának.

A félig szabályos konvex poliéderek

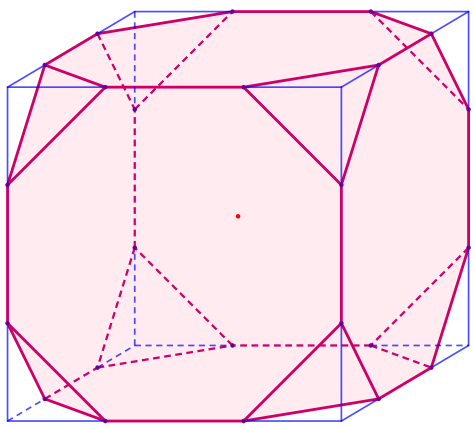
4.26. Definíció. Egy Ω konvex poliédert félig szabályosnak (vagy más szóval arkhimédészi poliédernek) mondunk, ha az összes lapja szabályos sokszög és a csúcsaihoz rendelt szögletek egymással egybevágóak.

Megjegyzés. Az öt szabályos poliédert nem szokás az arkhimédészi poliéderek közé sorolni, bár a definícióban szereplő feltételeknek nyilván eleget tesznek.

Megjegyzés. A definícióból adódik, hogy a félig szabályos poliéder bármely két éle egyenlő, továbbá a csúcsokba azonos számú él fut be. Azonban a lapok oldalszáma már különböző lehet.

A félig szabályos poliéderek tárgyalására időhiány miatt nem térünk ki. Annyit azonban leírhatunk, hogy ezek nagy részét a szabályos poliéderekből lehet megkonstruálni vagy speciális csonkolási eljárással, vagy pedig a lapok úgynevezett kihúzásával. A csonkolási eljárások viszonylag könnyen értelmezhetőek és áttekinthetőek.

A mellékelt 58. ábrán egy olyan arkhimédészi poliéder szerepel, amelynek 6 szabályos nyolcszöglapja és 8 szabályos háromszöglapja van. A csúcsok száma $c = 24$, az élek száma pedig $e = 36$. Ezt a poliédert úgy kaphatjuk meg, ha egy kockából az összes csúcsánál levágunk egy–egy megfelelő méretű kis tetraédert. Azok az egybevágósági transzformációk, amelyek a kockát önmagába viszik, ezt a poliédert is önmagába képezik. Ebből adódik, hogy a csúcsaihoz tartozó szögletek egybevágóak egymással.



58. ábra. *A kocka csonkolásával nyert félig szabályos poliéder.*

5) Az euklideszi szerkesztések

A geometriai szerkesztésekre vonatkozó fogalmak

A szerkesztés általános értelemben vett fogalma
Szerkesztésen egy olyan eljárást értünk, ahol megadott alakzatokból kiindulva, meghatározott szerkesztési lépések véges számban történő végrehajtásával további alakzatokat állítunk elő.

A szerkesztési feladat értelmezése
Ha megadunk véges sok alakzatot, és meghatározott feltételeknek eleget tevő alakzat (vagy alakzatok) megszerkesztését tűzzük ki célul, akkor ezt egy szerkesztési feladatnak mondjuk.

Az euklideszi szerkesztés alapelvei

Az euklideszi szerkesztés egy rögzített síkban történik speciális síkbeli alakzatok által.

A szerkesztés során alkalmazott és előállított alakzatok *a pontok, az egyenesek és a körök*. Ezeket szokás az euklideszi szerkesztés alapelemeinek is nevezni.

Az euklideszi szerkesztés eszközei az egyenes vonalzó és a körző. Az elnevezésnek megfelelően az egyenes vonalzóval egyeneseket, a körzővel pedig köröket lehet előállítani (köznapi nyelven szólva rajzolni).

Az euklideszi szerkesztés kiindulási adatai a szerkesztés síkjában megadott pontok, egyenesek és körök (szerkesztési alapelemek), amelyek száma véges.

Az euklideszi szerkesztés alaplépései

(L1) Két adott ponton átmenő egyenesnek a vonalzó alkalmazásával történő előállítása (más szóval megszerkesztése).

(L2) Két adott pont távolságának körzőnyílásba vétele, és azzal mint sugárral kör szerkesztése egy adott pont körül.

(L3) Két metsző egyenes metszéspontjának a kijelölése.

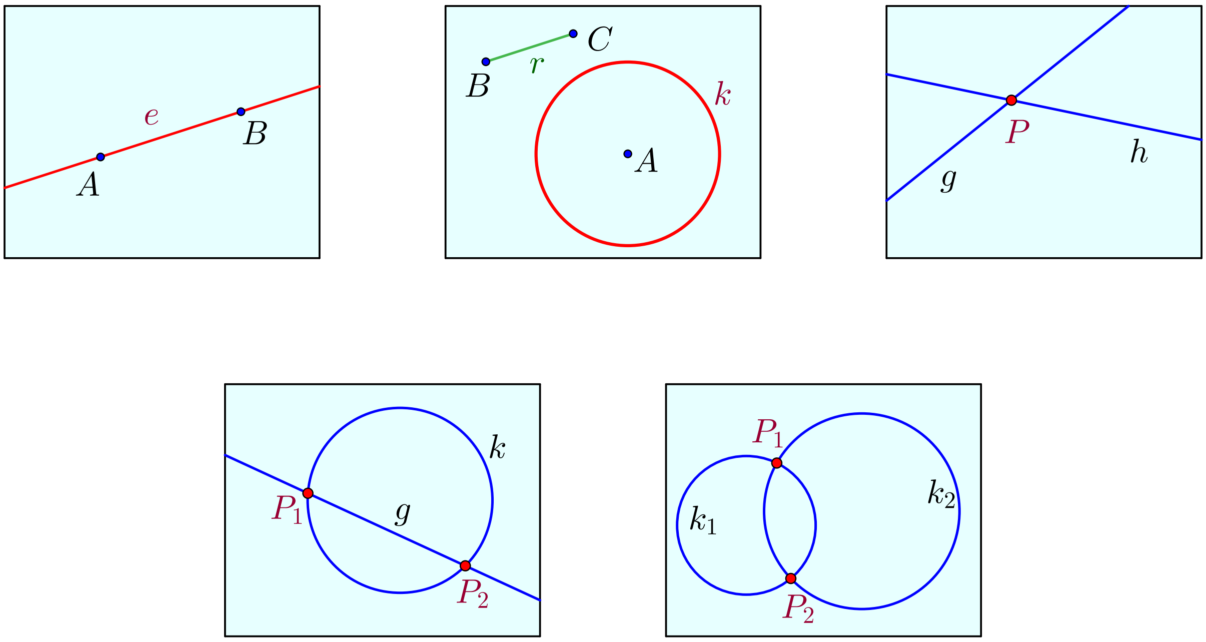
(L4) Egy kör és egy azt metsző egyenes metszéspontjainak a kijelölése.

(L5) Két metsző kör metszéspontjainak a kijelölése.

A szerkesztés során az előbb felsorolt 5 alaplépés véges számú végrehajtásával a kiindulási alakzatokból (alapelemekből) további alakzatokat állítunk elő.

Az (L1) alaplépést alkalmazva egyenessel, az (L2) alaplépést használva körrel, az (L3), (L4) és (L5) alaplépések által pedig ponttal, illetve pontokkal bővítjük a megszerkesztett alapelemek halmazát. (Lásd az 59. ábrát.)

Megjegyzés. Az itt lefektetett alapelvek szerint az euklideszi szerkesztésnél nincs megengedve, hogy a kiindulási adatok között szereplő pontokon kívül még úgynevezett segédpontokat is felvegyünk a síkon.



59. ábra. *A szerkesztés öt lépése: piros színben a kapott új alapelemek.*

Megjegyzés. A továbbiakban egy szakaszt akkor tekintünk megszerkesztettnek, ha az alaplépések alkalmazásával már előállítottuk a szakasz két végpontját és a tartalmazó egyenest. Egy félegyenest akkor mondunk megszerkesztettnek, ha előállítottuk a félegyenes kezdőpontját, egy további pontját és a tartalmazó egyenest. Egy szöget akkor tekintünk megszerkesztettnek, ha előállítottuk a csúcspontját, a szögszárak egy–egy további pontját és a szárak egyeneseit.

Megjegyzés. A szerkesztés síkjában tekintsük a $k(O_1, r_1)$ és $k(O_2, r_2)$ körvonalakat, amelyek O_1, O_2 középpontjai különbözőek és sugaraik r_1, r_2. Többféle módon is igazolható, hogy a két kör közös pontjainak száma vagy 2, vagy 1, vagy pedig 0.

Amennyiben fennáll $|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$, akkor a két körnek két közös pontja van (azaz $k(O_1, r_1) \cap k(O_2, r_2) = \{ M_1, M_2 \}$ teljesül). Ez esetben mondjuk azt, hogy a két kör metszi egymást, és a közös pontokat a körök metszéspontjainak nevezzük.

Ha az $O_1O_2 = |r_1 - r_2|$, $O_1O_2 = r_1 + r_2$ összefüggések egyike teljesül, akkor a két körnek egyetlen közös pontja van. Ekkor azt mondjuk, hogy a két kör érinti egymást.

Amennyiben fennáll az $O_1O_2 < |r_1 - r_2|$, $O_1O_2 > r_1 + r_2$ egyenlőtlenségek egyike, akkor a két körvonalnak nincs közös pontja.

Az euklideszi szerkesztésnél az (L5) alaplépés csak akkor hajtható végre, ha a két adott (vagy már megszerkesztett) kör metszi egymást.

Az euklideszi szerkesztés elemi feladatai

Egy szerkesztési feladathoz olyan kiindulási adatokat kell megadnunk, hogy azokból legalább két pontot származtatni tudjunk. Nyilvánvaló, hogy két adott pontból kiindulva már tetszőleges számú (de csak véges számú) pontot, egyenest és kört tudunk szerkeszteni.

Ugyanis, meg lehet adni a kiindulási alapelemeket oly módon, hogy azok alapján az euklideszi szerkesztés alaplépései közül egyet sem tudunk végrehajtani.

Az alábbiak során felsorolunk néhány megoldható szerkesztési feladatot. Az első két feladat esetében leírjuk a teljes szerkesztési eljárást, illetve megadjuk az alaplépések végrehajtásának sorrendjét.

Természetesen, egy szerkesztési feladatot többféle módon (olykor a lépések sorrendjének a felcserélésével) is meg lehet oldani.

1. Szerkesztési feladat

A szerkesztés σ síkjában adva van két pont A és B. Szerkesszük meg az $\overline{AB}$ szakasz F felezőpontját.

A feladat az alábbiak szerkesztési eljárással oldható meg.

Az A, B pontokon áthaladó e_1 egyenes megszerkesztése.

Az A centrumú és AB sugarú k_1 kör megszerkesztése.

A B centrumú és BA sugarú k_2 kör megszerkesztése.

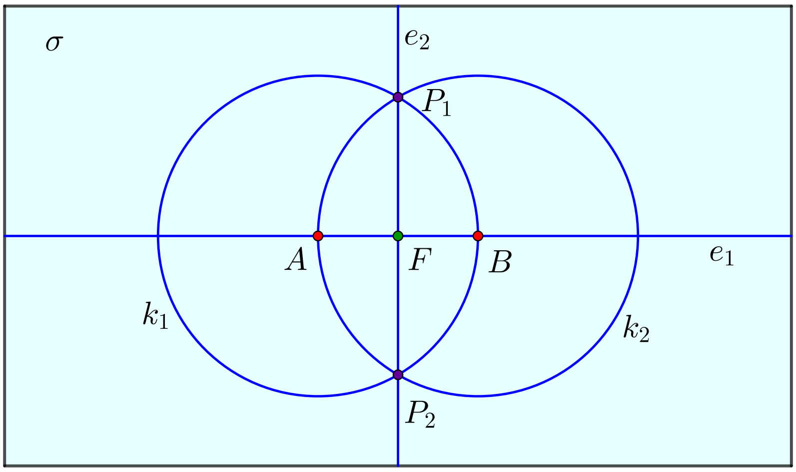
A k_1 és k_2 körök P_1, P_2 metszéspontjainak kijelölése.

A P_1 és P_2 pontokat összekötő e_2 egyenes megszerkesztése.

Az e_1, e_2 egyenesek F felezőpontjának kijelölése.

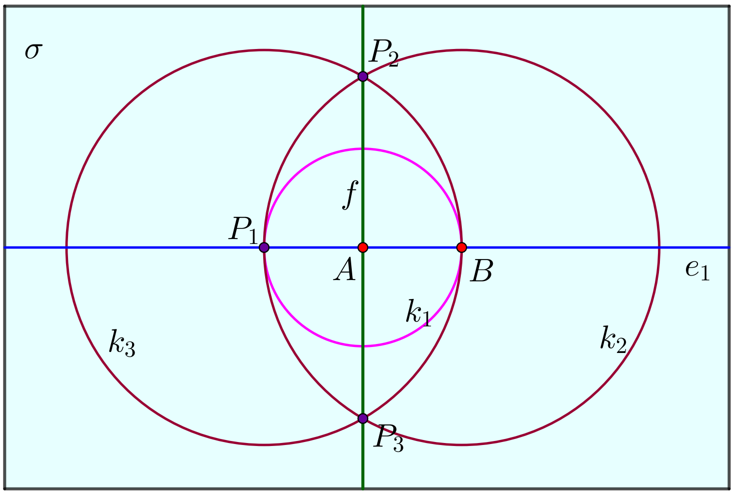
A szerkesztés során végrehajtott lépések sorrendje:

(L1)–(L2)–(L2)–(L5)–(L1)–(L3).



60. ábra. *Az A, B pontokat összekötő szakasz F felezőpontjának szerkesztése.*

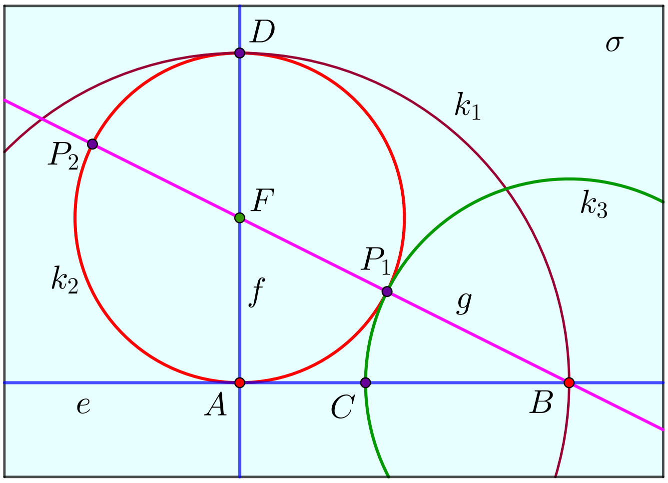
2. Szerkesztési feladat
A síkon adva van két pont A és B. Szerkesszük meg azt az f egyenest, amely áthalad az A–n és merőleges az A, B pontokat összekötő egyenesre.
A feladat az alábbiak szerkesztési eljárással oldható meg.
Az A, B pontokon áthaladó e_1 egyenes megszerkesztése.
Az A centrumú és AB sugarú k_1 kör megszerkesztése.
A k_1 kör és az e_1 egyenes B–től különböző P_1 metszéspontjának kijelölése.
A B centrumú és BP_1 sugarú k_2 kör megszerkesztése.
A P_1 centrumú és P_1B sugarú k_3 kör megszerkesztése.
A k_2 és k_3 körök P_2 és P_3 metszéspontjainak kijelölése.
A P_2 és P_3 pontokat összekötő f egyenes megszerkesztése.
A szerkesztés során végrehajtott lépések sorrendje:
(L1)–(L2)–(L4)–(L2)–(L2)–(L5)–(L1).



61. ábra. *Az A, B pontokat összekötő egyenesre merőleges f egyenes szerkesztése.*

Az alább felsorolt szerkesztési feladatokat is könnyen megoldhatóak.
3. Szerkesztési feladat
Adva vannak az A, B, C nem kollineáris pontok. Szerkesszük meg azt az egyenest, amely áthalad C–n és párhuzamos az A, B pontokat összekötő egyenessel.
4. Szerkesztési feladat
A síkon adva vannak az O, A, B nem kollineáris pontok. Szerkesszük meg az $AOB\sphericalangle$ konvex szög szögfelezőjét.
5. Szerkesztési feladat
Adva van egy k kör és annak O középpontja, továbbá egy olyan P pont, hogy az OP szakaszhossz nagyobb a k sugaránál. Szerkesszük meg azt a két egyenest, amelyek átmennek P–n és érintik a k kört.

Az aranymetszés szerkesztési feladata
A síkon adva van két pont A és B. Szerkesszük meg az $\overline{AB}$ szakasz azon C pontját, amelyre fennáll az $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{CB}{AB}$ *összefüggés.*



62. ábra. *Az aranymetszés feladatának megoldása.*

A szerkesztési feladatnak az alábbiakban ismertetjük egy megoldását.
Szerkesszük meg az A, B pontokon áthaladó e egyenest. Ezt követően szerkesszük meg az A ponton áthaladó és az e–re merőleges f egyenest. A 2. elemi szerkesztést kell ehhez végrehajtanunk. Szerkesszük meg az A centrumú és AB sugarú k_1 kört. Jelöljük ki az f egyenes és a k_1 kör metszéspontjait, melyek egyike legyen D. Ezután szerkesszük meg a $\overline{AD}$ szakasz F felezőpontját. Ezt az F pontot az 1. elemi szerkesztés elvégzésével kapjuk meg. Szerkesszük meg az F centrumú és FA sugarú k_2 kört. Vegyük a B, F pontokat összekötő g egyenest. Jelöljük ki a k_2 kör és g egyenes P_1, P_2 metszéspontjait oly módon, hogy ezek közül P_1 legyen közelebb a B–hez. Szerkesszük meg a B centrumú és BP_1 sugarú k_3 kört, majd jelöljük ki a k_3 kör és az e egyenes metszéspontjait. A két metszéspont közül az A–hoz közelebbi legyen C. Ez a pont adja a feladat megoldását.

Az alábbiak igazolják, hogy a kijelölt C pont valóban aranymetszést ad az $\overline{AB}$ szakaszon. Jelölje a szakasz hosszát ez esetben h. Korábban már beláttuk, hogy amennyiben a h hosszúságú szakaszon vett aranymetszés kisebbik szelete p és a nagyobbik szelete q, akkor az arányokra fennáll $\dfrac{p}{q} = \dfrac{q}{h} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

A fenti szerkesztésnél a k_1 kör sugara h, a k_2 kör sugara pedig $h/2$. Ha alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az $ABF\triangle$ háromszögre, akkor azt kapjuk, hogy a BF átfogó hossza $BF = \dfrac{\sqrt{5}}{2}h$. Ebből már adódik, hogy a BP_1 szakasz hosszára teljesül $BP_1 = BF - FP_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}h$. A szerkesztés alapján tehát fennáll $CB = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}h$, vagyis a CB hossz valóban az $\overline{AB}$ szakaszon vett aranymetszés nagyobbik szeletével egyenlő.

A szabályos tízszög szerkeszthetősége

Logikusnak tűnő kérdés, hogy vajon mely n ($n \geq 3$) pozitív egész számok esetén lehet n–oldalú szabályos sokszöget szerkeszteni, ha a szerkesztés síkjában két pont van megadva.

Az alábbiak során megmutatjuk, hogy szabályos tízszöget és szabályos ötszöget tudunk szerkeszteni.

A szabályos tízszögre vonatkozó szerkesztési feladat

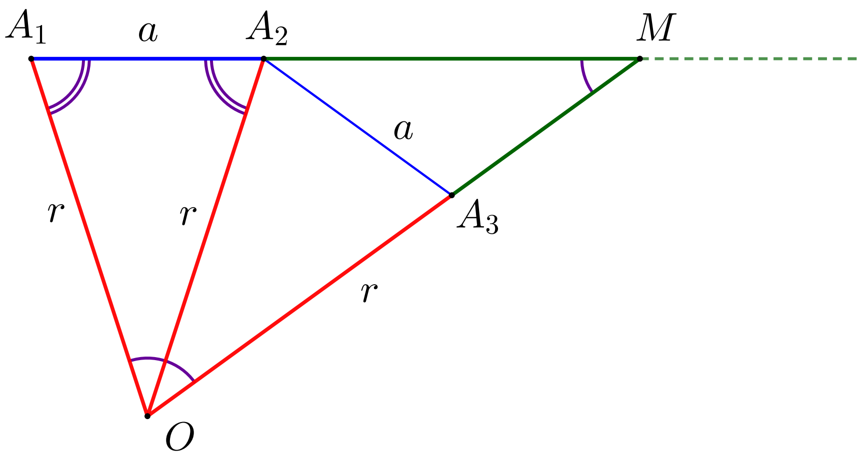
A síkon adva van két pont A és O. Szerkesszük meg azt a szabályos tízszöget, amelynek az egyik csúcspontja A, és ahol a szabályos tízszög köré írt kör középpontja O.

A szerkesztési feladat megoldhatóságát az alábbi eredmény alapján lehet igazolni.

Állítás. *Az r sugarú körbe írt szabályos tízszög a oldalhosszára fennáll az $a\,(a+r) = r^2$ összefüggés.*

Bizonyítás.

A szabályos tízszög csúcsai sorrendben legyenek $A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots, A_{10}$. Jelölje O a tízszög köré írt kör középpontját. Vezessük be az $\varepsilon = A_1OA_2\sphericalangle$ jelölést. Evidens, hogy fennáll $\varepsilon = 36°$. Emellett az $A_1OA_2\triangle$ egyenlő szárú háromszögben az $A_1,\ A_2$ csúcsoknál lévő szögek mértéke $2\,\varepsilon$, vagyis $72°$.



63. ábra. *Szabályos tízszögben az oldal és a köré írt kör sugarának kapcsolata.*

Az A_1A_2 oldal egyenesének és az $O,\ A_3$ pontokon átmenő egyenes metszéspontját jelölje M. Tekintsük az $A_1OM\triangle$ háromszöget. Mivel az $OA_1M\sphericalangle$ és az $A_1OM\sphericalangle$ szögek mértéke egyaránt $2\,\varepsilon = 72°$, fennáll $OMA_1\sphericalangle = 36°$. Ebből az következik, hogy az $OA_2M\triangle$ háromszögben $A_2M = A_2O = r$ teljesül. Eszerint igaz $A_1M = a + r$.

Az $A_1A_2O\triangle$ és $A_1OM\triangle$ egyenlő szárú háromszögek hasonlóak, mert szögeik páronként egyenlőek. Ily módon a megfelelő oldalaik aránya egyenlő, vagyis fennáll az $\dfrac{a}{r} = \dfrac{r}{a+r}$. egyenlőség, ami egyenértékű az állításban szereplő összefüggéssel. $\square$

Következmény. *A szabályos tízszögre vonatkozó szerkesztési feladat megoldható.*
Bizonyítás.
Az $a\,(a+r) = r^2$ egyenletet átrendezve adódik az $a^2 = r(r-a)$ összefüggés. Emiatt pedig fennáll $\dfrac{r-a}{a} = \dfrac{a}{r}$. Ez az egyenlőség pedig azt mutatja, hogy amennyiben az $\overline{OA}$ szakaszon megoldjuk az aranymetszési szerkesztési feladatot, akkor a nagyobbik szelet megegyezik a körbe beírt szabályos tízszög oldalainak a hosszával. $\square$.

Megjegyzés. A korábban leírtakból már adódik, hogy az r sugarú körbe írt szabályos tízszög oldalainak a hosszára fennáll $\quad a = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\,r.$

Megjegyzés. Evidens, hogy mivel lehet szabályos tízszöget szerkeszteni, tudunk szerkeszteni szabályos ötszöget is.

Nevezetes Nem megoldható szerkesztési feladatok

Algebrai eszközökkel (a testbővítések módszerével) bizonyítani lehet, hogy vannak olyan jól meghatározott feladatok, amelyeket az euklideszi szerkesztés módszerével nem lehet megoldani. Az alábbiak során három ilyen feladatot írunk le.

1. nem megoldható feladat
A síkon adva van két pont A és O. Szerkesszük meg azt a szabályos kilencszöget, amelynek az egyik csúcspontja A, és ahol a szabályos kilencszög köré írt kör középpontja O.
A fenti probléma azért nem oldható meg, mert két pontból kiindulva nem lehet $20°$–os szöget szerkeszteni.

2. nem megoldható feladat
Adva van a síkban két pont A és B. Szerkesszünk a síkon olyan C, D pontokat, amelyek távolságára fennáll a $\quad CD^3 = 2\cdot AB^3 \quad$ összefüggés.
Ezt szokás kockakettőzési feladatnak vagy Déloszi problémának nevezni.

3. nem megoldható feladat
Adva van síkban két pont A és B. Vegyük az A középpontú és AB sugarú k kört. Szerkesszünk egy olyan négyzetet, amelynek területe megegyezik a k kör területével.
Ezt a feladatot mondják a körnégyszögesítés problémájának.

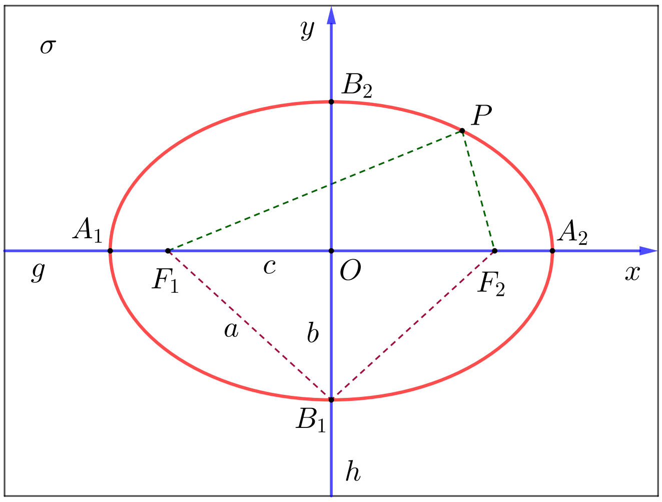
6) Nevezetes síkbeli alakzatok (a kúpszeletek)

Az alábbiak során definiáljuk az ellipszist, a hiperbolát és a parabolát, mint nevezetes síkbeli alakzatokat. Ezeket közös néven kúpszeleteknek hívjuk.

Az ellipszis

6.1. Definíció. A σ síkban legyenek adva az F_1, F_2 pontok és egy a pozitív valós szám, amelyre fennáll $2a > F_1F_2$. Az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a$ nagytengelyhosszal meghatározott σ–beli ellipszisen a sík azon pontjainak halmazát értjük, melyeknél a fókuszpontoktól mért távolságok összege $2a$.

Megjegyzés. A fenti definíciót a következő formában is kimondhatjuk. Az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a$ nagytengelyhosszal meghatározott σ–beli ellipszisen az
$\mathcal{E} = \{\ P \in \sigma \mid F_1P + F_2P = 2a\ \}$ alakzatot értjük.



64. ábra. *Ellipszis az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a = A_1A_2$ nagytengelyhosszal.*

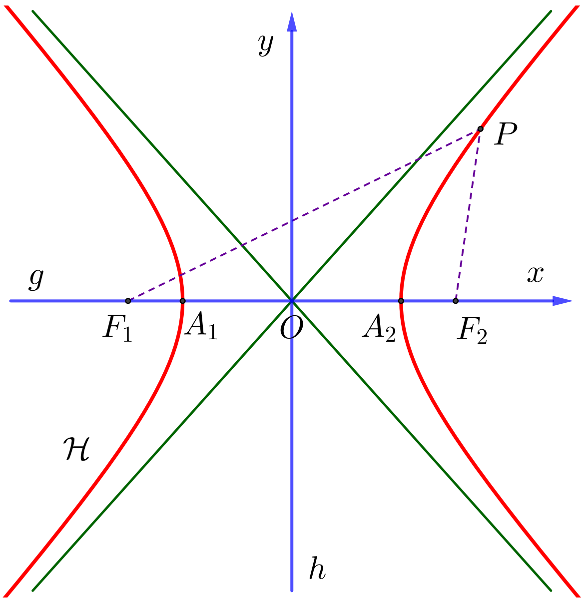
Megjegyzés. Amennyiben az F_1, F_2 fókuszpontok egybeesnek ($F_1 = F_2$), akkor a fenti definícióval leírt ellipszis megegyezik egy a sugarú körrel.

A σ síkban vegyünk egy valódi ellipszist, amelynek fókuszpontjai F_1, F_2 ($F_1 \neq F_2$) és nagytengelyhossza $2a$. Könnyű belátni, hogy a $g = \langle F_1, F_2 \rangle$ egyenesre és az $\overline{F_1F_2}$ szakasz h felező merőlegesére való tükrözés az ellipszist önmagába viszi. Emiatt ezeket a g, h egyeneseket az ellipszis szimmetriatengelyeinek nevezzük. Az $\overline{F_1F_2}$ szakasz felezőpontja legyen O. Világos, hogy az O pontra történő tükrözés is önmagába képezi az ellipszist. Az O pontot az ellipszis centrumának (vagy középpontjának) mondjuk.

A hiperbola

6.2. Definíció. Egy σ síkban legyenek adva az F_1, F_2 pontok és egy a pozitív valós szám, amelyre fennáll $2a < F_1F_2$. Az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a$ valós tengelyhosszal meghatározott σ–beli hiperbolán a sík azon pontjainak halmazát értjük, melyeknél a fókuszpontoktól mért távolságok különbségének az abszolút értéke $2a$.

Megjegyzés. A fenti definíciót a következő formában is kimondhatjuk. Az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a$ valós tengelyhosszal meghatározott σ–beli hiperbolán a $\mathcal{H} = \{\ P \in \sigma \mid |F_1P - F_2P| = 2a\ \}$ alakzatot értjük.



65. ábra. *Hiperbola az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a = A_1A_2$ valós tengelyhosszal.*

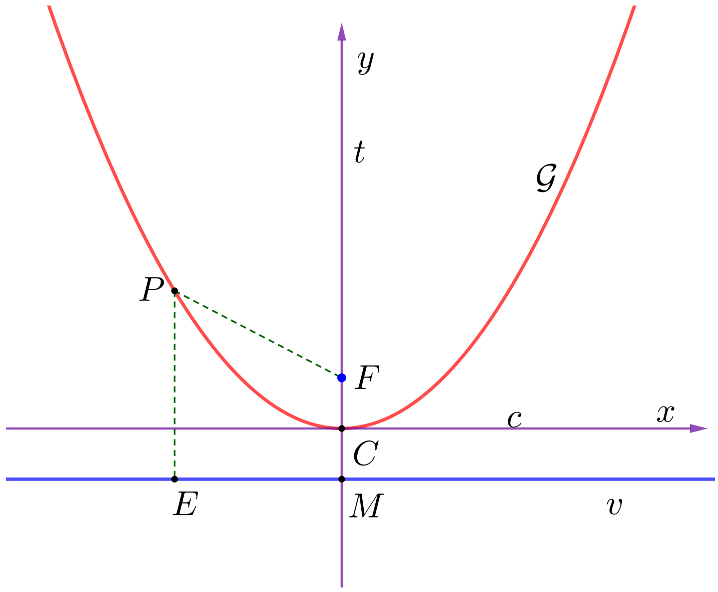
A σ síkban tekintsünk egy hiperbolát, amelynek fókuszpontjai F_1 és F_2, a tengelyhossza pedig $2a$. Könnyen be lehet látni, hogy a $g = \langle F_1, F_2 \rangle$ egyenes és az $\overline{F_1F_2}$ szakasz h felezőmerőleges egyenese egyaránt szimmetriatengelye a hiperbolának. A hiperbola szimmetriacentruma az $\overline{F_1F_2}$ szakasz O felezőpontja lesz, mivel az O–ra történő tükrözés önmagába viszi a hiperbolát.

A parabola

6.3. Definíció. Egy σ síkban legyen adva egy F pont és egy az F–re nem illeszkedő v egyenes. Az F fókuszponttal és a v vezéregyenessel meghatározott parabolán a sík azon pontjainak halmazát értjük, melyeknek a F fókusztól mért távolsága megegyezik a v egyenestől mért távolsággal.

Megjegyzés. A sík egy P pontjának a v egyenestől való távolságát jelölje $d(v, P)$. A fenti definíciót a következő formában is kimondhatjuk. Az F fókuszpontokkal és a v vezéregyenessel meghatározott σ–beli parabolán a
$\mathcal{G} = \{\ P \in \sigma \mid FP = d(v, P)\ \}$ alakzatot értjük.

Megjegyzés. A parabola vezéregyenesét szokás direktrixnek is nevezni.



66. ábra. *Az F fókuszponttal és a v vezéregyenessel meghatározott $\mathcal{G}$ parabola.*

Megjegyzés. A síkban legyen adva egy parabola, melynek fókuszpontja F és vezéregyenese v. Az F fókuszpont és a v egyenes $p = d(v, F)$ távolságát a parabola paraméterének mondjuk.

A σ síkban vegyünk egy parabolát, amelynek fókuszpontja F és vezéregyenese v. Legyen t az az egyenes, amely áthalad az F ponton és merőleges v–re. Nyilvánvaló, hogy a t egyensre történő tükrözés az F fókuszt fixen hagyja és a v–t önmagába képezi, tehát a parabolát önmagába viszi. Emiatt a t egyenest a parabola szimmetriatengelyének (rövidebben a parabola tengelyének) nevezzük.