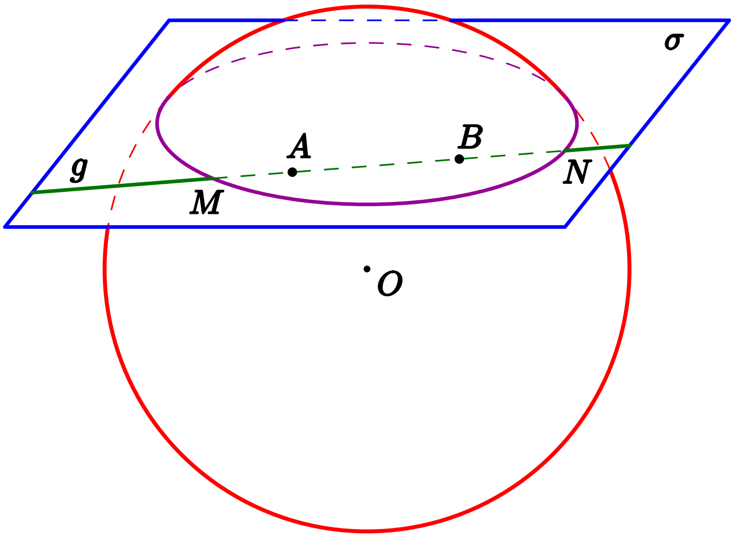
Verhóczki László

Geometriai axiómarendszerek és modellek



ELTE TTK Matematikai Intézet
Geometriai Tanszék

2021

Előszó

A jegyzet egyik célja az, hogy megismertesse az olvasót az euklideszi geometria és a hiperbolikus geometria egy hatékony axiómarendszerével, melynek alkalmazásával viszonylag gyorsan kidolgozhatóak ezen matematikai elméletek alapjai. A másik cél, hogy bemutassa a hiperbolikus síkgeometria két olyan modelljét, amelyeket már a XIX. század második felében felfedeztek és amelyek könnyen értelmezhetőek.

Az első fejezetben az axiomatikus felépítéssel kapcsolatos fogalmak tárgyalására, valamint a geometriai elméletek rövid történeti áttekintésére kerül sor.

A második fejezetben tágyaljuk a fent említett axiómarendszert. Ebben fontos szerepet játszik az úgynevezett Birkhoff–féle vonalzó axióma, amely szerint egy speciális távolságfüggvény van adva a tér pontjainak halmazán. Ily módon értelmezni lehet az egybevágósági transzformációkat, amelyek megőrzik a tér pontjainak távolságát. Ennek alapján tudjuk kimondani az úgynevezett egybevágósági axiómát, amely szintén egy igen erős állítást fogalmaz meg. Ezt követően eljutunk az úgynevezett párhuzamossági problémához, melynek XIX. századi megoldásában Bolyai János magyar matematikus és hadmérnök szerzett nagy érdemeket. Ez azt a kérdést veti fel, hogy a kimondott axiómákból vajon következik-e, hogy *amennyiben adva van egy egyenes és egy arra nem illeszkedő pont, akkor a ponton csak egy olyan egyenes halad át, amely az adott egyenessel párhuzamos.*

Mivel a helyes válasz nemleges, ezt a kijelentést is be kell vennünk az euklideszi geometria axiómái közé. Ha viszont a fenti kijelentés helyett annak tagadását vesszük hozzá a többi axiómához, akkor az így nyert axiómarendszerre egy új geometria építhető fel, nevezetesen a Bolyai–Lobacsevszkij–féle hiperbolikus geometria.

A jegyzet negyedik fejezetében a síkgeometriai axiómák leírására kerül sor. Az ötödik fejezetben röviden tárgyaljuk az abszolút geometriát, melynek tételei az euklideszi és a hiperbolikus geometriában egyaránt érvényesek.

A további fejezetekben a hiperbolikus síkgeometria körmodelljeit vizsgáljuk. Ezeket az euklideszi geometria keretein belül, abból kiindulva konstruálhatjuk meg. A tárgyalt modellekben a kollineáris (illetve a köri) pontnégyeshez rendelt kettősviszonyon alapul a távolságfüggvény értelmezése. A térbeli hiperbolikus geometria modelljeként a Beltrami–Cayley–Klein–féle gömbmodell leírására is sor kerül.

A jegyzet elsődlegesen az ELTE matematikatanári szakos hallgatói számára készült. Geometriai tanulmányaik során ők megismerkednek azokkal az alapvető fogalmakkal és tételekkel, amelyek a vizsgált modellek értelmezéséhez szükségesek.

Ha az olvasó érdeklődik az iránt, hogy a második fejezetben leírt axiómarendszerből kiindulva miként lehet bizonyítani alapvetőnek tartott tételeket (például a nevezetes háromszög-egyenlőtlenséget), akkor javasoljuk számára a *Bevezetés a geometriába* c. jegyzet első fejezetének tanulmányozását is. A jegyzet elérhető az interneten a *https://web.cs.elte.hu/geometry/vl/BevGeoJegyzetVL.pdf* linken.

1) Az axiómákra vonatkozó alapvető ismeretek

Egy matematikai elmélet felépítésének alapelvei

Minden matematikai elmélet fogalmak és állítások gyűjteményeként fogható fel. Az elmélet felépítése során a felhasznált fogalmakat korábbi fogalmak segítségével kell körülírni (más szóval definiálni), a kimondott állításokat pedig be kell bizonyítani. Állításon tehát egy olyan kijelentést értünk, amely az adott elmélet fogalmaival kapcsolatos összefüggést (vagy összefüggéseket) fogalmaz meg, és amelyet korábban igazolt állításokból logikai úton le lehet vezetni. Már az ókori görögök rájöttek arra, hogy egy önálló elmélet egzakt felépítéséhez szükség van olyan kijelentésekre (úgynevezett alapigazságokra), amelyek az elmélet alapját képezik, és amelyeket emiatt nem bizonyítunk. Ezeket nevezzük az elmélet axiómáinak. *Az axiómákon tehát azokat az elmélet alapjául szolgáló állításokat értjük, melyeket bizonyítás nélkül elfogadunk.* A bennük szereplő fogalmak egy részét külön nem értelmezzük, mivel ezeket az axiómák által leírt összefüggések (relációk) jellemzik. Az axiómákban szereplő azon fogalmakat, amelyeket külön nem definiálunk, primitív fogalmaknak nevezzük. Az axiómák együttesen az elmélet axiómarendszerét képezik.

Amennyiben rögzítettük az axiómarendszert, akkor az elméletben szereplő összes fogalmat a primitív fogalmakat felhasználva kell értelmezni (más szóval definiálni), az állításokat pedig az axiómákból kell levezetni.

Elvárások egy axiómarendszerrel szemben: ellentmondásmentesség, függetlenség

Egy elmélet axiómarendszere akkor ellentmondásos, ha meg lehet adni egy olyan kijelentést (állítást), hogy azt és annak tagadását az axiómákból egyaránt le lehet vezetni. Az *ellentmondásmentesség* ennek az ellenkezőjét jelenti, tehát azt, hogy egy kijelentést és annak tagadását semmiképp sem lehet az axiómákból kiindulva bizonyítani. *Bármely tudományos elmélet axiómarendszerével szemben alapvető követelményként támasztják az ellentmondásmentesség teljesülését.*

Egy axiómarendszert függetlennek mondunk, ha bármelyik axiómát is vesszük, azt a többi axiómából nem lehet levezetni. Más megfogalmazásban ez azt jelenti, hogy egyik axióma sem következménye a többinek. Egy elmélet axiómarendszerének kidolgozásánál általában törekedni szoktak a *függetlenség* elérésére. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy olykor a függetlenség elvének feladásával olyan axiómarendszert lehet kialakítani, amelyre alapozva az elmélet gyorsabban és hatékonyabban felépíthető.

Egy elmélet axiómarendszere akkor teljes, ha az elmélet kapcsán felvethető bármely kijelentésről (állításról) el lehet dönteni annak igaz vagy hamis voltát. K. Gödel osztrák matematikus az 1930–as években bebizonyította, hogy ha egy axiómarendszer eleget tesz bizonyos minimális feltételeknek, akkor azzal kapcsolatosan mindig lehet találni olyan állítást, amelynek sem igaz voltát, sem pedig hamis voltát nem lehet az axiómákból levezetni. Ily módon a *teljesség* a geometriai axiómarendszerek esetében sem teljesül. Fontos viszont megjegyezni, hogy ezek az el nem dönthető állítások általában mesterkéltek.

Az ellentmondásmentesség mellett egy tudományos elmélettől általában elvárják még azt is, hogy valamire *alkalmazható legyen* a gyakorlatban. Egy elmélet alkalmazhatóságának persze lehetnek (és általában vannak) korlátai. Az euklideszi geometria állításai, összefüggései jól alkalmazhatóak a műszaki tudományokban, különösen a gépészetben és az építészetben adódó feladatok megoldására. Az asztrofizikai vizsgálatok és számítások esetében azonban az euklideszi geometria eszközei már nem elégségesek.

A geometria történeti vonatkozásai

A geometria a legrégebbi matematikai tudomány, amelynek keretei az ókorban alakultak ki. Az ókori társadalmakban a mezőgazdasági termelés megszervezéséhez szükségessé vált a földterületek nagyságának jellemzése, vagyis a földmérés. Emellett az építészetben és a képzőművészetben fellépő gyakorlati problémák is igényelték a különféle térbeli alakzatok tulajdonságainak vizsgálatát, ami egy tudományos elmélet, a geometria kialakulásához vezetett. *A geometria szó egyébként görög eredetű, magyarra fordítva földmérést jelent.*

A köznapi szóhasználatban manapság azt szokták mondani, hogy a geometria a térbeli alakzatok (ponthalmazok) tulajdonságaival foglalkozó tudomány.

Az emberiség történetében az első tudományos igényű elmélet kidolgozójának a görög Euklidészt tekintik, aki az i.e. 300 körül írt *Elemek* című művében az akkori geometriai ismereteknek egy rendszeres összefoglalását adta meg. Euklidész felismerte, hogy a geometria elméletének felépítéséhez is szükség van "alapkövekre", vagyis olyan kiindulópontként szolgáló állításokra, melyeket bizonyítás nélkül elfogadunk. Az általa megadott axiómákon alapuló matematikai elméletet nevezik *euklideszi geometriának*.

Euklidész "alapigazságai" között szerepel egy olyan axióma is, amely egyenértékű az alábbi kijelentéssel: *Ha egy síkban adott egy egyenes és egy hozzá nem illeszkedő pont, akkor a síkban csak egy olyan egyenes van, amely áthalad az adott ponton és nem metszi az adott egyenest.* Ezt a kijelentést nevezik az euklideszi geometria *Párhuzamossági axiómájának.* (Két egyenest akkor mondunk párhuzamosnak, ha egy síkban vannak és nincs közös pontjuk.) A fenti axióma tehát kimondja, hogy egy adott ponton át csak egy olyan egyenes halad, amely egy megadott egyenessel párhuzamos. A Párhuzamossági axiómával kapcsolatban meg kell említenünk, hogy azt a későbbi korok egyes matematikusai nagyon erős előírásnak tartották, és bizonytalanok voltak abban, hogy vajon szükségszerű-e azt is axiómaként alkalmazni.

Az ókorban és a középkorban a geometriai vizsgálatok során főként szintetikus (más szóval elemi) eszközöket használtak. A geometriai tárgyalások számára egy új és igen hatékony módszert adott R. Descartes francia matematikus, aki az 1637–ben kiadott *Geometria* című könyvében már alkalmazta a síkbeli koordináta–rendszert, ami lehetővé tette a nevezetes síkbeli alakzatok egyenletekkel történő leírását. Ez vezetett az analitikus geometria kialakulásához, amely a geometriai problémák tárgyalásához az algebra és az analízis eszközeit is felhasználja. A XVIII. században a geometriai vizsgálatokban egyre inkább előtérbe kerültek az analitikus módszerek, továbbá fontos szerephez jutott a Párhuzamossági axióma függetlenségének kérdése. Egyes matematikusokban az az ötlet támadt, hogy a párhuzamosságra vonatkozó axiómát a többi axiómából már le lehet vezetni.

Fontos megjegyeznünk, hogy a XIX. század közepéig a geometriát művelői úgy tekintették, mint a bennünket körülvevő fizikai tér jól meghatározott tulajdonságait leíró tudományt, melynek összefüggéseit (állításait) a tapasztalat révén ellenőrizni lehet. Ennek következtében a geometriai tárgyalások során egyes összefüggéseket bizonyítás nélkül, csupán a szemléletre hivatkozva alkalmaztak. Ugyanakkor, a tapasztalatra támaszkodó felfogás fölösleges kötöttségeket is okozott.

A XIX. században az euklideszi geometria axiomatikus megalapozásának kérdésében is lényeges előrelépések történtek. Az 1820–as évek végén Bolyai János magyar és N. I. Lobacsevszkij orosz matematikusok vizsgálataik során egyidejűleg arra a meggyőződésre jutottak, hogy amennyiben a Párhuzamossági axióma helyett annak tagadását veszik "alapigazságként" és a többi axiómát meghagyják, akkor azokra is felépíthető egy olyan elméletet, amelyben nincs ellentmondás. Ha pedig ez igaz, akkor a Párhuzamossági axióma nem lehet következménye az euklideszi geometria többi axiómájának.

Bolyai és Lobacsevszkij nemcsak azt állították, hogy a Párhuzamossági axióma a többi axiómától független, hanem rámutattak arra, hogy az euklideszi geometrián kívül más geometriai elméletek is kidolgozhatóak. A Párhuzamossági axióma tagadásával általuk felépített geometriát nevezik *hiperbolikus geometriának* (vagy más szóval Bolyai–Lobacsevszkij–féle geometriának). Mindketten lényeges haladást értek el ezen új geometria felépítésében anélkül, hogy valamilyen ellentmondásra bukkantak volna. Többek között igazolták, hogy ebben az új geometriában a trigonometriai tételek (például a szinusz- és koszinusz tételek) szoros kapcsolatban állnak a gömbi geometria trigonometriai tételeivel. Ha a gömbi geometria tételeiben a szögfüggvények helyett a megfelelő hiperbolikus függvényeket alkalmazzuk, akkor visszakapjuk az új geometria trigonometriai tételeit.

Bolyai János elméletének publikálására 1832–ben került sor az édesapja, Bolyai Farkas által írt matematika tankönyv függellékeként. *Fontos azonban megemlíteni, hogy munkássága alatt sem Bolyai, sem pedig Lobacsevszkij nem tudott modellt adni a Párhuzamossági axióma tagadását axiómaként alkalmazó geometriára, tehát annak ellentmondásmentességét nem sikerült bizonyítaniuk.* Emiatt koruk vezető matematikusai, közöttük C. F. Gauss, igen óvatosan és tartózkodva fogadták eredményeiket. A hiperbolikus geometria első modelljének, az úgynevezett Beltrami–Cayley–Klein–modellnek a megalkotására még közel 40 évet kellett várni. A matematikusok széles körében ekkor vált csak elismertté Bolyai és Lobacsevszkij felfedezésének nagy jelentősége.

Ha a Párhuzamossági axiómát elhagyjuk az euklideszi geometria axiómái közül, akkor a visszamaradt axiómákra alapozott matematikai elméletet *abszolút geometriának* mondjuk. Ezen meghatározásból következik, hogy az abszolút geometria eredményei mind az euklideszi geometriában, mind pedig a hiperbolikus geometriában érvényben maradnak.

A XIX. század második felében jöttek rá arra, hogy az axiómák között szükség van olyan kijelentésekre is, amelyek az elválasztási (rendezési) relációkkal kapcsolatosak. A korábbi vizsgálatoknál ugyanis az elválasztási kérdések nem voltak megfelelően tisztázottak. M. Pasch német matematikus adott egy olyan szabatos axiómát, amely azt eredményezi, hogy egy egyenes az őt tartalmazó síkot mindig két félsíkra vágja, illetve egy sík a teret mindig két féltérre osztja.

F. Klein német matematikus irányította a figyelmet a geometriákban fellépő transzformációcsoportok tanulmányozásának fontosságára. Egy 1872–ben tartott előadásában, amely az *erlangeni program* néven vált közismertté, Klein a geometriai elméletek egyik alapvető feladataként jelölte meg a különféle transzformációcsoportokkal szemben invariáns *(vagyis a transzformációk által meg nem változtatott)* fogalmak és tulajdonságok meghatározását. A transzformációcsoportok kiemelt szerepe egyben a geometria és az algebra szoros kapcsolatát mutatja.

Az euklideszi geometria első olyan axiómarendszerét, amely teljes mértékben megfelel a modern tudományos igényeknek, D. Hilbert német matematikus adta meg 1899–ben *A geometria alapjai* című könyvében. Az általa leírt axiómákat tartalmuk alapján csoportokba lehet sorolni, így a Párhuzamossági axióma mellett szokás beszélni az illeszkedési, a rendezési, az egybevágósági és a folytonossági axiómákról. A Strohmajer János által írt *A geometria alapjai* című jegyzet lényegében a Hilbert–féle axiómarendszert veszi a tárgyalás alapjául.

Az euklideszi geometriának a Hilbert–féle axiómákon alapuló felépítése matematikailag teljesen korrekt módon elvégezhető, viszont nagyon időigényes. Emiatt az 1930–as években G. D. Birkhoff amerikai matematikus javasolt egy igen erős axiómat, amely felteszi, hogy *a téren adva van egy távolságfüggvény, továbbá az egyenesek pontjai és a valós számtest elemei között olyan bijektív megfeleltetéseket (koordinátázásokat) lehet létesíteni, ahol bármely két pontnál a koordináták különbségének az abszolút értéke megegyezik a két pont távolságával.* A szakirodalomban ezt nevezik *Birkhoff–féle vonalzó axiómának*.

A Birkhoff–féle vonalzó axióma erősségét mutatja, hogy a Hilbert–féle rendezési és egybevágósági axiómák közül többet is helyettesít, és Hilbert mindkét folytonossági axiómája ugyancsak következik belőle.

A projektív geometria

Az euklideszi geometria, az abszolút geometria és a hiperbolikus geometria mellett feltétlenül meg kell még említenünk a *projektív geometriát*, mint egy további klasszikus geometriai elméletet. A képzőművészetben nagy szükség volt a centrális vetítés tulajdonságainak tanulmányozására, és ennek során fejlődött ki a projektív geometria. Kiderült, hogy a centrális vetítések vizsgálatában egy hasznos módszer, ha az euklideszi teret kibővítjük a párhuzamos egyenesosztályokhoz rendelt ún. ideális pontokkal. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy a projektív geometria felépíthető önálló matematikai elméletként is egy megfelelő axiómarendszert véve alapul.

A XVIII. században már világossá vált, hogy az euklideszi tér görbéinek és felületeinek analitikus vizsgálata során hatékonyan lehet alkalmazni az analízis eredményeit. Ez a felismerés vezetett a *differenciálgeometria* kialakulásához. A differenciálgeometria teljes mértékben a topológia, az analízis és az algebra által felépített fogalmakra és tételekre építkezik, ezek felhasználásával definiálja saját fogalmait.

A geometriai modellek szerepe. A relatív ellentmondásmentesség

Egy matematikai elmélet axiómarendszerében szereplő állítások az elmélet alapelemeire vonatkozó relációkat (összefüggéseket) fogalmaznak meg. Amennyiben egy másik matematikai elméletet véve alapul abban megadunk olyan konkrét objektumokat és közöttük olyan világosan leírt kapcsolatokat (relációkat), amelyekre teljesülnek az axiómarendszer kijelentései, akkor ezen objektumokat kapcsolataikkal együtt az axiómarendszer egyik *modelljének* mondjuk.

A modell tehát nem más, mint az elmélet egyik realizálása. Egy elméletnek természetesen sokféle modellje lehet. Fontos viszont kiemelnünk, hogy az elmélet bármely (az axiómákból levezetett) állításának az összes modellben igaznak kell lennie. Amennyiben egy elmélet ellentmondásos, akkor az ellentmondás "az elmélet modelljében" is megmutatkozik. Ily módon a modell segítségével nemcsak az elmélet állításainak ellenőrzésére nyílik mód, hanem az axiómarendszer relatív ellentmondásmentességének igazolására is. Ugyanis, az elmélet egy modelljét csakis egy másik matematikai elméletre alapozva lehet megkonstruálni. Emiatt csak azt mondhatjuk, hogy a modellel alátámasztott elmélet axiómarendszere ellentmondásmentes, amennyiben a modell alapjául szolgáló másik elmélet axiómarendszere ellentmondásmentes.

Az euklideszi geometria legfontosabb modellje az $\mathbb{R}$ valós számtestre épített analitikus modell. Mivel a valós számokat felhasználva egy modellt tudunk adni az euklideszi geometriára, azt mondhatjuk, hogy *amennyiben a valós számok axiómarendszere ellentmondásmentes, akkor az euklideszi geometria axiómarendszere is ellentmondásmentes.*

A hiperbolikus geometriának több modelljét is meg lehet konstruálni az euklideszi geometriát véve alapul. Emiatt azt mondhatjuk, hogy amennyiben az euklideszi geometria ellentmondásmentes, akkor a hiperbolikus geometria is az.

A hiperbolikus geometria legismertebb modellje a Beltrami–Cayley–Klein–féle gömbmodell, amely egyben a hiperbolikus geometria elsőként felfedezett modellje. Annak igazolásához, hogy a gömbmodellben teljesülnek az abszolút geometria axiómái alkalmaznunk kell a projektív geometria alapvető fogalmait és tételeit is. Emiatt ezt szokás projektív modellnek is nevezni.

2) Az euklideszi geometria egyik axiómarendszere

Az axiómarendszer leírásánál felhasználjuk a halmazelmélet alapvető fogalmait, továbbá alkalmazunk a valós számtesthez kapcsolódó fogalmakat is. A távolságfüggvény kitüntetett szerepe miatt a jelen fejezetben megadott axiómarendszert metrikusnak szokás nevezni.

Kitüntetett térbeli alakzatok. Az illeszkedés értelmezése

Legyen adott egy X halmaz, amelyet térnek mondunk, és amelynek az elemeit pontoknak nevezzük. Az X részhalmazait ponthalmazoknak vagy alakzatoknak mondjuk. A ponthalmazok között vannak kitüntetett alakzatok, amelyeket egyenesnek vagy síknak nevezünk. A továbbiakban jelölje $\mathcal{E}$ az egyenesek halmazát, és jelölje $\mathcal{S}$ a síkok halmazát.

A pontokat, az egyeneseket és a síkokat együttesen térelemeknek is hívjuk, bár az egyenesek és a síkok valójában az X tér kitüntetett részhalmazai. A későbbiek során a pontokat latin nagybetűkkel (például A, B, C, P), az egyeneseket latin kisbetűkkel (például a, b, e, g), a síkokat pedig görög betűkkel (például α, β, σ) fogjuk jelölni.

A térelemek illeszkedését a tartalmazás alapján értelmezzük. Azt mondjuk, hogy egy A pont illeszkedik egy e egyeneshez, ha A eleme e–nek. Egy B pontról azt mondjuk, hogy az illeszkedik egy σ síkhoz, ha B az egyik eleme σ–nak. Egy g egyenesről azt mondjuk, hogy az illeszkedik egy α síkhoz, ha g egy részhalmaza α–nak.

A térelemek illeszkedésével kapcsolatosan az alábbi kifejezéseket is használni fogjuk. Ha egy A pont illeszkedik egy e egyeneshez, akkor azt is mondjuk, hogy az e egyenes illeszkedik az A ponthoz, illetve az e egyenes áthalad (átmegy) az A ponton. Analóg módon, ha egy B pont eleme egy σ síknak, akkor azt is mondjuk, hogy a σ sík illeszkedik a B ponthoz. A $g \subset \alpha$ feltétel teljesülése esetén azt is mondjuk, hogy az α sík illeszkedik a g egyeneshez, illetve az α sík tartalmazza a g egyenest.

Tekintsünk az X térben véges sok pontot. Ezen pontokat kollineárisaknak (illetve *komplanárisaknak*) mondjuk, ha van olyan egyenes (illetve *ha van olyan sík*), amely az adott pontok mindegyikét tartalmazza. Ezt követően ha n számú pontról (egyenesről vagy síkról) szólunk, akkor ezen n számú különböző pontot (egyenest vagy síkot) értünk.

Állapodjunk meg abban is, hogy amennyiben kimondunk egy axiómát, akkor a továbbiakban már feltesszük annak teljesülését.

A pontok, az egyenesek és a síkok illeszkedésével kapcsolatos axiómák

(IA 1) *Van a térnek négy olyan pontja, amelyek nem kollineárisak és nem komplanárisak.*

(IA 2) *Bármely két ponthoz egy és csakis egy egyenes illeszkedik.*

(IA 3) *Minden síkhoz illeszkedik három nem kollineáris pont.*

(IA 4) *Bármely három nem kollineáris ponthoz egy és csakis egy sík illeszkedik.*

(IA 5) *Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkhoz, akkor az egyenes is illeszkedik a síkhoz.*

(IA 6) *Ha két síknak van egy közös pontja, akkor a két síknak van további közös pontja.*

Ha A és B különböző pontok, jelölje $\langle A, B \rangle$ azt az egyenest, amely az A–n és a B–n egyaránt áthalad. Amennyiben A, B, C nem kollineáris pontok, jelölje $\langle A, B, C \rangle$ azt a síkot, amelyhez mindhárom pont illeszkedik.

A kimondott axiómákból már levezethető, hogy *ha két síknak van közös pontja, akkor a két sík metszete egy egyenes.* Ilyen esetben a két síkról azt mondjuk, hogy metszik egymást.

Megjegyzés. A Hilbert-féle illeszkedési axiómák között szerepel még az a kijelentés is.
(IA 7) Bármely egyeneshez illeszkedik legalább két pont.
Ezt azért nem mondtuk ki, mert ez következik az alábbi axiómából.

A Birkhoff–féle vonalzó axióma

A szokásoknak megfelelően jelölje $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát. Vegyük a tér összes pontjainak X halmazát és ezen halmaz önmagával vett Descartes–szorzatát, vagyis az $X \times X = \{ (A, B) \mid A,\ B \in X \}$ halmazt.

(BVA) *Adva van egy olyan $d : X \times X \to \mathbb{R}$ valós függvény, amelyre teljesül az alábbi kijelentés: Tetszőleges g egyeneshez létezik egy olyan $\xi : g \to \mathbb{R}$ bijekció, hogy bármely a g–hez illeszkedő A, B pontokra fennáll a $|\xi(A) - \xi(B)| = d(A, B)$ összefüggés.*

Megjegyzés. A (BVA) axiómában szereplő kijelentést a továbbiakban a d függvényre vonatkozó *vonalzó feltételként* fogjuk említeni.
A $\xi : g \to \mathbb{R}$ bijektív leképezést a g egyenes egyik koordinátázásának nevezzük.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a vonalzó feltétel miatt bármely A, $B \in X$ pontok esetén fennáll $d(A, B) \geq 0$ és $d(A, B) = d(B, A)$. Emellett a $d(A, B) = 0$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha fennáll $A = B$.

A (BVA) axiómával megadott $d : X \times X \to \mathbb{R}$ függvényt a továbbiakban távolság-függvénynek mondjuk.
Definíció. A tér valamely A, B pontjainak távolságán a $d(A, B)$ nemnegatív számot értjük.

Megjegyzés. A (BVA) axiómából már következik, hogy *a tér bármely egyeneséhez és bármely síkjához végtelen sok pont illeszkedik.*

Megjegyzés. A kimondott axiómák alapján könnyű belátni, hogy amennyiben az A pont nem illeszkedik az e egyeneshez, akkor egyértelműen létezik egy sík, amely A–t és e–t egyaránt tartalmazza. Ezt a síkot a továbbiakban jelölje $\langle e, A \rangle$.

Megjegyzés. Ha a g, h ($g \neq h$) egyeneseknek van egy közös pontja, akkor a két egyenest metszőnek, a közös pontot pedig g és h metszéspontjának mondjuk. Ha egy síknak és egy egyenesnek egyetlen közös pontja van, akkor azt mondjuk, hogy az egyenes metszi a síkot, illetve a sík metszi az egyenest. A közös pontot ez esetben a két térelem metszéspontjának nevezzük.

A szakasz és a félegyenes értelmezése

Definíció. Legyenek adva az A, B és C pontok. Azt mondjuk, hogy a C pont az A és a B pontok között van, ha A, B és C egyazon egyenes különböző pontjai, továbbá fennáll a $d(A,C)+d(C,B)=d(A,B)$ összefüggés.

Ez esetben azt is mondjuk, hogy a C pont elválasztja egymástól az A, B pontokat.

Megjegyzés. Amennyiben a C pont nincs az A és B pontok között, akkor azt mondjuk, hogy a C pont nem választja el az A, B pontokat.

Megjegyzés. Egy g egyenesen vegyük az A, B, C pontokat, továbbá a g–nek egy $\xi : g \to \mathbb{R}$ koordinátázását. A C pont az A és a B pontok között van akkor és csak akkor, ha a $\xi(C)$ valós szám a $\xi(A)$, $\xi(B)$ számok között van, vagyis ha fennáll $(\xi(A)-\xi(C))(\xi(B)-\xi(C))<0$.

Ebből már következik, hogy egy egyenes három pontja közül pontosan egy van a másik kettő között.

Definíció. Legyenek A és B különböző pontok. Az A és B végpontokkal meghatározott $\overline{AB}$ szakaszon azt az alakzatot értjük, amelyet az A, B pontok és az $\langle A,B\rangle$ egyenes azon pontjai alkotnak, amelyek A és B között vannak.

Megjegyzés. A fenti definíció szerint az $\overline{AB}$ szakaszt a két végponton kívül az $\langle A,B\rangle$ egyenes azon pontjai alkotják, amelyek elválasztják az A, B pontokat.

Megjegyzés. Az A, B pontokat az $\overline{AB}$ szakasz határpontjainak is mondjuk. Az $\overline{AB}$ szakasznak a határpontoktól különböző pontjait a szakasz belső pontjainak nevezzük.

Ha a két végpont megegyezik (azaz fennáll $A=B$), akkor a fenti definícióval nyert $\overline{AA}=\{A\}$ alakzatot pontszakasznak mondjuk. A pontszakasznak nincs belső pontja.

Definíció. Az $\overline{AB}$ szakasz hosszán a $d(A,B)$ pozitív számot (azaz a végpontok távolságát) értjük. Az $\overline{AB}$ szakasz hosszát $d(A,B)$ mellett AB–vel is jelöljük.

Definíció. Legyenek adva az egymástól különböző A, B pontok. Az A kezdőpontú és a B pontot tartalmazó $[A,B\,\rangle$ félegyenesen azt az alakzatot értjük, amelyet az $\langle A,B\rangle$ egyenes azon pontjai alkotnak, amelyeket az A pont nem választ el a B ponttól.

Megjegyzés. A fenti definíció szerint az A kezdőpontú és a B–t tartalmazó félegyenesen az $[A,B\,\rangle=\{\,P\in\langle\,A,B\,\rangle \mid A \text{ nem választja el a } B,\ P \text{ pontokat}\,\}$ alakzatot értjük.

Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy amennyiben az A egy tetszőleges pontja a g egyenesnek, akkor pontosan két olyan A kezdőpontú félegyenes van, melyeket g tartalmaz. A két félegyenes uniója (vagy más szóval egyesítése) a g egyenes, metszetük pedig az A pont.

A Pasch–féle rendezési axióma

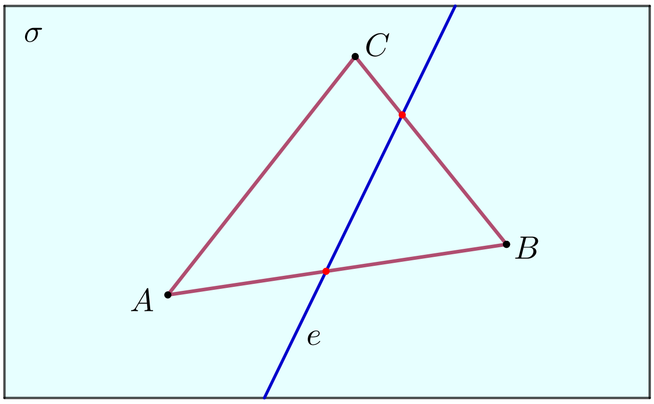
A következő axióma kimondásához szükségünk lesz a háromszögvonal fogalmára.
Definíció. Legyen adva három nem kollineáris pont A, B és C. Az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ és $\overline{CA}$ szakaszok uniójaként nyert alakzatot az A, B, C csúcspontokkal meghatározott háromszögvonalnak (vagy rövidebben csak háromszögnek) nevezzük.

Az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ szakaszokat a háromszög oldalainak mondjuk.

Amennyiben egy egyenesnek és egy szakasznak egyetlen közös pontja van, akkor azt mondjuk, hogy az egyenes metszi a szakaszt.

Az alábbi axiómát a Pasch–féle rendezési axiómának szokás nevezni.

(PRA) *Ha adott egy háromszögvonal, továbbá annak síkjában egy egyenes, amely nem megy át a háromszög egyik csúcspontján sem és metszi a háromszögvonal egyik oldalát, akkor az egyenes metszi a háromszögvonal még egy oldalát.*



1. ábra. *A Pasch–féle rendezési axióma szemléltetése.*

Két pont elválasztása egyenessel és síkkal

Definíció. Legyenek adva az A, B pontok és egy e egyenes. Azt mondjuk, hogy az e egyenes elválasztja az A, B pontokat, ha e egy belső pontjában metszi az $\overline{AB}$ szakaszt.

Definíció. Legyen adott egy e egyenes és egy arra nem illeszkedő A pont. Az e–t és az A–t tartalmazó síkot jelölje σ. Az e egyenessel határolt és az A pontot tartalmazó félsíkon az $[e, A\rangle = \{\, P \in \sigma \mid e$ nem választja el az A, P pontokat$\,\}$ alakzatot értjük.

Megjegyzés. A fenti definíció szerint az $[e, A\rangle$ félsíkot a $\sigma = \langle e, A\rangle$ sík azon pontjai alkotják, amelyeket az e egyenes nem választ el az A ponttól.

Nyilvánvaló, hogy az $[e, A\rangle$ félsík az e határegyenest és az A pontot is tartalmazza.

Megjegyzés. Tekintsünk egy σ síkot és abban egy e egyenest. A (PRA) axiómából következik, hogy pontosan két olyan félsík van, amelyeket a σ tartalmaz és amelyeknek e a határegyenese. Ezen két félsíknak az uniója a σ sík, metszetük pedig az e egyenes.

Amennyiben egy síknak és egy szakasznak egyetlen közös pontja van, akkor azt mondjuk, hogy a sík metszi a szakaszt.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a σ sík elválasztja az A, B $(A,\ B \in X)$ pontokat, ha a σ sík egy belső pontjában metszi az $\overline{AB}$ szakaszt.

Definíció. Legyen adott egy σ sík és egy arra nem illeszkedő A pont. A σ síkkal határolt és az A pontot tartalmazó féltéren a
$[\sigma, A\rangle = \{\, P \in X \mid \sigma$ nem választja el az A, P pontokat$\,\}$ alakzatot értjük.

A félsík értelmezése után már definiálni tudjuk a a szög fogalmát is.

Definíció. Legyenek O, A és B olyan pontok a térben, amelyek nem kollineárisak. Az $AOB\angle$ szögvonalon az $[O, A\rangle$ és $[O, B\rangle$ félegyenesek unióját értjük.

Az $[\langle O, A\rangle, B\rangle$ és $[\langle O, B\rangle, A\rangle$ félsíkok metszetét az $AOB\angle$ szögvonalhoz tartozó konvex szögtartománynak nevezzük, és az $AOB\sphericalangle$ szimbólummal jelöljük.

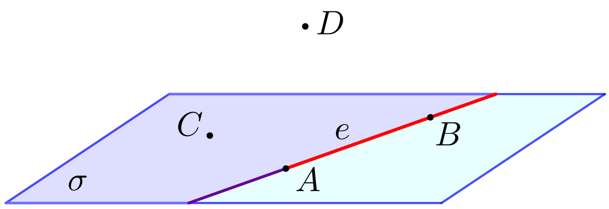
A térbeli zászló fogalma

Definíció. Egy félegyenesből, egy félsíkból és egy féltérből álló alakzathármast térbeli zászlónak mondunk, ha a félegyenes rajta van a félsík határegyenesén és a félsíkot tartalmazza a féltér határsíkja.

Megjegyzés. A fenti definíció szerint a térbeli zászló egy félegyenesből, egy félsíkból és egy féltérből álló hármas, ahol a félegyenest tartalmazó egyenes azonos a félsík határegyenesével, és a félsíkot tartalmazó sík megegyezik a féltér határsíkjával.

A félegyenest a zászló rúdjának, a félsíkot pedig a zászló lapjának szokás nevezni. A félteret a térbeli zászló oldalának mondjuk.

Megjegyzés. Legyenek adva az A, B, C, D pontok, amelyek nem komplanárisak. Vegyük az $e = \langle A, B\rangle$ egyenest, továbbá a $\sigma = \langle A, B, C\rangle$ síkot. A pontnégyesnek meg lehet feleltetni az $[A, B\rangle$ félegyenes, az $[e, C\rangle$ félsík és a $[\sigma, D\rangle$ féltér által alkotott zászlót, melyet a továbbiakban $\mathcal{Z}(A, B, C, D)$ fog jelölni.



2. ábra. *Az A, B, C, D pontnégyeshez rendelt $\mathcal{Z}(A, B, C, D)$ térbeli zászló szemléltetése.*

Az egybevágósági axióma

Az egybevágósági axióma kimondása előtt meg kell adnunk az egybevágósági transzformáció fogalmát.

Definíció. Egybevágósági transzformáción (vagy rövidebben egybevágóságon) egy olyan $\varphi : X \to X$ bijektív leképezést értünk, amelynél tetszőleges A, $B \in X$ pontokra fennáll a $d(A, B) = d(\varphi(A), \varphi(B))$ összefüggés és amely egyenest egyenesbe képez.

Megjegyzés. Az egybevágósági transzformáció tehát egy olyan bijekció, amely megőrzi a pontok távolságát (más szóval távolságtartó) és egyenest egyenesbe képez. Az egyenestartás feltételére azért van szükség, mert az eddigi axiómákból és a távolságtartásból ez még nem következik.

Megjegyzés. Könnyű belátni, hogy egy egybevágósági transzformáció félegyenest félegyenesbe, félsíkot félsíkba és félteret féltérbe visz. Ily módon az egybevágósági transzformáció zászlót zászlóba képez.

A továbbiakban feltesszük, hogy teljesül az alábbi alapigazság is, melyet egybevágósági axiómának nevezünk.

(EA) *Ha adva van két térbeli zászló, akkor egyértelműen létezik egy olyan egybevágósági transzformáció, amely az első zászlót a második zászlóba viszi.*

Megjegyzés. A fenti (EA) axióma azt mondja ki, hogy ha adva vannak a $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ térbeli zászlók, akkor pontosan egy olyan $\varphi : X \to X$ egybevágóság létezik, amelyre igaz $\varphi(\mathcal{Z}_1) = \mathcal{Z}_2$.

Definiálni lehet a pontra tükrözés fogalmát, és az (EA) axióma felhasználásával igazolni lehet, hogy a pontra tükrözés egy egybevágósági transzformáció. Definiálhatjuk két alakzat egybevágóságát is. Eszerint *két alakzatot egymással egybevágónak mondunk, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi.* Egy konvex szöget derékszögnek hívunk, ha egybevágó a mellékszögeivel.

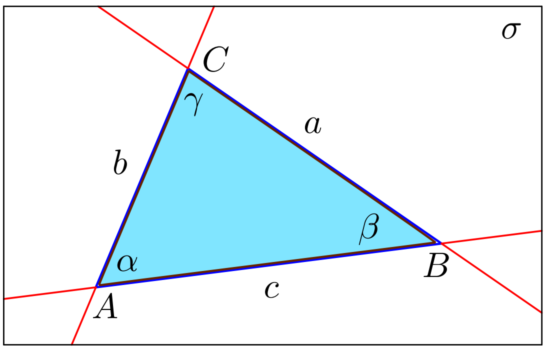
Végül értelmezni lehet a szögtartományok mértéket is. Állapodjunk meg abban, hogy ezen értelmezés során a derékszöghöz 90–et rendelünk mértékként.

A háromszög geometriai adatai

Az elmélet felépítésében fontos szerepet játszanak a háromszögek.

Definíció. Legyen adott három nem kollineáris pont A, B és C. Tekintsük az A, B, C csúcspontokkal meghatározott háromszögvonal $e = \langle B, C \rangle$, $g = \langle C, A \rangle$ és $h = \langle A, B \rangle$ oldalegyeneseit. Az $[e, A\rangle$, $[g, B\rangle$ és $[h, C\rangle$ félsíkok metszetét az A, B, C csúcsokkal meghatározott háromszöglemeznek (vagy rövidebben háromszögnek) mondjuk. Ezen háromszöglemezt $ABC\triangle$ fogja jelölni.

Az ABC háromszöglemez A, B, C csúcsokhoz tartozó szögein a $CAB\sphericalangle$, $ABC\sphericalangle$ és $BCA\sphericalangle$ szögeket értjük.



3. ábra. *Az ABC háromszög geometriai adatai:* a, b, c *és* α, β, γ.

Egy ABC háromszög $CAB\sphericalangle$, $ABC\sphericalangle$ és $BCA\sphericalangle$ szögeinek mértékét a továbbiakban az α, β és γ szimbólumokkal fogjuk jelölni. Az a, b és c latin kisbetűk pedig a háromszög oldalainak hosszát fogják majd jelölni. Ezek szerint fennáll $a = BC$, $b = CA$ és $c = AB$.

Legyen adott egy ABC háromszög. Az $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ oldalhosszakat és az $\alpha = CAB\sphericalangle$, $\beta = ABC\sphericalangle$, $\gamma = BCA\sphericalangle$ szögmértékeket a háromszög geometriai adatainak mondjuk. Belátható, hogy ezek az adatok nem függetlenek egymástól.

Az eddig kimondott axiómák alapján már belátható, hogy egy háromszög külső szöge mindig nagyobb a nem mellette fekvő belső szögeknél. Ebből adódik, hogy egy háromszögben legalább két hegyesszög van. Bizonyíthatóak a két háromszög egybevágóságára vonatkozó közismert tételek, illetve az, hogy egy háromszögben a nagyobb szöggel szemközti oldal a hosszabb. Ennek alapján igazolni lehet a háromszög–egyenlőtlenséget is. Mint ismeretes, ez azt mondja ki, hogy *tetszőleges ABC háromszögben fennáll az $AB + BC > AC$ összefüggés.* Emellett bizonyítható az is, hogy *egy háromszögben a szögek mértékeinek összege nem nagyobb* $180°$*–nál.* Ezt hívják a Saccheri–Legendre-féle szögtételnek, melynek bizonyítása megtalálható ezen jegyzet 4. fejezetében.

A párhuzamosságra vonatkozó probléma

Az eddigi axiómákból már levezethető az alábbi állítás, melynek bizonyításához többnyire a pontra tükrözést módszerét szokás alkalmazni. (Lásd a *Bevezetés a geometriába* c. jegyzetet.)

Állítás. *Legyen adott egy g egyenes és egy arra nem illeszkedő P pont. Az általuk meghatározott síkban van olyan egyenes, amely áthalad a P ponton és nem metszi g–t.*

Eddig kilenc axiómát mondtunk ki, nevezetesen az (IA1)–(IA6) illeszkedési axiómákat és a (BVA), (PRA), (EA) axiómákat. Felvetődik a kérdés, hogy ezen axiómákból kiindulva vajon be lehet–e bizonyítani az alábbi kijelentést, amely összhangban áll a szemléletünkkel.

Ha adott egy g egyenes és egy arra nem illeszkedő P pont, akkor az őket tartalmazó síkban csak egy olyan egyenes van, amely áthalad a P ponton és nem metszi g–t.

A fenti kérdésfelvetést szokás mondani a *parallellák problémájának.* A szemléletből fakadóan a XIX. század első feléig sok matematikus úgy gondolta, hogy igenlő a válasz, bár a bizonyítást nem sikerült megtalálni. *A korrekt válasz azonban nemleges.* Ez a felfedezés Bolyai János magyar és N. I. Lobacsevszkij orosz matematikusok nevéhez fűződik. Az 1820–as évek végén ők egyidejűleg jutottak arra a következtetésre, hogy amennyiben a korábbi axiómák mellé a fenti kijelentés tagadását veszik egy további axiómaként, akkor az így nyert axiómarendszerre egy másik ellentmondásmentes matematikai elméletet lehet felépíteni.

A párhuzamossági axióma

Az elmondottak alapján tehát szükségünk van az alábbi alapigazságra is, amely megfelel a szemléletünknek és amelyet *párhuzamossági axiómának* szokás nevezni.

(PA) *Ha adott egy g egyenes és egy arra nem illeszkedő P pont, akkor az általuk meghatározott síkban csak egy olyan egyenes van, amely áthalad a P ponton és nem metszi g–t.*

Az euklideszi geometria

Eljutottunk odáig, hogy megfogalmazzuk, mit is értünk euklideszi geometrián.

Azt a matematikai elméletet, amely az (IA1)–(IA6) illeszkedési axiómákra és a (BVA), (PRA), (EA), (PA) axiómákra épül euklideszi geometriának mondjuk.

Az abszolút geometria és a hiperbolikus geometria

Amennyiben csak az (IA1)–(IA6) illeszkedési axiómákat és a (BVA), (PRA), (EA) axiómákat használjuk fel a matematikai elmélet felépítéséhez, akkor az így nyert elméletet abszolút geometriának nevezzük.

Tekintsük az alábbi kijelentést, mint alapigazságot egy másik geometriai elmélethez.

(HPA) *Ha adott egy g egyenes és egy arra nem illeszkedő P pont, akkor az őket tartalmazó síkban legalább két olyan egyenes van, amely illeszkedik a P pontra és nem metszi g–t.*

A (HPA) kijelentést a hiperbolikus geometria párhuzamossági axiómájának is szokás nevezni. Világos, hogy ez ellentmond az euklideszi geometria (PA) axiómájának. Vegyük azonban észre, hogy a (HPA) kijelentés nem azonos a (PA) axióma tagadásával, hanem annál egy erősebb állítást fogalmaz meg. Ugyanis, az euklideszi párhuzamossági axióma tagadása a következőképpen szól.

Létezik olyan g egyenes és arra nem illeszkedő P pont, akkor az őket tartalmazó síkban legalább két olyan egyenes van, amely illeszkedik a P pontra és nem metszi g–t.

Azonban Bolyai és Lobacsevszkij igazolták, hogy ha ezt a kijelentés vesszük a többi maradék axióma mellé, akkor ezekből már következik a fenti (HPA) kijelentés, tehát ezt az erősebb axiómát alkalmazhatjuk az egzakt tagadás helyett.

Mint már utaltunk rá, elsőként Bolyai János és N. I. Lobacsevszkij jutottak arra a meggyőződésre, hogy amennyiben az (IA1)–(IA6) (BVA), (PRA), (EA) axiómákhoz hozzáveszik a (HPA) axiómát, akkor ez az axiómarendszer is ellentmondásmentes lesz és erre alapozva egy új matematikai elméletet lehet felépíteni. Ha pedig ez a meggondolás igaz, akkor az (IA1)–(IA6) (BVA), (PRA), (EA) axiómákból nem lehet levezetni a (PA) kijelentést.

A hiperbolikus geometria relatív ellentmondásmentességét pedig az bizonyítja, hogy az euklideszi geometriában modelleket lehet konstruálni hozzá. Ez pedig azt jelenti, hogy amennyiben az euklideszi geometria axiómarendszere ellentmondásmentes, akkor a hiperbolikus geometria axiómarendszere is az.

A hiperbolikus geometriára adott első modell a Beltrami–Cayley–Klein–féle gömbmodell, amelyről még szó lesz a későbbiekben.

Azt a matematikai elméletet, amely az (IA1)–(IA6), (BVA), (PRA), (EA) és (HPA) axiómákra épül hiperbolikus geometriának, illetve Bolyai–Lobacsevszkij–féle geometriának nevezzük.

3) Az euklideszi és a hiperbolikus síkgeometria axiómái

Legyen adva egy Y halmaz, melyet síknak nevezünk. Az Y elemeit pontoknak, részhalmazait pedig alakzatoknak mondjuk. Az alakzatok között ki vannak tüntetve bizonyos ponthalmazok, amelyeket egyenesnek nevezünk. A pontok és az egyenesek egymáshoz való illeszkedését a tartalmazás alapján értelmezzük. Véges sok pontot kollineárisnak nevezünk, ha van olyan egyenes, amely mindegyiket tartalmazza. Az illeszkedéssel kapcsolatban az alábbi két axiómát mondjuk ki.

(SIA1) *Van a síknak három olyan pontja, amelyek nem kollineárisak.*

(SIA2) *Bármely két ponthoz egy és csakis egy egyenes illeszkedik.*

Ezt követően vegyük a Birkhoff–féle vonalzó axiómát.

(BVA) *Adva van egy olyan $d : Y \times Y \to \mathbb{R}$ valós függvény, amelyre teljesül az alábbi kijelentés: Tetszőleges g egyeneshez létezik egy olyan $\xi : g \to \mathbb{R}$ bijekció, hogy bármely a g–hez illeszkedő A, B pontokra fennáll a*
$|\,\xi(A) - \xi(B)\,| = d(A, B)$ *összefüggés.*

Akárcsak a térgeometria tárgyalásánál itt is be tudjuk vezetni a szakasz, a félegyenes és a háromszögvonal fogalmát. Ily módon meg tudjuk fogalmazni a Pasch–féle rendezési axiómát a síkbeli esetre.

(SPRA) *Ha adott egy háromszögvonal és egy egyenes, amely nem megy át a háromszög egyik csúcspontján sem és metszi a háromszög egyik oldalát, akkor az egyenes metszi a háromszögvonal még egy oldalát.*

Azt mondjuk, hogy az e egyenes elválasztja az A, B pontokat, ha az e egy belső pontjában metszi az $\overline{AB}$ szakaszt.

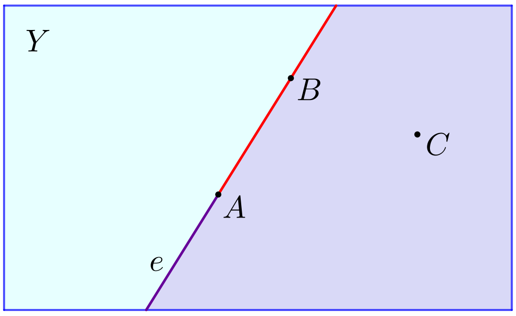
Definíció. Legyen adott egy e egyenes és egy arra nem illeszkedő A pont. Az e egyenessel határolt és az A pontot tartalmazó félsíkon az
$[\,e, A\,\rangle = \{\,P \in Y \mid e \text{ nem választja el az } A,\ P \text{ pontokat}\,\}$ alakzatot értjük.

Igazolható az (SPRA) axióma alapján, hogy tetszőleges e egyenes esetén pontosan két olyan félsík van, melyeket az e határol.

Definíció. Egy félegyenesből és egy félsíkból álló alakzatpárt síkbeli zászlónak mondunk, ha a félegyenes rajta van a félsík határegyenesén.

Megjegyzés. Legyenek A, B és C olyan pontok, amelyek nem kollineárisak. Vegyük az $e = \langle A, B\rangle$ egyenest. A ponthármasnak feleltessük meg az $[A, B\rangle$ félegyenes és az $[e, C\rangle$ félsík által alkotott síkbeli zászlót, melyet jelöljön $\mathcal{Z}(A, B, C)$.

A fentiek alapján tehát fennáll $\mathcal{Z}(A, B, C) = ([A, B\rangle,\ [e, C\rangle)$.



4. ábra. *Az A, B, Cponthármashoz rendelt $\mathcal{Z}(A, B, C)$ síkbeli zászló szemléltetése.*

Az egybevágósági transzformációt ugyanúgy értelmezzük, mint azt a térbeli esetben tettük. Eszerint egybevágóságon egy olyan $\varphi : Y \to Y$ bijektív leképezést értünk, amelynél tetszőleges A, $B \in Y$ pontokra fennáll a $d(A, B) = d(\varphi(A), \varphi(B))$ egyenlőség és amely egyenest egyenesbe képez.

Az egybevágósági axiómát az alábbiak szerint mondhatjuk ki.

(SEA) *Ha adva van két síkbeli zászló, akkor egyértelműen létezik egy olyan egybevágósági transzformáció, amely az első zászlót a második zászlóba viszi.*

A síkbeli esetben a párhuzamossági axiómát is át kell fogalmaznunk.

(SPA) *Ha adott egy g egyenes és egy arra nem illeszkedő P pont, akkor csak egy olyan egyenes van, amely áthalad a P ponton és nem metszi g–t.*

Azt a matematikai elméletet, amely az (SIA1), (SIA2) illeszkedési axiómákra és a (BVA), (SPRA), (SEA), (SPA) axiómákra épül euklideszi síkgeometriának mondjuk.

A hiperbolikus síkgeometria értelmezéséhez az alábbi axiómát kell kimondanunk.

(SHPA) *Ha adott egy g egyenes és egy arra nem illeszkedő P pont, hogy legalább két olyan egyenes van, amely áthalad a P ponton és nem metszi g–t.*

Azt a matematikai elméletet, amely az (SIA1), (SIA2) (BVA), (SPRA), (SEA) és (SHPA) axiómákra épül hiperbolikus síkgeometriának mondjuk.

Azt a matematikai elméletet, amelynek axiómarendszere az (SIA1), (SIA2), (BVA), (SPRA), (SEA) axiómákból áll abszolút síkgeometriának mondjuk.

4) Az abszolút geometria néhány alapvető tétele

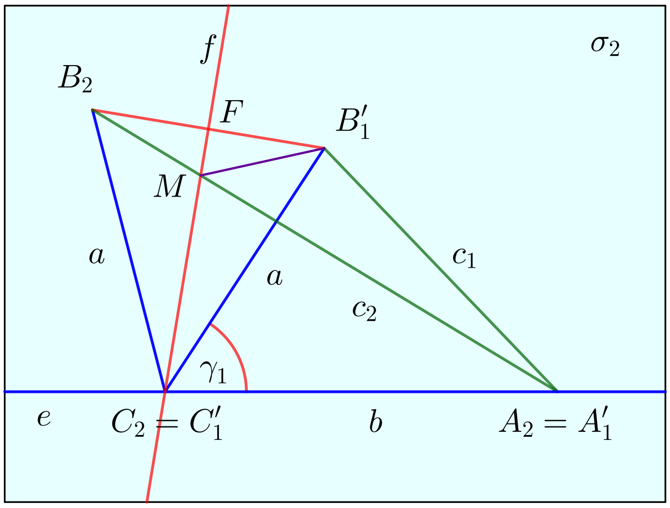
Azt a matematikai elméletet nevezik abszolút geometriának, amely a 2. fejezetben kimondott (IA1)–(IA6) és (BVA), (PRA), (EA) axiómákra épül. Az alábbiakban ezen geometria néhány lényeges tételét tárgyaljuk. *Világos, hogy ezek a tételek az euklideszi és a hiperbolikus geometriában egyaránt érvényben maradnak.*

A korábbi tárgyalások során már bevezettük az alakzatok egybevágóságának fogalmát és értelmeztük a szögek mértékét. Az axiómák alapján könnyen belátható, hogy amennyiben két háromszögben két-két oldal és az általuk közbezárt szög megegyezik, akkor a két háromszög egybevágó. Az egybevágóság abban az esetben is fennáll, ha a két háromszögben egy oldal és a rajta fekvő két szög egyenlő. Bizonyítható, hogy egy háromszögben a nagyobb szöggel szemközti oldal a nagyobb. Ezek alapján pedig igazolható, hogy az abszolút geometriában is teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

Háromszögekre vonatkozó tételek az abszolút geometriában

A síkbeli zászló fogalmát az előző 3. fejezetben értelmeztük. Vegyük észre, hogy a térben bármely síkbeli zászló kétféleképpen bővíthető ki térbeli zászlóvá. Az (EA) egybevágósági axióma szerint ha adva van két zászló, akkor egyértelműen létezik egy olyan egybevágósági transzformáció, amely az első zászlót a másodikba viszi.

Az alábbi tételt olló-tételnek is szokás nevezni. Olyan háromszögekre vonatkozik, amelyek nem egybevágóak, de két-két oldaluk páronként egyenlő. A tétel szerint a harmadik oldal abban a háromszögben hosszabb, amelyikben a szemközti szög nagyobb.



5. ábra. *Szemléltető ábra az olló-tétel bizonyításához.*

Tétel. *Legyenek $A_1B_1C_1\triangle$ és $A_2B_2C_2\triangle$ olyan háromszögek, melyek oldalaira fennáll $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$. Ha a C_1 és C_2 csúcsbeli szögekre igaz $\gamma_1 < \gamma_2$, akkor teljesül $c_1 < c_2$.*

Bizonyítás.
Tegyük fel, hogy a szögekre fennáll a $\gamma_1 < \gamma_2$ egyenlőtlenség. Legyen $\varphi : X \to X$ az egyik olyan egybevágóság, amely a $\mathcal{Z}(C_1, A_1, B_1)$ síkbeli zászlót a $\mathcal{Z}(C_2, A_2, B_2)$ zászlóba viszi.

Tekintsük az $A_1' = \varphi(A_1)$, $B_1' = \varphi(B_1)$ és $C_1' = \varphi(C_1)$ képpontokat. Világos, hogy ekkor $C_1' = C_2$ és $A_1' = A_2$ teljesül $b_1 = b_2$ következtében. A B_1' képpont benne van az $e = \langle C_2, A_2 \rangle$ egyenes által határolt $[e, B_2\rangle$ félsíkban. Mivel a $\gamma_1 = A_2C_2B_1'\sphericalangle$ szög kisebb az γ_2 szögnél, a B_1' pont benne van az $A_2C_2B_2\sphericalangle$ szög belsejében. Eszerint az $A_2C_2B_2\sphericalangle$ szög tartalmazza a $B_1'C_2B_2\sphericalangle$ konvex szöget is. (Lásd az 5. ábrát.)

Vegyük a $\overline{B_1'B_2}$ szakasz F felezőpontját és f felezőmerőleges egyenesét. A $C_2B_1' = C_2B_2$ egyenlőség következtében f áthalad a C_2 ponton. Az f egyenesből az $[e, B_2\rangle$ félsík által kimetszett félegyenes benne van a $B_1'C_2B_2\sphericalangle$ konvex szög belsejében. Ennek következtében f nem metszi a $\overline{B_1'A_2}$ szakaszt. Alkalmazzuk a Pasch–féle axiómát a $B_2A_2B_1'\triangle$ háromszögre, melynek $\overline{B_1'B_2}$ oldalát metszi az f egyenes. Ennek alapján az f egyenes elmetszi a $\overline{B_2A_2}$ szakaszt is egy M pontban.

Mivel M az $\overline{B_1'B_2}$ szakasz f felező merőlegesén van, fennáll $MB_1' = MB_2$. Világos, hogy az $MB_1'A_1'\triangle$ háromszög oldalaira teljesül az $MA_1' + MB_1' > A_1'B_1'$ egyenlőtlenség. Az M pont rajta van az $\overline{A_2B_2}$ szakaszon, emiatt igaz $MA_1' + MB_1' = A_2B_2$. Ily módon a fenti egyenlőtlenségből már következik, hogy fennáll $A_2B_2 > A_1'B_1'$, vagyis $c_2 > c_1$. $\square$

Az alábbi tétel egy következménye az előzőnek. Azt mondja ki, hogy amennyiben két háromszögben az oldalak páronként egyenlő hosszúak, akkor a két háromszög egybevágó.
Tétel. *Legyen adva két háromszög $A_1B_1C_1\triangle$ és $A_2B_2C_2\triangle$. Ha a háromszögek oldalaira fennáll $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ és $c_1 = c_2$, akkor van olyan egybevágóság, amely az A_1 pontot A_2–be, a B_1 pontot B_2–be és a C_1 pontot C_2–be képezi.*
Bizonyítás.
Tegyük fel, hogy a háromszögek oldalaira fennáll $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ és $c_1 = c_2$.

Tekintsük a $\gamma_1 = B_1C_1A_1\sphericalangle$, $\gamma_2 = B_2C_2A_2\sphericalangle$ szögeket. Vegyük észre, hogy az előző tétel következtében a γ_1, γ_2 szögek nem lehetnek különbözőek, tehát fennáll $\gamma_1 = \gamma_2$. Emiatt azon $\varphi : X \to X$ egybevágóságra, amely a $\mathcal{Z}(C_1, A_1, B_1)$ síkbeli zászlót a $\mathcal{Z}(C_2, A_2, B_2)$ zászlóba viszi, teljesül $\varphi(C_1) = C_2$, $\varphi(A_1) = A_2$ és $\varphi(B_1) = B_2$. $\square$

Megjegyzés. Az abszolút geometriában azt könnyen igazolni lehet, hogy *egy háromszög külső szöge mindig nagyobb a háromszög nem mellette fekvő belső szögeinél.* Ezt úgy lehet belátni, hogy centrális tükrözéseket végzünk a háromszög oldalfelező pontjaira, melyeknél a megfelelő belső szög képét tartalmazza egy külső szög.

Ezen megállapításból már következik, hogy bármely háromszögben van legalább két hegyesszög.

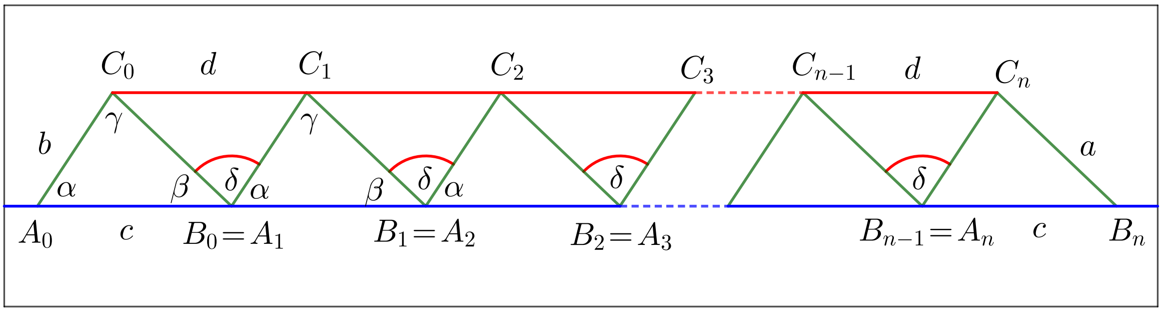
Megjegyzés. A háromszög-egyenlőtlenség alapján könnyen igazolható az alábbi kijelentés. Ha adva van egy olyan töröttvonal, amelynek oldalai nincsenek egy egyenesen, akkor a töröttvonal hossza kisebb a töröttvonal két végpontjának távolságánál.

Az alábbi nevezetes eredményt a szakirodalomban a Saccheri–Legendre-féle szögtételként szokás említeni.
Tétel. *Bármely $ABC\triangle$ háromszög szögeire teljesül az $\alpha + \beta + \gamma \leq 180°$ összefüggés.*
Bizonyítás.

Az indirekt bizonyítás módszerét alkalmazzuk.
Tegyük fel, hogy van egy olyan $ABC\triangle$ háromszög, amely szögeinek összegére fennáll az $\alpha+\beta+\gamma>180°$ egyenlőtlenség.

Legyen γ a háromszög legnagyobb szöge. Ez esetben a fenti megjegyzés miatt fennáll $\alpha<90°$, $\beta<90°$.

A mellékelt ábrának megfelelően az $ABC\triangle$ síkjában a $g=\langle A,B\rangle$ oldalegyenesre állítsunk még n számú olyan háromszöget, amelyek egybevágóak az $ABC=A_0B_0C_0$ háromszöggel. Ezeket az $A_jB_jC_j\triangle$ $(j=1,\dots n)$ háromszögeket a következő rekurzív eljárással kaphatjuk meg. Először felmérjük a g egyenesre az $A_{i+1}=B_i$ pontból a $c=AB$ hosszt és kijelöljük a B_{i+1} pontot. Az A_{i+1} pontban az $[A_{i+1},B_{i+1}\rangle$ félegyeneshez felmérjük az α szöget és a szög másik szárára ráméréjük a $b=AC$ hosszt. Végül az így nyert C_{i+1} pontot összekötjük a B_{i+1} ponttal. Ezzel megkonstruáltuk a következő $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}\triangle$ háromszöget. (Lásd a 6. ábrát.)



6. ábra. *A Saccheri–Legendre–féle szögtételtétel igazolása.*

Kössük össze szakaszokkal a C_0, $C_1,\dots,C_n$ pontokat. Vegyük a $\delta=C_0A_1C_1$ szöget. Mivel fennáll az $\alpha+\beta+\delta=180°$ összefüggés, az $\alpha+\beta+\gamma>180°$ kezdeti feltevés alapján $\delta<\gamma$ teljesül.

Világos, hogy a $C_0A_1C_1\triangle$, $C_1A_2C_2\triangle,\dots,C_{n-1}A_nC_n\triangle$ háromszögek páronként egybevágóak, mivel midegyikben szerepelnek az a, b oldalhosszak és a δ szög. Vezessük be a $d=C_0C_1$ jelölést ezen háromszögeknek a δ szöggel szemközti harmadik oldalára.

Mivel az $A_0B_0C_0\triangle$, $C_1A_1C_0\triangle$ háromszögekben az a, b oldalhosszak egyenlőek és $\gamma>\delta$, az előző tétel szerint fennáll a $d<c$ egyenlőtlenség.

Tekintsük most az $A_0C_0C_1C_2\dots C_{n-1}C_nB_n$ töröttvonalat. Világos, hogy ezen töröttvonal oldalainak összege $b+nd+a$, a töröttvonal A_0, B_n végpontjainak távolsága pedig $(n+1)c$. Ennek alapján pedig fennáll az

$$a+b+n\,d>(n+1)c$$

egyenlőtlenség. Ebből viszont az következik, hogy bármely n pozitív egész szám esetén fennáll az

$$a+b-c>n(c-d)$$

egyenlőtlenség. Csakhogy $c > d$ miatt $c - d$ egy pozitív valós szám, amelyhez választható egy olyan nagy n egész szám, hogy $n(c-d) > a+b-c$ teljesüljön.

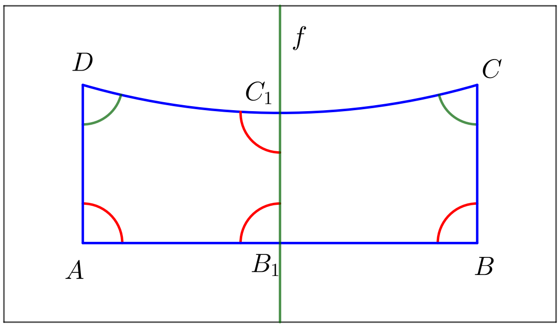
Ezzel ellentmondáshoz jutottunk. Tehát az a feltevés, hogy létezik olyan $ABC\triangle$ háromszög, amelynek szögeire teljesül $\alpha+\beta+\gamma > 180°$, nem lehet igaz. $\square$

Világos, hogy az előbbi tétel miatt igaz az alábbi kijelentés.

Következmény. *Tetszőleges $ABCD$ négyszögben a szögek összegére fennáll az $\alpha+\beta+\gamma+\delta \le 360°$ egyenlőtlenség.*

Definíció. Egy négyszöget Saccheri–féle négyszögnek mondunk, ha van egy olyan oldala, amelyen fekvő mindkét szög derékszög és a vele szomszédos két oldal egyenlő.

Megjegyzés. Ha az $ABCD$ négyszögre fennállnak $\alpha = 90°$, $\beta = 90°$ és $AD = BC$ az összefüggések, akkor az egy Saccheri–féle négyszög. Világos, hogy ez esetben az AB oldal f felező merőlegese a négyszögnek szimmetriatengelye. (Lásd a 7. ábrát.)



7. ábra. *Egy $ABCD$ Saccheri–féle négyszög és az AB_1C_1D Lambert–féle négyszög.*

Definíció. Lambert–féle négyszögön egy olyan négyszöget értünk, amelynek három szöge derékszög.

A XIX. század elejéig egyes matematikusok azt vizsgálták, vajon a párhuzamossági axióma alkalmazása nélkül be lehet–e bizonyítani, hogy a Lambert–féle négyszögben a negyedik szög is derékszög. Ezt nem sikerült levezetni az abszolút geometria axiómáiból, viszont igazolható a következő tétel. A bizonyításra ezúttal nem térünk ki.

Tétel. *Ha van a térben egy olyan Lambert–féle négyszög, amelynek mind a négy szöge derékszög, akkor ez igaz az összes Lambert–féle négyszögre.*

Következmény. *A tér Lambert–féle négyszögeiben a szögek összege vagy mindig* $360°$*, vagy mindig kisebb mint* $360°$*.*

Az alábbi fontos tételt elsőként a derékszögű háromszögekre lehet igazolni a Lambert–féle négyszögek alkalmazásával.

Tétel. *A tér háromszögeiben a szögek összege vagy mindig* $180°$*, vagy mindig kisebb mint* $180°$*.*

A háromszögek szögösszegére vonatkozó előbbi eredmény alapján bizonyítható az abszolút geometria alábbi alapvető tétele.

Tétel. *Tekintsünk a térben egy tetszőleges g egyenest és egy arra nem illeszkedő P pontot. Az általuk meghatározott síkban vagy mindig csak egy olyan egyenes van, amely áthalad a P ponton és nem metszi g–t, vagy pedig minden esetben több ilyen egyenes létezik.*

Néhány egyszerűbb bizonyítási feladat az abszolút geometriában

A következőkben kitűzünk néhány érdekesebbnek tűnő feladatot, melyeket az abszolút geometriában is érvényes tételek alapján lehet megoldani. Például, kihasználhatjuk azt, hogy egy háromszög két oldala pontosan akkor egyenlő, ha az oldalakkal szemközti szögek egyenlőek. A szakaszhosszak közötti egyenlőtlenség bizonyításához pedig alkalmazhatjuk az olló–tételt.

1) A tér egy σ síkjában vegyünk két pontot, melyek legyenek A és B. Jelölje O az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontját. Tekintsük azt az O centrumú k kört, amely áthalad az A, B pontokon, továbbá egy σ–beli C pontot, amely nincs rajta az $\langle A, B\rangle$ egyenesen.
Igazoljuk, hogy a C pont rajta van a k körön akkor és csak akkor, ha az ABC háromszög szögeire fennáll az $\alpha + \beta = \gamma$ *egyenlőség.*

2) Vegyünk a térben egy ABC háromszöget. Az $\overline{AC}$ oldal felezőpontját jelölje B_1, a $\overline{BC}$ oldal felezőpontját jelölje A_1. Az $\overline{A_1B_1}$ szakaszt az ABC háromszög $\overline{AB}$ oldallal szemközti középvonalának nevezzük.
Bizonyítsuk be, hogy a szakaszok hosszaira fennáll az $A_1B_1 \leq \frac{1}{2}AB$ *összefüggés.*

3) Egy ABC háromszöget szabályosnak mondunk, ha bármely két oldala egyenlő. Világos, hogy a szabályos háromszög szögei páronként egyenlőek. Ha pedig egy háromszögben a szögek egyenlőek egymással, akkor az oldalak is egyenlőek, vagyis a háromszög szabályos.
Igazoljuk, hogy egy szabályos háromszög köré mindig lehet kört írni.

Megjegyzés. Nyilván akkor mondjuk, hogy egy háromszög köré kör írható, ha van olyan körvonal, amely áthalad a háromszög összes csúcsán. A modellek alkalmazásával igazolható, hogy a hiperbolikus geometriában vannak olyan háromszögek, amelyek köré nem lehet kört írni. (Lásd a jegyzet 33. oldalát.)

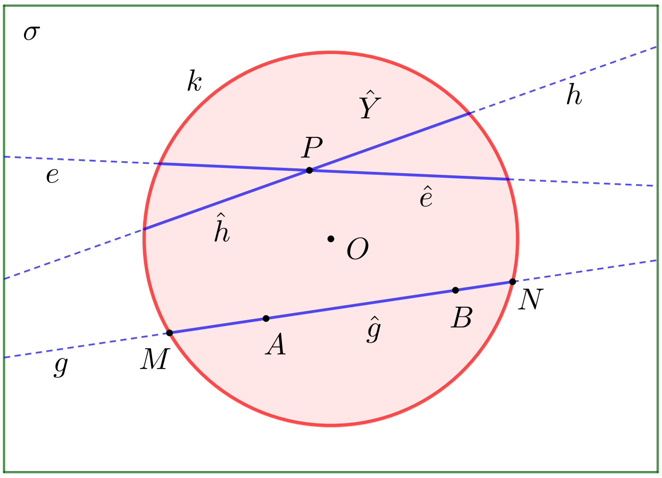
5) A hiperbolikus síkgeometria Beltrami–Cayley–Klein-féle körmodellje

Az alábbiak során az euklideszi geometriában megadunk egy olyan modellt, amelyre teljesül a hiperbolikus síkgeometria összes axiómája. Ezt a modellt 1870 körül egymástól függetlenül fedezte fel E. Beltrami olasz és F. Klein német matematikus. A modellben alkalmazott távolságfüggvény ötlete A. Cayley angol matematikus érdeme. A szakirodalomban szokás még használni a hiperbolikus síkgeometria projektív modellje elnevezést is, mivel az axiómák teljesülésének igazolásához projektív geometriai eszközök szükségesek.

Tekintsünk az euklideszi térben egy σ síkot és abban egy O centrumú, r sugarú $k(O,r)$ körvonalat, melyet a továbbiakban jelöljön k. A modellbeli sík pontjainak $\hat{Y}$ halmaza legyen a k körvonal által határolt nyílt körlemez, azaz legyen $\hat{Y} = \{\, P \in \sigma \mid OP < r \,\}$.

Elsőként azt kell megadnunk, hogy ebben a modellben mely alakzatok lesznek az egyenesek. Vegyük a σ euklideszi síkban azokat az egyeneseket, amelyek metszik a $k(O,r)$ körvonalat. Ezeknek az $\hat{Y}$ nyílt körlemezzel vett metszetei legyenek a modell egyenesei. Eszerint a modellbeli egyenesek az euklideszi sík azon nyílt szakaszai, amelyek a k kör húrjai. Ha a σ sík egyeneseinek halmazát $\mathcal{E}_\sigma$ jelöli, akkor a modellbeli egyenesek $\hat{\mathcal{E}}$ halmazára fennáll $\hat{\mathcal{E}} = \{\, g \cap \sigma \mid g \in \mathcal{E}_\sigma,\ g \cap \hat{Y} \neq \emptyset \,\}$.

Világos, hogy ebben a modellben teljesülnek az (SIA1) és (SIA2) illeszkedési axiómák.



8. ábra. *A körmodell $\hat{g}$, $\hat{h}$, $\hat{e}$ egyenesei. A modellbeli távolság:* $\hat{d}(A,B) = |\ln(M\,N\,A\,B)|$.

Ezt követően meg kell adnunk a modellbeli $\hat{d} : \hat{Y} \times \hat{Y} \to \mathbb{R}$ távolságfüggvényt.

Legyenek A és B az $\hat{Y}$ modellsík különböző pontjai. Tekintsük a rajtuk áthaladó $g = \langle A, B \rangle$ egyenest a σ euklideszi síkban. A g metssze el a k körvonalat az M, N pontokban. A $\hat{d}$ távolságfüggvénynek az (A,B) pontpáron nyert értéke legyen

$$\hat{d}(A,B) = |\, \ln (M\,N\,A\,B) \,| ,$$

ahol $(M\,N\,A\,B)$ a σ–beli kollineáris pontnégyes euklideszi értelemben vett kettősviszonya, $\ln$ pedig a természetes logaritmusfüggvényt jelöli.

Emellett tetszőleges $A \in \hat{Y}$ pont esetében a $\hat{d}$ távolságfüggvénynek az (A, A) elempáron nyert értéke legyen $\hat{d}(A, A) = 0$.

Megjegyzés. A $\hat{d}$ függvénnyel kapcsolatban az alábbi észrevételeket tehetjük.

Legyenek A és B az $\hat{Y}$ modellsík különböző pontjai. Mivel A és B egyaránt az M, N pontokkal határolt szakaszon vannak, ezért az $(M\,N\,A) = \dfrac{MA}{AN}$ és $(M\,N\,B) = \dfrac{MB}{BN}$ osztóviszonyok értéke pozitív. Ily módon az $(M\,N\,A\,B)$ kettősviszony is egy pozitív valós szám, amelynek vehetjük a logaritmusát.

Ismeretes, hogy fennáll az $(M\,N\,A\,B) = \frac{1}{(N\,M\,A\,B)}$ összefüggés, továbbá tetszőleges $a > 0$ szám esetén igaz $|\ln(\frac{1}{a})| = |-\ln a| = |\ln a|$. Eszerint a $\hat{d}(A, B)$ függvényérték nem függ attól, hogy az $\langle A, B \rangle \cap k(O, r)$ halmaz két eleme közül melyiket jelöljük M–nek és melyiket N–nek.

Könnyen belátható az is, hogy teljesül $\hat{d}(A, B) = \hat{d}(B, A)$.

A (BVA) axióma teljesülésének igazolása

Tekintsünk a σ síkon egy g egyenest, amely az M, N pontokban metszi a $\hat{Y}$ nyílt körlemezt határoló $k(O, r)$ körvonalat, továbbá a $\hat{g} = g \cap \hat{Y}$ modellbeli egyenest.

A g által meghatározott $\hat{g}$ modellbeli egyenesen vegyük azt a $\xi : \hat{g} \to \mathbb{R}$ leképezést, ahol tetszőleges $P \in \hat{g}$ pontra fennáll $\xi(P) = \ln(M\,N\,P)$. Be fogjuk látni, hogy a ξ leképezés egy olyan bijekció, amely eleget tesz a Birkhoff-féle vonalzó axiómában szereplő feltételnek.

A g egyenesen vegyük az $\overrightarrow{MN}$ vektorral meghatározott irányítást. A $\hat{g}$ bármely P pontjához egyértelműen létezik egy olyan $t \in (0, 1)$ valós szám, amellyel teljesül

$$\overrightarrow{MP} = t\,\overrightarrow{MN} = t\,(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN})\,.$$

Ebből viszont már következik, hogy igazak a

$$(1 - t)\,\overrightarrow{MP} = t\,\overrightarrow{PN}, \qquad (M\,N\,P) = \frac{MP}{PN} = \frac{t}{1 - t}$$

egyenlőségek. Tekintsük most az $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ valós függvényt, melyet az $f(t) = \dfrac{t}{1 - t} = \dfrac{1}{1 - t} - 1$ összefüggés ír le tetszőleges $t \in (0, 1)$ esetén. Világos, hogy az f folytonos függvény szigorúan mononoton növekvő és értékkészlete a $(0, \infty)$ intervallum, amely éppen az ln függvény értelmezési tartománya. Az ln függvény tulajdonságai alapján az $\ln \circ f$ összetett függvény egy folytonos és szigorúan monoton leképezését adja a $(0, 1)$ intervallumnak a $\mathbb{R}$ valós számegyenesre. Mivel a $\hat{g}$ modellbeli egyenest befutó P pontnak a $t \in (0, 1)$ paraméter felel meg, azt kapjuk, hogy a $\xi : \hat{g} \to \mathbb{R}$ leképezés valóban bijektív.

Legyenek A és B a $\hat{g}$ egyenes pontjai. A fenti ξ bijekcióra azt nyerjük, hogy fennáll

$$\xi(A) - \xi(B) = \ln(M\,N\,A) - \ln(M\,N\,B) = \ln\frac{(M\,N\,A)}{(M\,N\,B)} = \ln(M\,N\,A\,B)\,.$$

Ebből viszont már következik, hogy a modellbeli $\hat{d}$ távolságfüggvénnyel fennáll a

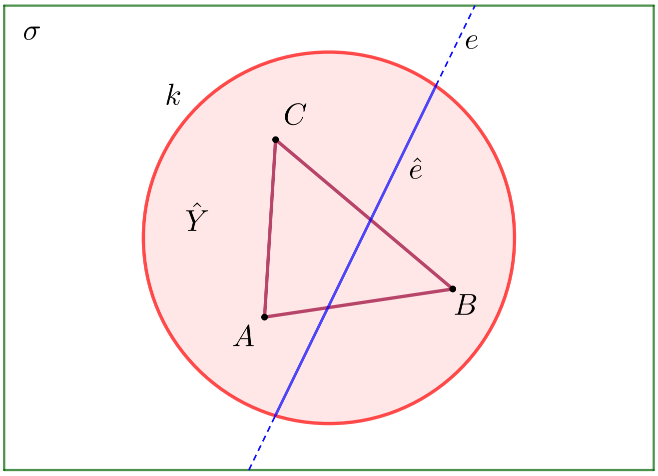
$$|\xi(A) - \xi(B)| = \hat{d}(A, B)$$

összefüggés, vagyis a Birkhoff–féle vonalzó axióma teljesül a modellben.

A Pasch féle (SPRA) axióma teljesülése a modellben

Tekintsünk egy modellbeli $\hat{g}$ egyenest és azon az A, B pontokat. A g egyenesnek a k határkörrel vett metszéspontjai legyenek M és N. A fenti tárgyalásnak megfelelően vegyük a $\hat{g}$ egyenesnek azt a $\xi : \hat{g} \to \mathbb{R}$ koordinátázását, amelyet a $\xi(P) = \ln(M\,N\,P)$ összefüggés ír le.

Könnyen belátható, hogy a $\hat{g}$ egyenes egy P pontja euklideszi értelemben akkor van az A, B pontok között, ha a $\xi(P)$ koordináta a $\xi(A)$, $\xi(B)$ valós számok között van. Ebből pedig az következik, hogy a modellben a P pont akkor van az A, B pontok között, ha a P pont rajta van a σ euklideszi sík $\overline{AB}$ szakaszán. Eszerint a modellbeli és a σ síkbeli $\overline{AB}$ szakasz azonos. Azt kaptuk, hogy a modellbeli szakaszok a σ euklideszi síknak a



9. ábra. *A Pasch–féle rendezési axióma teljesülése a modellben.*

szakaszaival esnek egybe. Ebből adódik, hogy a modellbeli háromszögvonalak a σ síkon is háromszögek. Ezen megállapításból pedig már következik, hogy a Pasch–féle (SPRA) axióma a modellben is teljesül. (Lásd a 9. ábrát.)

A modellbeli egybevágósági transzformációk

Az axiomatikus felépítésnél megadott definíció alapján a modellbeli egybevágósági transzformáción egy olyan $\varphi : \hat{Y} \to \hat{Y}$ bijektív leképezést értünk, amely egyenestartó és bármely $A, B \in \hat{Y}$ pontokra fennáll $\hat{d}(\varphi(A), \varphi(B)) = \hat{d}(A, B)$.

Tekintsük a σ euklideszi sík kiterjesztésével nyert $\bar{\sigma}$ projektív síkot. Az egyszerűsítés érdekében a $k(O, r)$ körvonalra, mint közönséges másodrendű görbére, alkalmazzuk az $\mathcal{M}$ jelölést.

A $\bar{\sigma}$ projektív síknak vegyük egy olyan $\kappa : \bar{\sigma} \to \bar{\sigma}$ kollineációját, amely az $\mathcal{M}$ körvonalat önmagába képezi, vagyis fennáll $\kappa(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. Ebből viszont következik, hogy $\kappa(\hat{Y}) = \hat{Y}$ is teljesül. Ily módon vehetjük a κ projektív transzformációnak az $\hat{Y}$ nyílt körlemezre való leszűkítését. Mivel a kollineáció megőrzi a pontnégyesek kettősviszonyát, az M, N, A, B pontok $M' = \kappa(M)$, $N' = \kappa(N)$, $A' = \kappa(A)$, $B' = \kappa(B)$ képeire teljesül $(M'\,N'\,A'\,B') = (M\,N\,A\,B)$.

Mivel a modellbeli $\hat{d}$ távolságot ezen kettősviszonyok logaritmusával definiáltuk, tetszőleges $A,\ B \in \hat{Y}$ pontok esetén fennáll $\hat{d}(\kappa(A), \kappa(B)) = \hat{d}(A, B)$.

Ezek alapján azt kapjuk, hogy κ–nak az $\hat{Y}$ nyílt körlemezre való leszűkítése egy egybevágósági transzformációt ad a modellben. Eddigi megállapításaink alapján igaz az alábbi kijelentés.

Állítás. *Legyen a $\kappa : \bar{\sigma} \to \bar{\sigma}$ leképezés a $\bar{\sigma}$ projektív síknak egy kollineációja. Ha κ önmagába képezi az $\mathcal{M}$ körvonalat, akkor a κ–nak az $\hat{Y}$ körlemezre vett leszűkítése egy egybevágósági tramszformációt ad a modellben.*

Emlékezzünk rá, hogy az egybevágóság definíciójában szerepel az a feltétel is, hogy a leképezés egyenestartó. Ennek következtében ha adva van egy modellbeli $\varphi : \hat{Y} \to \hat{Y}$ egybevágósági transzformáció, akkor azt egyértelműen ki lehet terjeszteni a $\bar{\sigma}$ síknak egy kollineációjává, amely önmagába képezi az $\mathcal{M}$ kört. Konkrétabban szólva, egyértelműen létezik egy olyan $\kappa : \bar{\sigma} \to \bar{\sigma}$ kollineáció, amelynek az $\hat{Y}$ nyílt körlemezre való leszűkítése megegyezik φ–vel.

A fentiek alapján egy természetes bijektív megfeleltetés adódik a $\bar{\sigma}$ projektív síknak az $\mathcal{M}$–et önmagába képező kollineációi és a modellbeli egybevágóságok között.

Megjegyzés. Tekinthetjük a σ euklideszi sík azon affin transzformációit is, amelyek az $\mathcal{M}$ kört önmagába képezik. Az affinitások már az osztóviszonyt is megőrzik, tehát ezeknek a modellkörre vett leszűkítései egybevágósági transzformációk a modellben.

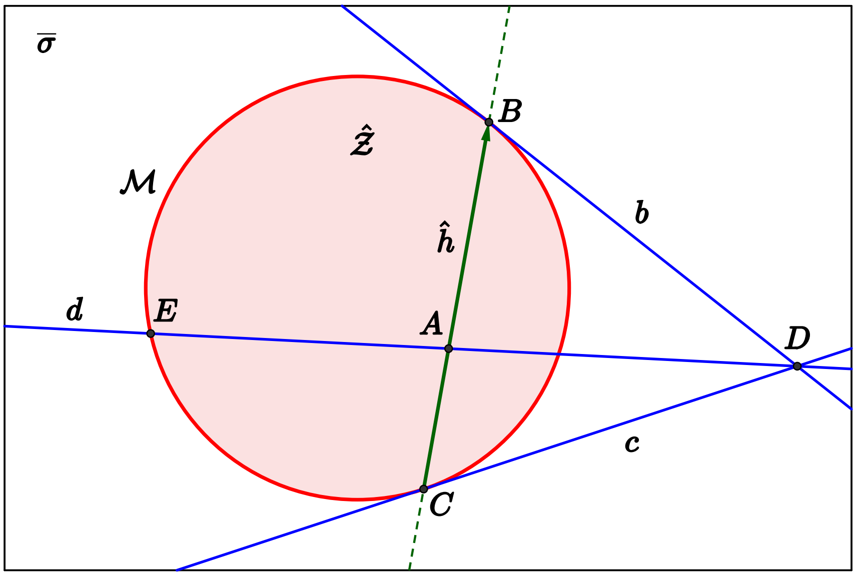
Igazolható, hogy bármely σ–beli affinitás, amely az $\mathcal{M}$ kört önmagába képezi, egy olyan egybevágóság az euklideszi síkon, amely fixen hagyja a határkör O centrumát. Ezek pedig csakis az O körüli elforgatások és az O–n átmenő egyenesekre való tengelyes tükrözéssek lehetnek.

A modellbeli zászlók

Az eddigi eredmények alpján már könnyű belátni, hogy a modellbeli félegyenesek a σ síkon olyan félig nyílt szakaszok, melyeknek első határpontja a körlemezben van és a második határpontjuk az $\mathcal{M}$ körre esik. A modellbeli félsíkok pedig euklideszi értelemben körszeletek. Mint ismeretes, síkbeli zászlón egy félegyenesből és egy félsíkból álló olyan alakzatpárt értünk, ahol a félsík határegyenese tartalmazza a félegyenest.

Annak érdekében, hogy igazoljuk az (SEA) egybevágósági axióma teljesülését a modellben minden zászlóhoz hozzárendeljük a $\bar{\sigma}$ síknak egy pontnégyesét az alábbiak szerint.

Tekintsük a modellben egy $\hat{\mathcal{Z}}$ zászlót, ahol a félegyenes kezdőpontját jelölje A. A modellbeli félegyenes meghatároz egy félegyenest a σ síkon. Ennek az $\mathcal{M}$ körvonallal vett metszéspontját jelölje B. A zászló félsíkját határoló $\hat{h}$ egyenesnek megfelel egy h egyenes σ–ban, ennek az $\mathcal{M}$ körvonallal vett másik metszéspontja legyen C. Az $\mathcal{M}$ körnek a B, C pontokban vett érintői legyenek b és c. Ezen érintőknek a $\bar{\sigma}$ síkbeli metszéspontját jelölje D. A zászló félsíkjának megfelel az $\mathcal{M}$–re eső és a B, C pontokkal határolt két



10. ábra. *A modellbeli $\hat{\mathcal{Z}}$ zászlóhoz rendelt B, C, D, E pontnégyes.*

körív egyike. Ezen körívnek az $\langle A, D\rangle = d$ egyenessel vett metszéspontja legyen E. A modellbeli $\hat{\mathcal{Z}}$ zászlóhoz rendeljük hozzá a B, C, D, E pontnégyest. (Lásd a 10. ábrát.)

Az (SEA) egybevágósági axióma teljesülésének igazolása

Vegyünk a modellben két tetszőleges zászlót, legyenek ezek $\hat{\mathcal{Z}}_1$ és $\hat{\mathcal{Z}}_2$. A fentiek alapján a $\hat{\mathcal{Z}}_i$ zászlóhoz rendelt pontnégyes legyen B_i, C_i, D_i, E_i $(i = 1, 2)$. Vegyük észre, hogy ezen pontnégyesek általános helyzetűek. Az $\mathcal{M}$ körvonalnak a B_i, C_i pontokban vett érintői legyenek b_i és c_i.

Ismeretes, hogy a $\bar{\sigma}$ projektív síkon egyértelműen létezik egy olyan $\kappa : \bar{\sigma} \to \bar{\sigma}$ kollineáció, amelyre fennáll $\kappa(B_1) = B_2$, $\kappa(C_1) = C_2$, $\kappa(D_1) = D_2$ és $\kappa(E_1) = E_2$.

Evidens, hogy teljesül $\kappa(b_1) = \kappa(\langle B_1, D_1\rangle) = \langle\kappa(B_1), \kappa(D_1)\rangle = \langle B_2, D_2\rangle = b_2$ és $\kappa(c_1) = c_2$. A κ kollineáció az $\mathcal{M}$ körvonalat azon $\kappa(\mathcal{M})$ közönséges kúpszeletbe viszi, amely áthalad a B_2, C_2, E_2 pontokon és amelyet a b_2, c_2 egyenesek érintenek a B_2, C_2 pontokban. A Pascal–tétel felhasználásával igazolható, hogy a közönséges kúpszeletet három pontja és közülük kettőben az érintőegyenes már egyértelműen meghatározzák. Ennek következtében teljesül $\kappa(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ és $\kappa(\hat{Y}) = \hat{Y}$.

Nyilvánvaló, hogy a $h_1 = \langle B_1, C_1\rangle$ határegyenest κ a $h_2 = \langle B_2, C_2\rangle$ egyenesbe képezi. Ebből már adódik, hogy a h_1 és $\langle D_1, E_1\rangle$ egyenesek A_1 metszéspontjának κ szerinti képe a $h_2 \cap \langle D_2, E_2\rangle = A_2$ pont. Ezen megállapításokból pedig következik, hogy igaz $\kappa(\hat{\mathcal{Z}}_1) = \hat{\mathcal{Z}}_2$.

A fentiek során beláttuk, hogy a κ kollineációnak az $\hat{Y}$ nyílt körlemezra való leszűkítése a modellben egy olyan egybevágósági transzformációt ad, amely a modellbeli $\hat{\mathcal{Z}}_1$ zászlót a $\hat{\mathcal{Z}}_2$ zászlóba viszi. Tegyük fel, hogy a $\varphi : \hat{Y} \to \hat{Y}$ bijektív leképezés egy olyan egybevágóság az $(\hat{Y}, \hat{\mathcal{E}}, \hat{d})$ modellben, amelyre igaz $\varphi(\hat{\mathcal{Z}}_1) = \hat{\mathcal{Z}}_2$. A φ leképezés az egyenestartási feltétel miatt az $\mathcal{M}$–hez tartozó σ–beli nyílt körhúrokat nyílt körhúrokba képezi. Emiatt a φ bijekciót egyértelműen ki lehet terjeszteni a $\bar{\sigma}$ projektív sík egy kollineációjává. A kiterjesztéssel nyert kollineációról pedig be lehet látni, hogy az $\mathcal{M}$–t önmagára képezi, a B_1, C_1, D_1, E_1 pontnégyest pedig a B_2, C_2, D_2, E_2 pontnégyesbe viszi. Ebből viszont következik, hogy a kiterjesztéssel nyert kollineáció azonos κ–val, és κ–nak az $\hat{Y}$ nyílt körlemezre vett leszűkítése megegyezik φ–vel.

Ezzel igazoltuk, hogy a modellben teljesül az (SEA) egybevágósági axióma.

Azt már könnyű belátni, hogy az $(\hat{Y}, \hat{\mathcal{E}}, \hat{d})$ hármasra az (SIA1), (SIA2), (BVA), (SPRA), (SEA) axiómák mellett az (SHPA) axióma is teljesül. Lásd ehhez a 8. ábrát. Emiatt a következő megállapítást tehetjük.

Összegzés. Az euklideszi geometriában értelmezett $(\hat{Y}, \hat{\mathcal{E}}, \hat{d})$ hármas egy modelljét képezi a hiperbolikus síkgeometriának. Ezt a Bolyai–Lobacsevszkij–féle síkgeometriára vonatkozó Beltrami–Cayley–Klein–féle körmodellnek nevezzük.

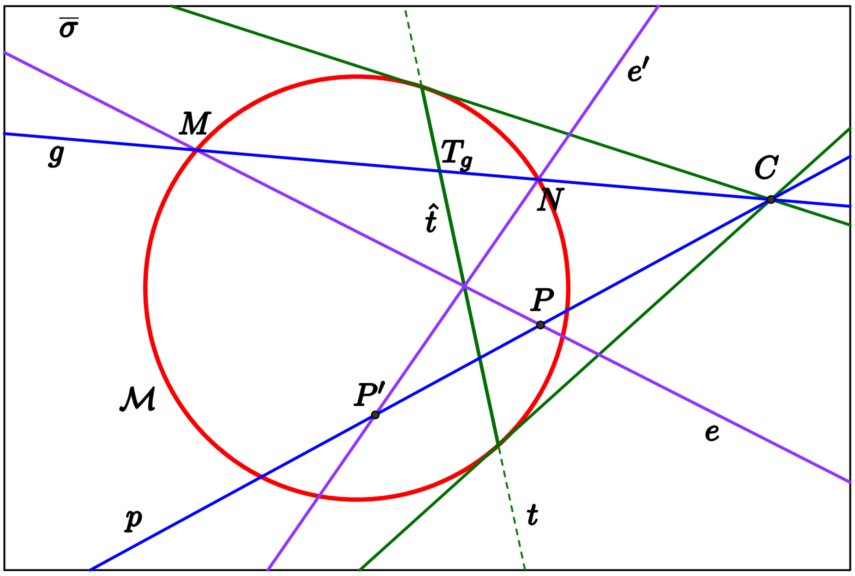
A modellbeli tengelyes tükrözések, mint centrális–tengelyes kollineációk

A vizsgált körmodellben igazolni tudjuk a következő állítást.

Állítás. *Legyen adott egy modellbeli $\hat{t}$ egyenes, melynek megfelelőjét a $\bar{\sigma}$ síkban jelölje t. Ezen t egyenesnek az $\mathcal{M}$ körre vonatkozó pólusa legyen C. Tekintsük azt a κ centrális–tengelyes kollineációt a $\bar{\sigma}$ projektív síkon, amelynek t a tengelye, C a centruma és karakterisztikus kettősviszonya $c(\kappa) = -1$. Ekkor κ–nak az $\hat{Y}$ modellsíkra vett leszűkítése megegyezik a $\hat{t}$ egyenesre történő tengelyes tükrözéssel.*

Bizonyítás.

Vegyünk $\bar{\sigma}$–ban egy g egyenest, amely áthalad C–n és az $\mathcal{M}$ kört az M, N pontokban metszi. A t, g egyenesek metszéspontját jelölje T_g. (Lásd a 11. ábrát.)



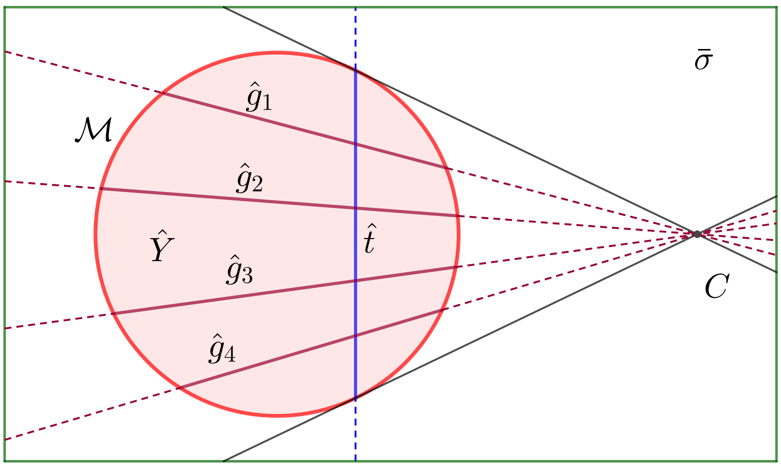
11. ábra. *A P pont $\hat{t}$ egyenesre vonatkozó P' tükörképének szerkesztése a modellben.*

A projektív geometriai tanulmányokból ismeretes, hogy mivel a C és T_g pontok konjugáltak egymáshoz az $\mathcal{M}$ kúpszeletre nézve, az M, N, C, T_g pontok egy harmonikus pontnégyest alkotnak. Ez persze azt jelenti, hogy fennáll a $(C\,T_g\,M\,N) = -1$ összefüggés.

Mivel κ–nál a karakterisztikus kettősviszony értéke -1, a $\kappa(M)$ képpontra igaz $(C\,T_g\,M\,\kappa(M)) = -1$. Ebből már következik, hogy teljesül $\kappa(M) = N$, továbbá $\kappa(N) = M$, vagyis a κ egymásba képezi az M, N pontokat.

A C–n átmenő g szelőt tetszőlegesen választottuk, ezért fennáll $\kappa(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. Ily módon a κ centrális–tengelyes kollineációnak az $\hat{Y}$ modellsíkra való leszűkítése egy olyan egybevágóságot ad, amely fixen hagyja a $\hat{t}$ egyenes pontjait és felcseréli a $\hat{t}$ által határolt félsíkokat. Evidens, hogy ez az egybevágóság megegyezik a $\hat{t}$ egyenesre történő tengelyes tükrözéssel. □

Megjegyzés. Amennyiben a modellkör egy átmérőjét vesszük tengelynek, akkor az arra történő tengelyes tükrözés azonos a σ síkbeli tengelyes tükrözésnek a körlemezre való leszűkítésével.



12. ábra. *A $\hat{t}$ egyenest derékszögben metsző modellbeli $\hat{g}_i$ egyenesek.*

Az előző állítás alapján igaz az alábbi kijelentés.

Következmény. *Legyen adott egy modellbeli $\hat{t}$ egyenes, melynek megfelelőjét a $\bar{\sigma}$ síkban jelölje t. A t egyenesnek az $\mathcal{M}$ körre vonatkozó pólusa legyen C. Egy $\hat{g}$ egyenes a modellben merőleges $\hat{t}$–re akkor és csak akkor, ha a $\bar{\sigma}$–beli g egyenes áthalad a C póluson.*

Bizonyítás.

A modellben egy $\hat{g}$ ($\hat{g} \neq \hat{t}$) egyenes pontosan akkor merőleges $\hat{t}$–re, ha $\hat{g}$–nek a $\hat{t}$–re vonatkozó tükörképe önmaga. Ez viszont akkor áll fenn, ha a g egyenes átmegy a C póluson. Lásd a 12. ábrát. □

Nem nehéz bizonyítani a következő állítást, amely a szögek mértékéről szól.

Állítás. *Az $\hat{Y}$ modellsíkban vegyünk egy olyan $AOB\sphericalangle$ konvex szöget, amelynek csúcsa megegyezik az $\mathcal{M}$ körvonal O centrumával. Ekkor a $AOB\sphericalangle$ szög modellbeli mértéke azonos a σ euklideszi síkban neki megfelelő szög mértékével.*

A bizonyítás az alábbi megállapításokon alapul.

Ha vesszük a σ euklideszi sík azon egybevágósági transzformációit, amelyek fixen hagyják az O pontot, akkor ezeknek az $\hat{Y}$ körlemezre való leszűkítései a modellsíkon olyan egybevágóságokat adnak, amelyek helybenhagyják az O–t. Világos, hogy ezek az egybevágóságok a σ síknak az O körüli forgatásai és tengelyes tükrözések az O–n átmenő egyenesekre.

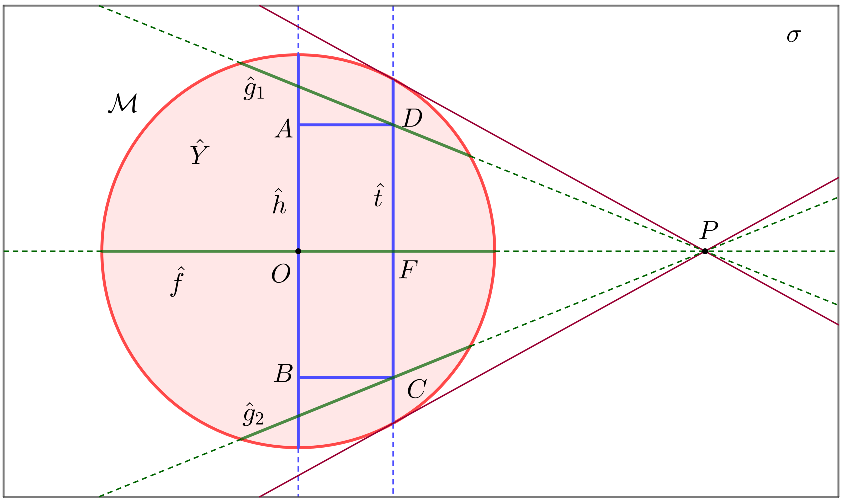
Ennek alapján azt könnyű belátni, hogy egy O csúcspontú szög a modellben derékszög akkor és csak akkor, ha euklideszi értelemben derékszög.

A fenti kijelentésből viszont következik az is, hogy amennyiben a σ euklideszi síkon veszünk egy O csúcsú szöget, akkor ezen szög szögfelezőjének az $\hat{Y}$ nyílt körlemezzel vett metszete a modellbeli szög szögfelezőjét adja.

Tekintsünk olyan O csúcsú szögeket a σ síkon, melyeket egy derékszögből kiindulva felezésekkel nyerünk. Ezeknek az euklideszi mértékei, amelyek $45°,\ 22,5°,\ 11,25°,\ 5,625°, \ldots,$ megegyeznek a modellbeli mértékeikkel az előbbi megállapítás következtében.

Ha egy O csúcsú szög felbontható véges sok olyan részszögre, melyeket a derékszögből elindított felezési eljárással nyerünk, akkor annak a σ–beli mértéke megegyezik a modellsíkbeli mértékével. $\square$

Megjegyzés. A mellékelt 13. ábrán szerepel az $ABCD$ Saccheri–féle négyszög és az $OBCF$ Lambert–féle négyszög. Vegyük észre, hogy ezen négyszögekben a $BCF\sphericalangle$ szög kisebb a derékszögnél, mivel a $\hat{g}_2$ egyenes merőleges a CF oldal $\hat{t}$ egyenesére. Eszerint ezekben a négyszögekben a szögek összege kisebb mint $360°$.



13. ábra. *A modellbeli $ABCD$ Saccheri–féle négyszög és az $OBCF$ Lambert–féle négyszög.*

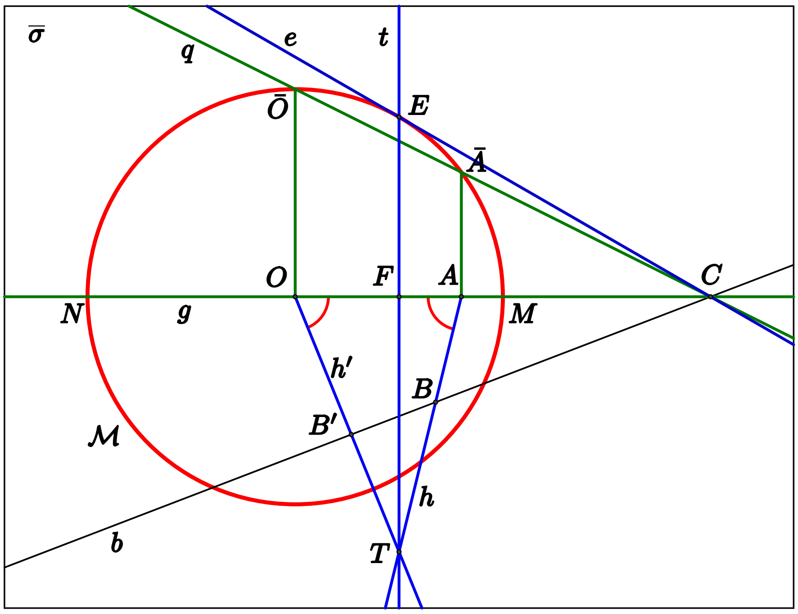
A háromszögek szögösszegére vonatkozó egyenlőtlenség a Beltrami–Calyley–Klein–féle körmodellben

Mint ismeretes, az (SIA1), (SIA2) (BVA), (SPRA), (SEA) axiómákból már levezethető, hogy egy háromszögben egy külső szög mindig nagyobb a nem mellette fekvő belső szögeknél. Ebből pedig következik, hogy egy háromszögnek legalább két hegyesszöge van. Mivel a fenti axiómák teljesülnek a körmodellben, így ez a megállapítás igaz a modellbeli háromszögekre is.

A modellbeli háromszög szögösszegével kapcsolatos egyenlőtlenség bizonyításához szükségünk van a következő állításra.

Állítás. *Az $\hat{Y}$ modellsíkban vegyünk egy $OAB\sphericalangle$ hegyesszöget. Ekkor az $OAB\sphericalangle$ szög modellbeli mértéke kisebb az $OAB\sphericalangle$ szög euklideszi mértékénél.*

Bizonyítás.
Az O, A pontokon átmenő $\overline{\sigma}$–beli egyenest jelölje g, az A, B pontokon áthaladó egyenest pedig h. Tekintsük az $\overline{OA}$ szakasz modellbeli $\hat{t}$ felezőmerőlegesét, illetve a $\hat{t}$–nek megfelelő t egyenest a $\overline{\sigma}$ síkban, melyet a következőképpen lehet megszerkeszteni.



14. ábra. *Az $\overline{OA}$ szakasz $\hat{t}$ felezőmerőlegesének megszerkesztése a modellben.*

Az O, A pontokon átmenő g–re merőleges egyenesek az $\mathcal{M}$ körvonalat két–két pontban metszik. A g egyazon oldalára eső metszéspontok legyenek $\bar{O}$ és $\bar{A}$. Ezen pontok $q = \langle \bar{O}, \bar{A} \rangle$ összekötő egyenesének a g–vel vett metszéspontja legyen C. A keresett t egyenes megegyezik a C pont $\mathcal{M}$ körre vonatkozó polárisával. Ugyanis, az a κ centrális–tengelyes kollineáció, amelynek a centruma C, tengelye t és karakterisztikus kettősviszonya $c(\kappa) = -1$, a modellben egy tengelyes tükrözést ad. A κ egymásba képezi az $\bar{O}$, $\bar{A}$ pontokat, és emiatt egymásba képezi az O, A pontokat is. Ily módon a $\hat{t} = t \cap \hat{Y}$ egyenes azonos az $\overline{OA}$ szakasz modellbeli felezőmerőlegesével.

A t, g egyenesek metszéspontját jelölje F, a t, h egyenesek metszéspontját pedig T.

Evidens, hogy az F az $\overline{OA}$ szakasznak a modellbeli felezőpontja, azaz fennáll $\hat{d}(O,F) = \hat{d}(F,A)$. Vegyük a $B' = \kappa(B)$ pontot. A modellbeli $OAB\sphericalangle$, $AOB'\sphericalangle$ szögeket a $\kappa|\hat{Y}$ tükrözés egymásba képezi. Mivel az $OAB\sphericalangle$, $AOB'\sphericalangle$ szögek a modellben egybevágóak, a modellbeli mértékük egyenlő.

Az előző Állítás szerint az $AOB'\sphericalangle$ szög modellbeli mértéke egyenlő az euklideszi mértékével. Azt kellene tehát igazolni, hogy a σ euklideszi síkon az $AOB'\sphericalangle$ szög mértéke kisebb az $OAB\sphericalangle$ szög mértékénél. Mivel az $FAT\triangle$ és $FOT\triangle$ derékszögű háromszögek FT befogója közös, ehhez elegendő lenne belátni, hogy a σ euklideszi síkon az FA szakaszhossz kisebb az FO szakaszhossznál.

Az általánosság elvének megsértése nélkül feltehetjük, hogy a modellkör sugara $r = 1$. Vezessük be az $OA = x$ és $OF = y$ jelöléseket. A mellékelt ábra jelöléseit alkalmazva azt nyerjük, hogy fennáll

$$\hat{d}(O,A) = \ln(MNOA) = \ln\frac{AN}{MA} = \ln\frac{1+x}{1-x}, \quad \text{illetve} \quad \hat{d}(O,F) = \ln\frac{FN}{MF} = \ln\frac{1+y}{1-y}.$$

Mivel igaz $\hat{d}(O,A) = 2\cdot\hat{d}(O,F)$, így a fentiek szerint teljesül $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{(1+y)^2}{(1-y)^2}$. Ily módon fennáll

$$(1+x)\,(1-y)^2 = (1-x)\,(1+y)^2\,.$$

Ezen egyenletből átrendezéssel adódik $2\,x\,(1+y^2) = 4\,y$, vagyis teljesül

$$x = \frac{2\,y}{1+y^2} < 2y\,.$$

Eszerint a σ euklideszi síkon igaz $OA < 2\,OF$, amiből következik az $FA < FB$ egyenlőtlenség. Ez pedig már igazolja, hogy euklideszi értelemben az $AOB'\sphericalangle$ szög mértéke kisebb az $OAB\sphericalangle$ szög mértékénél. □

Az euklideszi geometria egyik alapvető eredménye az, hogy egy háromszög szögeinek az összege mindig $180°$, feltéve persze, hogy a szögeket fokban mérjük.

Tétel. *A modellsíkon bármely háromszög szögeinek az összege kisebb, mint* $180°$.

Bizonyítás.
A korábbiakban már utaltunk rá, hogy egy háromszögben legalább két hegyesszög van.

Vegyünk egy tetszőleges $ABC\triangle$ háromszöget, amelynek a C csúcsnál lévő szöge nem kisebb a másik két szögnél. Ennek következtében a $CAB\sphericalangle$ és $ABC\sphericalangle$ szögek hegyesszögek.

Az általánosság elvének megsértése nélkül feltehetjük, hogy a tekintett háromszög C csúcsa megegyezik O–val. Ugyanis, ha a $C \neq O$ esetnél vesszük az $\overline{OC}$ szakasz felező merőlegesét, akkor az arra történő tengelyes tükrözés C–t az O–ba, az $ABC\triangle$ háromszöget pedig egy vele egybevágó háromszögbe viszi.

Vegyünk tehát egy olyan $ABC\triangle$ háromszöget, amelyre igaz $C = O$. Az $CAB\sphericalangle$, $ABC\sphericalangle$ és $BCA\sphericalangle$ szögeknek a modellbeli mértéke legyen α, β, γ, az euklideszi mértéke pedig legyen $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$. Ismeretes, hogy $O = C$ miatt igaz $\gamma = \bar{\gamma}$, továbbá az előző Állítás következtében teljesül $\alpha < \bar{\alpha}$ és $\beta < \bar{\beta}$. Ebből pedig adódik, hogy fennáll

$$\alpha + \beta + \gamma < \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = 180°\,. \qquad \square$$

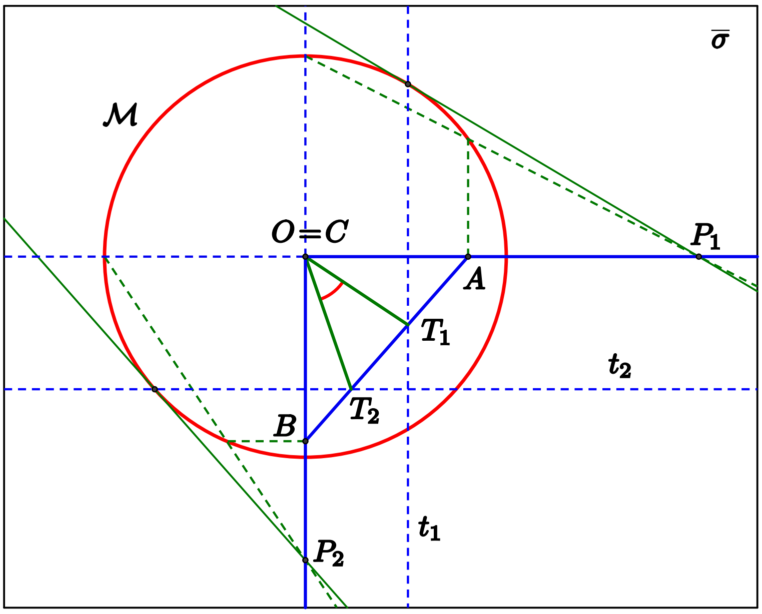
A modellbeli sokszögek szöghiánya

Emlékezzünk rá, hogy a π valós számot az euklideszi geometriában értelmeztük, mint a kör kerületének és átmérőjének hányadosát. Állapodjunk meg abban, hogy a továbbiakban a szögeket ívmértékben mérjük, azaz a derékszög mértékének a $\frac{\pi}{2}$ számot választjuk.

Definíció. A hiperbolikus síkgeometria Beltrami–Cayley–Klein–modelljében legyen adott egy $ABC\triangle$ háromszög, amelynek szögei α, β, γ. A háromszög szöghiányán, vagy más szóval defektusán, a $\delta(ABC\triangle) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ pozitív számot értjük.

Megjegyzés. A mellékelt 15. ábrán megszerkesztettük a szöghiányt a modell egy olyan $ABC\triangle$ derékszögű háromszögéhez, ahol fennáll $C = O$.

Az $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ oldalak $\hat{t}_1$, $\hat{t}_2$ felezőmerőlegeseinek az $\overline{AB}$ oldallal vett metszéspontjai legyenek T_1 és T_2. Korábbi eredményeink szerint a $T_1OT_2\sphericalangle$ szög (euklideszi) mértéke megegyezik a modellbeli $ABC\triangle$ háromszög defektusával.



15. ábra. *Az $ABC\triangle$ derékszögű háromszögben (ahol $C = O$) a szöghiány $T_1OT_2\sphericalangle$.*

A defektus fogalma kiterjeszthető a modellbeli sokszögekre. Legyen adott egy $\mathcal{S}$ egyszerű sokszög, amelynél az oldalak száma n $(n \geq 3)$, a csúcspontokban vett szögek mértékei pedig $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. A háromszögek szögösszegére vonatkozó Tétel alapján be lehet látni, hogy igaz a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < (n-2)\pi$ egyenlőtlenség.

Definíció. Az n–oldalú $\mathcal{S}$ sokszög defektusán a $\delta(\mathcal{S}) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ számot értjük.

Világos, hogy a defektus által a modellbeli sokszögek halmazán egy pozitív valós függvényt nyerünk, és az egybevágó sokszögek defektusa megegyezik.

A következő állítást nem nehéz bebizonyítani, de az igazolásra ezúttal nem térünk ki.

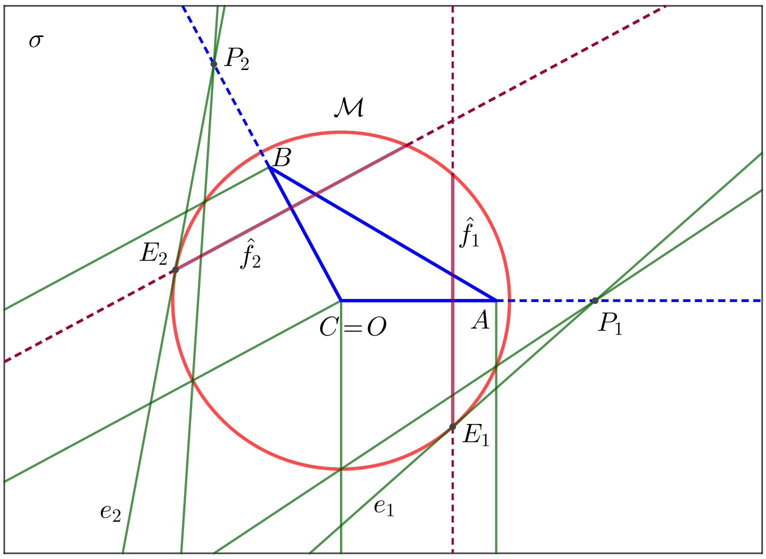
Állítás. *Tekintsünk egy $\mathcal{S}$ sokszöget. Az $\mathcal{S}$–t egy a belsejében haladó és a határán végződő nyílt töröttvonallal bontsuk fel az $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ sokszögekre. Ez esetben fennáll a $\delta(\mathcal{S}) = \delta(\mathcal{S}_1) + \delta(\mathcal{S}_2)$ összefüggés.*

Megjegyzés. Jelölje $\mathcal{H}$ a modellbeli egyszerű sokszögek halmazát. Ezen a halmazon vegyük azt a $\delta : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ valós függvényt, ahol tetszőleges $\mathcal{S}$ sokszög esetén $\delta(\mathcal{S})$ megegyezik annak szöghiányával. Erre a leképezésre igazak az alábbi kijelentések:
(1) Bármely $\mathcal{S}$ sokszög esetén a $\delta(\mathcal{S})$ függvényérték egy pozitív valós szám.
(2) Ha az $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ sokszögek egybevágóak, akkor $\delta(\mathcal{S}_1) = \delta(\mathcal{S}_2)$.
(3) Ha $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{S}_2$ olyan sokszögek, amelyeknek nincs közös belső pontja és a $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ alakzat is egy sokszög, akkor $\delta(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) = \delta(\mathcal{S}_1) + \delta(\mathcal{S}_2)$.

Megállapítható tehát, hogy a modellbeli sokszögek defektusa, mint a sokszögek halmazán értelmezett függvény, teljesít három feltételt a területfüggvényre vonatkozóan.

Az egyedüli problémát az okozza, hogy a modellben nincs 1 oldalú négyzet. A terület értelmezéséhez meg kellene adnunk azt a c konstans szorzót, amellyel bármely $\mathcal{S}$ sokszög $T(\mathcal{S})$ területére fennáll a $T(\mathcal{S}) = c \cdot \delta(\mathcal{S})$ összefüggés.

A háromszög köré írható kör kérdése a modellben



16. ábra. *Egy modellbeli $ABC\triangle$ háromszög, amely köré nem írható kör.*

A modellben vegyünk legyen adva $ABC\triangle$ háromszöget. Tekintsük az AB oldal $\hat{f}$ felezőmerőleges egyenesét, akkor az $\hat{f}$ azon pontok halmaza a modellben, amelyek az A–tól és B–től egyenlő távolságra vannak. Világos, hogy amennyiben két oldal felezőmerőleges egyenese metszi egymást egy Q pontban, akkor ezen a Q ponton áthalad a harmadik oldal felezőmerőlegese is. Ez esetben a Q centrumú és $r = \hat{d}(Q, A)$ sugarú kör áthalad a háromszög mindhárom csúcsán.

Azonban a modellben érvényesülő axiómákból azt nem lehet levezetni, hogy bármely $ABC\triangle$ háromszög esetén metszik egymást az oldalak felezőmerőleges egyenesei. A mellékelt 16. ábrán egy olyan $ABC\triangle$ háromszög szerepel, amelynél megszerkesztettük az

AC, BC oldalak modellbeli $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$ felezőmerőleges egyenesét. Mint látható az modellbeli $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$ egyenesek nem metszik egymást. Ez azt igazolja, hogy a hiperbolikus geometriában vannak olyan háromszögek, amelyek köré nem írható kör.

A modellben azt is meg lehet mutatni, hogy nem minden háromszögnek van magasságpontja. Beírt köre viszont az összes háromszögnek van a hiperbolikus geometriában is, mivel a szögfelezőknek minden esetben van metszéspontjuk.

A helyettes axiómák

A párhuzamossági probléma vizsgálata során a matematikusok már korábban rájöttek arra, hogy az euklideszi geometria párhuzamossági axiómáját helyettesíteni lehet egy másik axiómával, azaz egy másik alapigazságnak vett kijelentéssel.

G. Saccheri olasz matematikus az 1700-as évek elején a következő helyettes axiómát adta meg.

Van legalább egy olyan háromszög, amelyben a szögek összege két derékszöggel egyenlő.

Bolyai János édesapja, Bolyai Farkas a következő helyettes axiómát fedezte fel.

Három pont körön vagy egyenesen van.

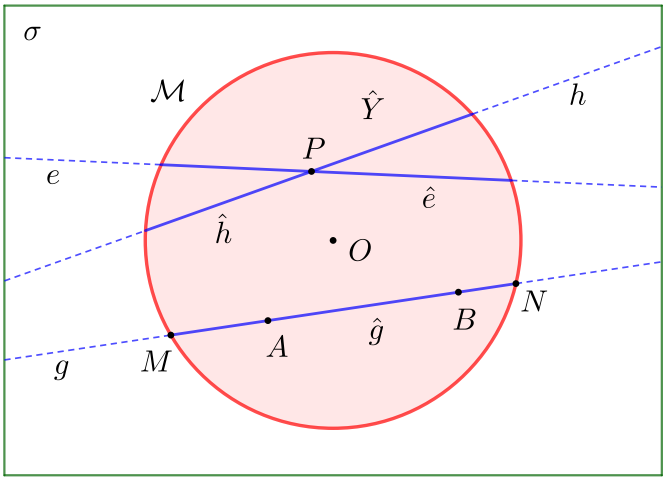
Legyen adott egy g egyenes és az általa határolt egyik félsík, továbbá egy r pozitív valós szám. Ebben a félsíkban vegyük azon pontokat, amelyek a g egyenestől a megadott r $(r > 0)$ távolságra vannak. A félsík összes ilyen pontjából álló alakzatot a g egyenes egyik ekvidisztáns vonalának nevezzük. Az alábbi kijelentés is egy helyettes axióma.

Egyenes ekvidisztáns vonala egyenes.

A hiperbolikus geometria elnevezés valódi oka

Az eddigiek során a Bolyai–Lobacsevszkij–féle síkgeometria Beltrami–Cayley–Klein–féle körmodelljét tárgyaltuk, amelyben a távolságfüggvényt a pontnégyesek kettősviszonyával értelmeztük.

Vegyünk egy tetszőleges $k > 0$ pozitív számot. Könnyű belátni, hogy amennyiben az A, B pontok modellbeli távolságán a $\hat{d}(A,B) = \frac{k}{2} \cdot |\ln(M\,N\,A\,B)|$ számot értjük, akkor is teljesülnek a Bolyai–Lobacsevszkij–féle síkgeometria axiómái.



17. ábra. *A körmodellben a távolságformula legyen* $\hat{d}(A,B) = \frac{k}{2} \cdot |\ln(M\,N\,A\,B)|$.

Tekintsünk egy modellbeli $ABC\triangle$ háromszöget, amelyben a modellbeli oldalhosszak legyenek $a = \hat{d}(B,C)$, $b = \hat{d}(C,A)$ és $c = \hat{d}(A,B)$, a megfelelő csúcsokkal szemközti szögek pedig legyenek α, β, γ. Az oldalhosszak és a szögek kapcsolatára vonatkozóan igazolhatóak az alábbi összefüggések, melyek a modellbeli trigonometria szinusztételének és koszinusztételének felelnek meg.

$$\frac{\operatorname{sh}(a/k)}{\operatorname{sh}(b/k)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \qquad \operatorname{ch}(c/k) = \operatorname{ch}(a/k)\operatorname{ch}(b/k) - \operatorname{sh}(a/k)\operatorname{sh}(b/k)\,\cos\gamma\,.$$

Ezen tételekben tehát megjelennek a hiperbolikus függvények.

A korábbi geometriai tanulmányok során már tárgyaltuk a gömbi geometria alapjait, illetve a gömbháromszögeket. Mint ismeretes, a gömbi geometriában a főkörök játsszák az egyenesek szerepét, és a gömbi szakaszoknak a főkörívek felelnek meg. Az euklideszi térben tekintsünk egy r sugarú $\mathcal{G}$ gömbfelületet és azon $ABC\triangle_{\mathcal{G}}$ gömbháromszöget. A gömbháromszög a, b, c oldalai a megfelelő csúcsokat összekötő főkörívek hosszai, a szögeit pedig az érintők alapján értelmezzük. A gömbháromszög oladalai és szögei közötti kapcsolatokat az analitikus geometria eszközeivel lehet levezetni. Emlékezzünk rá, hogy a gömbi trigonometriában a szinusztétel és az (oldalakra vonatkozó) koszinusztétel a következő összefüggések formájában írhatóak fel, amennyiben a gömbfelület sugara r.

$$\frac{\sin(a/r)}{\sin(b/r)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \qquad \cos(c/r) = \cos(a/r)\,\cos(b/r) + \sin(a/r)\,\sin(b/r)\,\cos\gamma\,.$$

Bolyai és Lobacsevszkij egyaránt levezették az általuk felfedezett új geometriában a háromszögre vonatkozó szinusztételt és koszinusztételt. Mindketten rámutattak arra, hogy az új geometria ezen tételei kapcsolatban állnak a gömbi geometria megfelelő trigonometriai tételeivel. A kapcsolat lényege az, hogy amennyiben a gömbi geometria tételeiben a szögfüggvények helyett a megfelelő hiperbolikus függvényeket vesszük, akkor az új geometria tételeit nyerjük vissza.

Főként erre hivatkozva Felix Klein javasolta azt, hogy a Bolyai–Lobacsevszkij–féle geometriát, amely az euklideszi geometria párhuzamossági axiómájának tagadására épül, nevezzék el hiperbolikus geometriának.

Mint ismeretes, a gömbi geometriában egy $ABC\triangle_{\mathcal{G}}$ háromszögben a szögek összege mindig nagyobb, mint π, és a háromszög területe arányos az $\varepsilon = (\alpha+\beta+\gamma)-\pi$ szögtöbblettel, konkrétan a területre fennáll a $T(ABC\triangle_{\mathcal{G}}) = r^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$ összefüggés az r sugarú gömbfelületen.

Ehhez képest a Bolyai–Lobacsevszkij–féle geometriában egy háromszög területe a háromszög defektusával arányos. Azonban mindkét geometriában van felső korlátja a háromszögek területeinek.

A nemeuklideszi geometriák

Azokat a geometriai elméleteket, amelyekben nem teljesül az euklideszi párhuzamossági axióma, közös néven nemeuklideszi geometriáknak hívják. Természetesen ezek közé tartozik a Bolyai–Lobacsevszkij–féle hiperbolikus gometria, továbbá ide sorolható az abszolút geometria is.

A gömbi geometriát is szokás ezek közé sorolni. Azonban a gömbön, ahol a főkörök játsszák az egyenesek szerepét, két átellenes ponthoz végtelen sok főkör illeszkedik. Ezt a problémát ki lehet küszöbölni oly módon, hogy a gömbfelület átellenes pontjait azonosítjuk egymással. Ezen azonosítás következtében bármely két ponthoz már pontosan egy egyenes illeszkedik, továbbá bármely két egyenesnek pontosan egy közös pontja van. Az így nyert geometriai elméletet *elliptikus geometriának* nevezik.

Megjegyezzük, hogy az elliptikus geometria szoros kapcsolatban áll az általunk korábban már tárgyalt projektív síkgeometriával. Ezt a kapcsolatot a projektív sík sugárnyaláb modelljével lehet leginkább szemléltetni.

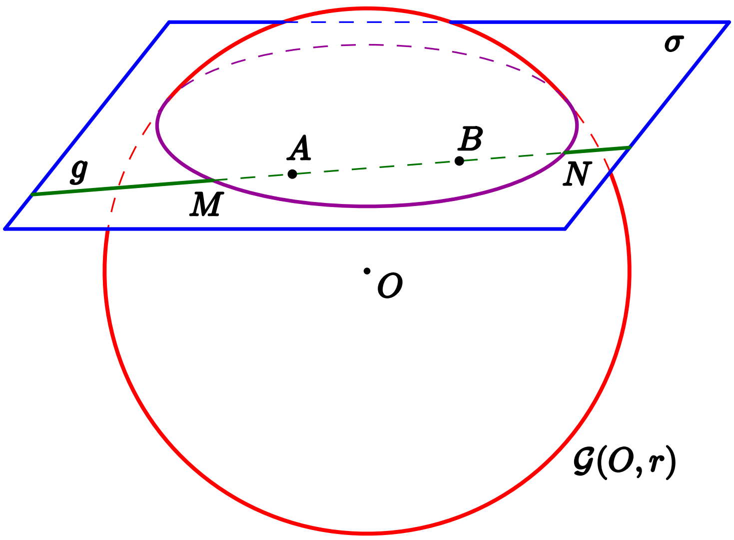
6) A hiperbolikus geometria Beltrami–Cayley–Klein–féle gömbmodellje

A modell az euklideszi geometrián alapul, vagyis a modellt abban konstruáljuk meg. Az euklideszi tér pontjainak halmazát jelölje X. A tér egyeneseinek halmaza legyen $\mathcal{E}$, a tér síkjainak halmaza pedig legyen $\mathcal{S}$. A továbbiakban az euklideszi tér valamely A, B pontjainak távolságát jelölje AB.

Vegyünk a térben egy O pontot és egy r pozitív valós számot. Tekintsük az O centrumú és r sugarú $\mathcal{N}(O,r) = \{\, P \in X \mid OP < r \,\}$ nyílt gömbtestet, amelyet a $\mathcal{G}(O,r) = \{\, P \in X \mid OP = r \,\}$ gömbfelület határol. A modellbeli tér pontjainak $\hat{X}$ halmaza legyen az $\mathcal{N}(O,r)$ nyílt gömb.

Először tisztáznunk kell, hogy mit értünk a modell egyenesein és síkjain. Vegyük az euklideszi tér azon egyeneseit, amelyeknek az O–tól mért távolsága kisebb, mint r. Evidens, hogy ezek az $\mathcal{N}(O,r)$ nyílt gömbből nyílt szakaszokat metszenek ki, és ezen nyílt szakaszokat tekintjük a modell egyeneseinek. Ily módon a modell egyeneseinek halmaza $\hat{\mathcal{E}} = \{\, g \cap \hat{X} \mid g \in \mathcal{E},\ g \cap \hat{X} \neq \emptyset \,\}$. Lásd a 18. ábrát.

Vegyük továbbá az euklideszi tér azon síkjait, amelyeknek az O–tól mért távolsága kisebb, mint r. Nyilvánvaló, hogy ezek az $\mathcal{N}(O,r)$ nyílt gömbből nyílt körlemezeket metszenek ki. Legyenek ezen nyílt körlemezek a modellbeli síkok. Eszerint a modell síkjainak halmaza $\hat{\mathcal{S}} = \{\, \sigma \cap \hat{X} \mid \sigma \in \mathcal{S},\ \sigma \cap \hat{X} \neq \emptyset \,\}$.



18. ábra. *Illusztráció a Beltrami–Cayley–Klein–féle gömbmodellhez.*

Ezt követően megadjuk a $\hat{d}$ távolságfüggvényt a modellbeli $\hat{X} = \mathcal{N}(O,r)$ téren. Legyenek A és B az $\hat{X}$ tér különböző pontjai. Tekintsük a rajtuk áthaladó $g = \langle A, B \rangle$ egyenest az euklideszi térben. A g messe a $\mathcal{G}(O,r)$ gömbfelületet az M, N pontokban. A $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \to \mathbb{R}$ távolságfüggvénynek az (A,B) pontpáron nyert értéke legyen

$$\hat{d}(A,B) = |\, \ln (M\, N\, A\, B) \,|\,,$$

ahol $(M\, N\, A\, B)$ az euklideszi térben vett kollineáris pontnégyes kettősviszonyát jelöli. Az $A = B$ esetben a $\hat{d}$ távolságfüggvény definíció szerinti értéke pedig legyen $\hat{d}(A,A) = 0$.

Evidens, hogy ebben a modellben teljesülnek az (IA 1)–(IA 6) illeszkedési axiómák.

A (BVA) axióma is igaz a modellben. Vegyünk egy g egyenest, amely az M, N pontokban metszi a $\mathcal{G}(O,r)$ gömbfelületet és vezessük be a $\hat{g} = g \cap \mathcal{N}(O,r)$ jelölést. Tekintsük a modellbeli $\hat{g}$ egyenesen azt a $\xi : \hat{g} \to \mathbb{R}$ leképezést, amelynél tetszőleges $P \in \hat{g}$ pontra fennáll $\xi(P) = \ln \dfrac{MP}{PN}$. A Beltrami–Cayley–Klein–féle körmodell tárgyalásánál már igazoltuk, hogy a ξ leképezés egy olyan bijekció, amelyre teljesül a (BVA) axiómában szereplő vonalzó–feltétel.

Azt könnyen be lehet látni, hogy a modellbeli szakaszok megegyeznek az euklideszi tér azon szakaszaival, amelyeket az $\mathcal{N}(O,r)$ nyílt gömb tartalmaz. Ennek következtében a (PRA) axióma is teljesül a modellben. Evidens, hogy ebben az $(\hat{X}, \hat{\mathcal{E}}, \hat{\mathcal{S}}, \hat{d})$ modellben a (HPA) hiperbolikus párhuzamossági axióma marad érvényben.

Hátramaradt még az (EA) egybevágósági axióma. Annak bizonyítása, hogy a modellben ez is teljesül, már egy nehezebb feladat, mivel az igazolás projektív térgeometriai eszközök alkalmazását igényli. Ily módon erre most nem térünk ki.

Összegzésként azt mondhatjuk, hogy az $(\hat{X}, \hat{\mathcal{E}}, \hat{\mathcal{S}}, \hat{d})$ négyes egy modellt ad a hiperbolikus geometriára. Ezt nevezik a hiperbolikus geometriára vonatkozó Beltrami–Cayley–Klein–féle gömbmodellnek.

A poliéder–modell, amelyben nem teljesül az egybevágósági axióma

Az alábbiak során konstruálunk még egy modellt azzal a módosítással, hogy nem egy gömbtestet, hanem egy konvex poliédert veszünk alapul.

Az euklideszi térben vegyünk egy Ω konvex poliédert. A modell pontjainak halmaza legyen az Ω konvex poliéder belső pontjainak halmaza, azaz legyen $\tilde{X} = Int(\Omega)$.

Tekintsük az euklideszi tér azon egyeneseit, amelyeknek van közös pontja az $Int(\Omega)$ alakzattal. Evidens, hogy egy ilyen egyenes egy nyílt szakaszban metszi $Int(\Omega)$–t. A kimetszett nyílt szakaszok legyenek a modell egyenesei.

Vegyük továbbá az euklideszi tér azon síkjait, amelyeknek van közös pontja $Int(\Omega)$–val. Ezen síkok az Ω–ból sokszögeket metszenek ki. A síkok által az $Int(\Omega)$–ból kimetszett nyílt sokszöglemezek legyenek a modell síkjai.

Legyenek A és B a $\tilde{X}$ modelltér különböző pontjai. Tekintsük a rajtuk áthaladó $g = \langle A, B \rangle$ egyenest az euklideszi térben. A g messe az Ω–t határoló $Bd(\Omega)$ poliéderfelületet az M, N pontokban. A $\tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} \to \mathbb{R}$ távolságfüggvénynek az (A, B) pontpáron nyert értéke legyen

$$\tilde{d}(A,B) = \left| \ln \left(\frac{MA}{AN} \cdot \frac{BN}{MB} \right) \right| .$$

Nem nehéz belátni, hogy ebben a modellben ugyancsak teljesülnek az (IA1)–(IA6), (BVA) és (PRA) axiómák, továbbá igaz a (HPA) axióma is. Az (EA) egybevágósági axióma viszont ez esetben már nem teljesül.

7) A hiperbolikus síkgeometria Poincaré–féle körmodellje

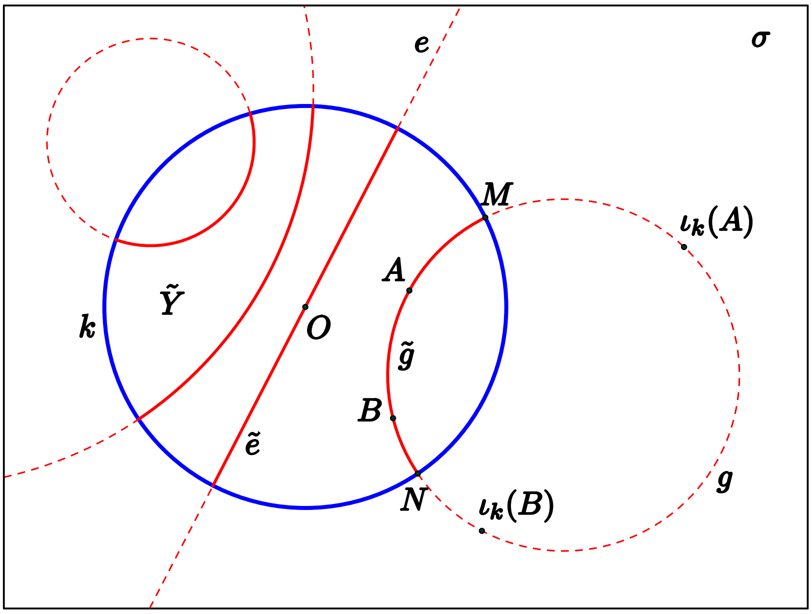
Az ötödik fejezetben részletesen tárgyaltuk a hiperbolikus síkgeometria Beltrami–Cayley–Klein–féle körmodelljét. Ennek során megállapítottuk, hogy a szögek modellbeli mértéke és euklideszi mértéke általában különböző. Jelen fejezetben az euklideszi síkon egy olyan modellt adunk meg, amely már szögtartó. A modell tárgyalása során fel fogjuk használni a síkbeli inverzióval kapcsolatos ismereteinket.

Ez a modell is az euklideszi geometrián alapul. Rögzítsünk az euklideszi térben egy σ síkot és abban egy O centrumú, r sugarú $k = \{\, P\in\sigma \mid OP = r\,\}$ körvonalat. A modellbeli sík pontjainak $\tilde{Y}$ halmaza legyen a k körvonal által határolt nyílt körlemez, azaz legyen $\tilde{Y} = \{\, P\in\sigma \mid OP < r\,\}$.

Vegyük azokat a σ–beli egyeneseket és körvonalakat, amelyek derékszögben metszik a k körvonalat, vagyis amelyeknek a k–val vett hajlásszögük derékszög. *Lásd a 19. ábrát.* Ezen egyeneseknek és köröknek az $\tilde{Y}$ nyílt körlemezzel vett metszetei legyenek a modell egyenesei. A modellbeli egyenesek halmazát jelölje $\tilde{\mathcal{E}}$.

Evidens, hogy egy σ–beli e egyenes akkor metszi derékszögben a k körvonalat, ha áthalad az O középponton. Egy σ–beli g kör pedig akkor metszi derékszögben k–t, ha az O centrumnak a g körre vonatkozó hatványa éppen r^2.

Tekintsük azt a $\iota_k : \sigma\setminus\{O\} \to \sigma\setminus\{O\}$ inverziót, amelynek k az alapköre (és az O pont a pólusa). Emlékezzünk rá, hogy egy σ–beli g ($g \neq k$) kör merőleges k–ra akkor és csak akkor, ha a ι_k inverzió a g kört önmagába képezi. Ugyanez igaz az egyenesek esetében is, azaz egy e egyenes derékszögben metszi k–t pontosan akkor, ha fennáll $\iota_k(e) = e$.



19. ábra. *Egyenesek a Poincaré–féle körmodellben.*

Ebben a modellben nyilván teljesül az (SIA1) axióma, azaz *létezik három olyan pont, amelyek nincsenek egy egyenesen.*

Megmutatjuk, hogy a modellben igaz az (SIA2) axióma is, azaz *két ponthoz egy és csakis egy egyenes illeszkedik*. Vegyünk az $\tilde{Y}$ modellsíkon két pontot, legyenek ezek A és B. Tekintsük az A pont $A' = \iota_k(A)$ inverz képét. Ha egy σ–beli körvonal vagy egyenes áthalad A–n és derékszögben metszi k–t, akkor annak át kell mennie az A' ponton is.

Amennyiben a σ euklideszi síkon az O, A, B pontok nincsenek egy egyenesen, akkor vegyük azt a g kört, amely áthalad az A, A', B pontokon. *Lásd a 19. ábrát.* Mivel az O–nak ezen g körre vonatkozó hatványa $OA \cdot OA' = r^2$, így a k, g körök derékszögben metszik egymást. Ily módon a $\tilde{g} = g \cap \tilde{Y}$ körív egy olyan modellbeli egyenest ad, amely illeszkedik az A, B pontokhoz. A fent leírtak alapján már nyilvánvaló, hogy $\tilde{g}$ az egyetlen olyan modellbeli egyenes, amely áthalad az A, B pontokon.

Ha pedig σ–ban az O, A, B pontok egyaránt illeszkednek egy e egyeneshez, akkor az $\tilde{e} = e \cap \tilde{Y}$ metszet lesz az egyetlen olyan modellbeli egyenes, amely illeszkedik az A, B pontokhoz.

Ezt követően megadjuk a modellbeli $\tilde{d} : \tilde{Y} \times \tilde{Y} \to \mathbb{R}$ távolságfüggvényt. Legyenek A és B az $\tilde{Y}$ modellsík különböző pontjai. Tekintsük azt a g–vel jelölt kört vagy egyenest a σ euklideszi síkban, amely áthalad az A, B pontokon és derékszögben metszi a k kört. A g messe a k körvonalat az M, N pontokban. A $\tilde{d}$ függvénynek az (A, B) pontpáron nyert értéke legyen

$$\tilde{d}(A, B) = \left| \ln \left(\frac{MA}{AN} \cdot \frac{BN}{MB} \right) \right|,$$

ahol MA, AN, MB, BN a σ euklideszi síkon vett szakaszok hosszait jelölik.

Emellett tetszőleges $A \in \tilde{Y}$ pont esetében a $\tilde{d}$ távolságfüggvénynek az (A, A) elempáron nyert értéke legyen $\tilde{d}(A, A) = 0$.

Megjegyzés. Tegyük fel, hogy A és B az $\tilde{Y}$ modellsíknak olyan pontjai, hogy σ–ban az O, A, B pontok nem kollineárisak. Ekkor g egy σ–beli kör és az M, N, A, B pontok egy köri pontnégyest alkotnak. Vegyük észre, hogy a húrhosszakból nyert $\frac{MA}{AN} \cdot \frac{BN}{MB}$ pozitív valós szám megegyezik ezen köri pontnégyes kettősviszonyával.

A (BVA) axióma teljesülése

Tekintsünk a σ síkon egy olyan kört vagy egyenest, amely az M, N pontokban, derékszögben metszi a k körvonalat. Jelöljük el ezt az alakzatot g–vel. A g által meghatározott $\tilde{g} = g \cap \tilde{Y}$ modellbeli egyenesen vegyük azt a $\xi : \tilde{g} \to \mathbb{R}$ leképezést, ahol tetszőleges $P \in \tilde{g}$ pontra fennáll $\xi(P) = \ln \dfrac{MP}{PN}$.

Azt könnyű belátni, hogy amennyiben P befutja $\tilde{g}$ körívet, akkor az $\frac{MP}{PN}$ hányados befutja a pozitív valós számok halmazát. Ebből már adódik, hogy a $\xi : \tilde{g} \to \mathbb{R}$ leképezés bijektív.

Legyenek A és B a $\tilde{g}$ egyenes pontjai. Azt nyerjük, hogy fennáll
$\xi(A) - \xi(B) = \ln \frac{MA}{AN} - \ln \frac{MB}{BN} = \ln\left(\frac{MA}{AN} \cdot \frac{BN}{MB}\right)$. Ebből viszont már következik a
$|\xi(A) - \xi(B)| = \tilde{d}(A, B)$ összefüggés, vagyis a Birkhoff–féle vonalzó axióma teljesül.

Az (SPRA) Pasch–féle rendezési axiómának ezen modellben való igazolása már egy nehezebb feladat. Erre most nem térünk ki.

A modellbeli tengelyes tükrözések, mint inverziók

A Poincaré–féle körmodell tárgyalásában fontos szerepe van a következő állításnak.
Állítás. *Legyen adott σ–ban egy olyan g kör, amely derékszögben metszi el az $\tilde{Y}$ nyílt körlemezt határoló k körvonalat. Tekintsük azt a σ–beli ι_g inverziót, amelynek g az alapköre. Ekkor ι_g–nek az $\tilde{Y}$–ra vett leszűkítése egy egybevágósági transzformációt ad a modellsíkon.*
Bizonyítás (vázlatos).
A síkbeli inverzió tulajdonságait kell alkalmaznunk. Mivel a σ euklideszi síkban a k, g körök derékszögben metszik egymást, a ι_g inverzió önmagára képezi a k körvonalat és az általa határolt $\tilde{Y}$ nyílt körlemezt.

Vegyük az $\tilde{Y}$ nyílt körlemez valamely A, B pontjait. Legyen e az a körvonal (vagy egyenes), amely áthalad az A, B pontokon és derékszögben metszi el a k kört. Jelölje M és N a két metszéspontot. Ismeretes, hogy az inverzió kört (és egyenest) körbe vagy egyenesbe képez és megőrzi ezek hajlásszögét. Mivel $\iota_g(k) = k$ teljesül, az $e' = \iota_g(e)$ képalakzat, amely tartalmazza az $A' = \iota_g(A)$, $B' = \iota_g(B)$ képpontokat, derékszögben metszi el k–t az $M' = \iota_g(A)$, $N' = \iota_g(B)$ pontokban.

Az inverzió több kedvező tulajdonsággal is rendelkezik. Bizonyítható, hogy az úgynevezett ciklustartás és szögtartás mellett az inverzió megőrzi a köri pontnégyesek (illetve a kollineáris pontnégyesek) kettősviszonyát is. Ennek igazolására ezúttal nem térünk ki.

A fentiek alapján az A, B, M, N és az A', B', M', N' pontnégyesekre, amelyek vagy körön vagy egyenesen vannak, fennáll az

$$\frac{MA}{AN} \cdot \frac{BN}{MB} = \frac{M'A'}{A'N'} \cdot \frac{B'N'}{M'B'}$$

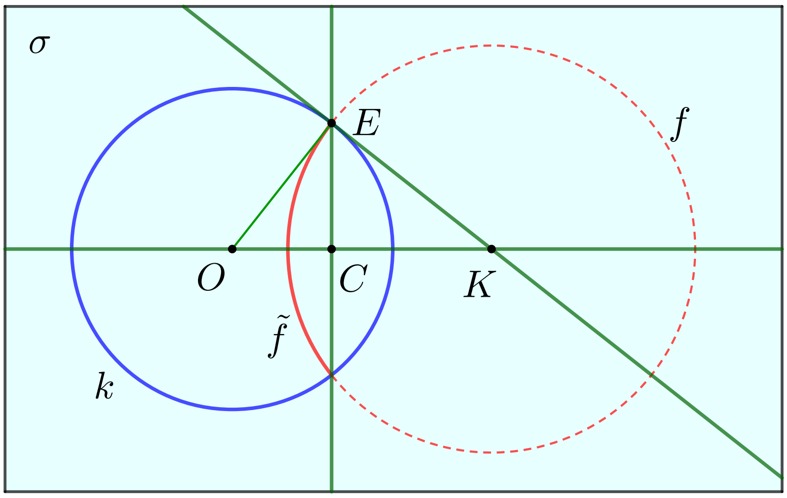
összefüggés. Ebből viszont az következik, hogy a pontok modellbeli távolságára teljesül $\tilde{d}(A, B) = \tilde{d}(A', B')$. Eszerint a ι_g inverzió $\tilde{Y}$ körlemezre vett leszűkítésére nemcsak az igaz, hogy modellbeli egyenest modellbeli egyenesbe képez, hanem az is, hogy megőrzi a modellbeli távolságot. Ez pedig azt jelenti, hogy ι_g egy egybevágósági transzformációt ad a modellben. $\square$

Ismeretes, hogy az inverzió kétszeri végrehajtásával a helybenhagyást kapjuk az euklideszi síkon, vagyis fennáll $\iota_g \circ \iota_g = id$. Emiatt fenti eredményből már adódik az alábbi kijelentés.
Következmény. *Legyen adott σ–ban egy olyan g kör, amely derékszögben metszi el az $\tilde{Y}$ nyílt körlemezt határoló k körvonalat. Ekkor a ι_g inverziónak az $\tilde{Y}$–ra vett leszűkítése megegyezik azzal a tengelyes tükrözésssel a modellsíkon, amelynek tengelye a $\tilde{g}$ egyenes.*

Az egybevágósági axióma teljesülése a modellben

Az alábbiak során megmutatjuk, hogy amennyiben adott egy olyan szakasz, amelynek egyik végpontja a $\tilde{Y}$ körlemez O centruma, akkor könnyen meg lehet szerkeszteni a szakasz modellbeli felező merőlegesét. (Lásd a 20. ábrát.)

Jelölje C a szakasz másik végpontját. Vegyük azt a C–n átmenő σ–beli egyenest, amely merőleges az $\langle O, C\rangle$ egyenesre. Ennek a k körrel vett egyik metszéspontja legyen E. A k körnek az E pontbeli érintője pedig metssze el az $\langle O, C\rangle$ egyenest a K pontban. Világos, hogy a K centrumú és $\varrho = KE$ sugarú f kör derékszögben metszi el a k körvonalat. Emiatt σ síkbeli ι_f inverzió, melynek f az alapköre és ϱ^2 a hatványa, önmagába képezi a k kört. Lásd a 20. ábrát.



20. ábra. *Az OC szakasz $\tilde{f}$ modellbeli felező merőlegesének megszerkesztése.*

Alkalmazzuk a befogótételt a $KOE\triangle$ derékszögű háromszögre. Ez alapján fennáll $KO \cdot KC = KE^2 = \varrho^2$. Ebből pedig az következik, hogy a ι_f inverzió egymásba képezi az O, C pontokat. Ismeretes, hogy a modellsíkon ι_f adja az $\tilde{f}$ egyenesre történő tengelyes tükrözést. Mivel ez felcseréli a $\overline{OC}$ szakasz végpontjait, a szakasz modellbeli felező merőlegese megegyezik az $\tilde{f}$ egyenessel.

Az eddigi eredmények alapján azt is be lehet bizonyítani, hogy a modellben az (SEA) egybevágósági axióma. A bizonyítási eljárás az alábbi meggondolásokon alapul.

Ha adva van egy olyan modellbeli zászló, amelynek C csúcspontja különbözik a $\tilde{Y}$ körlemez O centrumától, akkor az $\overline{OC}$ szakasz $\tilde{f}$ felező merőlegesére történő tengelyes tükrözéssel, ez átvihető egy olyan modellbeli zászlóba, amelynek csúcspontja az O pont.

Ha két olyan modellbeli zászló van adva, amelyeknek O a csúcspontja, akkor egyértelműen létezik egy olyan modellbeli egybevágóság, amely az első zászlót a másodikba képezi. Ugyanis, a modellsíknak az O–t fixen hagyó egybevágóságait a σ euklideszi sík O–t helybenhagyó egybevágóságaiból nyerjük oly módon, hogy azokat leszűkítjük a $\tilde{Y}$ körlemezre.

Azt már könnyű megmutatni, hogy a modellben fennáll az (SHPA) hiperbolikus párhuzamossági axióma. Ehhez vegyük az O pontot és egy arra nem illeszkedő $\tilde{g}$ egyenest. Világos, hogy végtelen sok olyan modellbeli egyenes van, amely áthalad az O–n és nem metszi $\tilde{g}$–t.

A fejezetben leírt eredmények alapján a következő megállapítást tehetjük.
Összegzés. A fentiek során értelmezett $(\tilde{Y}, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{d})$ hármasra teljesülnek a hiperbolikus síkgeometria axiómái. Ezt a modellt a hiperbolikus síkgeometria Poincaré–féle körmodelljének nevezzük.

A Poincaré–féle modell szögtartó tulajdonsága

Az alábbi kijelentés az O csúcsú szögek mértékéről szól.
Állítás. *A $\tilde{Y}$ modellsíkban vegyünk egy olyan $AOB\sphericalangle$ konvex szöget, amelynek csúcsa megegyezik a k körvonal O centrumával. Ekkor az $AOB\sphericalangle$ szög modellbeli mértéke egyenlő a σ–beli $AOB\sphericalangle$ szög euklideszi mértékével.*
A bizonyítás az alábbi megállapításokon alapul.
Ha vesszük a σ euklideszi sík azon egybevágósági transzformációit, amelyek fixen hagyják az O pontot, akkor ezeknek az $\tilde{Y}$ körlemezre való leszűkítései a modellsíkon olyan egybevágóságokat adnak, amelyek helybenhagyják az O–t. Világos, hogy ezek az egybevágóságok a σ síknak az O körüli forgatásai és tengelyes tükrözések az O–n átmenő egyenesekre.

Ennek alapján azt könnyű belátni, hogy egy O csúcspontú szög a modellben derékszög akkor és csak akkor, ha euklideszi értelemben derékszög.

A fenti kijelentésből viszont következik az is, hogy amennyiben a σ euklideszi síkon veszünk egy O csúcsú szöget, akkor ezen szög szögfelezőjének az $\tilde{Y}$ nyílt körlemezzel vett metszete a modellbeli szög szögfelezőjét adja.

Tekintsünk olyan O csúcsú szögeket a σ síkon, melyeket egy derékszögből kiindulva felezésekkel nyerünk. Ezeknek az euklideszi mértékei, amelyek $45°,\ 22,5°,\ 11,25°,\ 5,625°, \ldots$, megegyeznek a modellbeli mértékeikkel az előbbi megállapítás következtében.

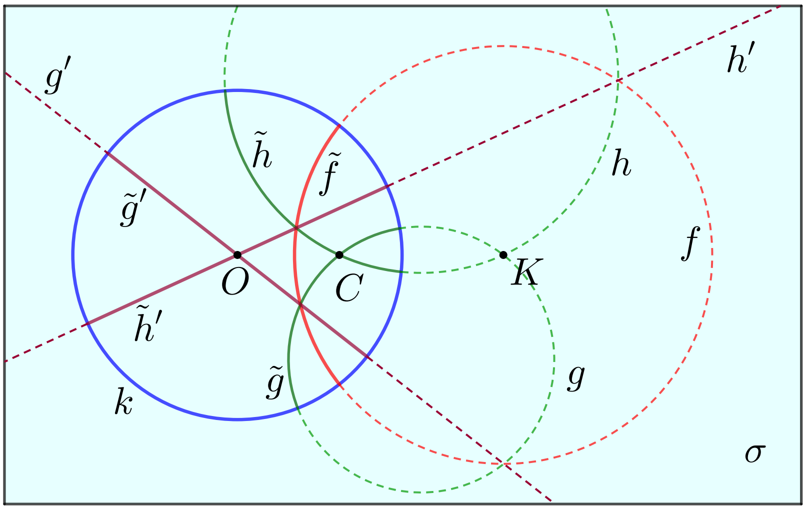
Ha egy O csúcsú szög felbontható véges sok olyan részszögre, melyeket a derékszögből elindított felezési eljárással nyerünk, akkor annak a σ–beli mértéke megegyezik a modellsíkbeli mértékével. $\square$

Az alábbi tételből már következik, hogy a Poincaré–féle körmodell szögtartó.
Tétel. *Legyenek g és h olyan körök vagy egyenesek a σ síkon, amelyek metszik egymást és amelyek derékszögben metszik az $\tilde{Y}$ nyílt körlemezt határoló k körvonalat. Ekkor g–nek és h–nak az euklideszi síkon vett hajlásszöge megegyezik a modellsíkbeli $\tilde{g} = g \cap \tilde{Y}$ és $\tilde{h} = h \cap \tilde{Y}$ metsző egyenesek hajlásszögével.*
Bizonyítás.
A $g,\ h$ körvonalaknak az $\tilde{Y}$ körlemezre eső metszéspontja legyen C. Az előző állítás miatt azt az általános esetet tárgyaljuk, amikor $C \neq O$. Lásd a 21. ábrát.

Vegyük azt az f kört, amely derékszögben metszi k–t és a modellbeli $\tilde{f} = f \cap \tilde{Y}$ egyenes az $\overline{OC}$ szakasz felező merőlegese. Korábban már beláttuk, hogy a σ síkbeli ι_f inverzió, melynek f az alapköre, adja meg a modellbeli $\tilde{f}$ egyenesre való tengelyes tükrözést és felcseréli a $C,\ O$ pontokat.

Mivel az inverzió egy szögtartó leképezés az euklideszi síkon és fennáll $\iota_f(k) = k,\ \iota_f(C) = O$, a ι_f inverzió a $g,\ h$ köröket az O centrumon átmenő $g' = \iota_f(g),\ h' = \iota_f(h)$ egyenesekbe képezi. Világos, hogy a $g,\ h$ körök σ–beli szöge egyenlő a $g',\ h'$ egyenesek szögével.

Használjuk fel az előző Állítást, miszerint az O csúcsú szögek modellbeli és euklideszi mértéke megegyezik. Emiatt a $g',\ h'$ egyeneseknek a σ euklideszi síkon vett hajlásszöge megegyezik a modellsíkbeli $\tilde{g}',\ \tilde{h}'$ egyenesek szögével.



21. ábra. *A Poincaré–féle körmodellben megőrződik az euklideszi szögmérték.*

A ι_f transzformáció a $\tilde{Y}$ modellsíkon egy egybevágóságot ad és a modell $\tilde{g}'$, $\tilde{h}'$ egyeneseit visszíviszi a $\tilde{g}$, $\tilde{h}$ egyenesekbe. Ebből következik, hogy a modellsíkon a két metsző egyenespár szöge egyenlő.

Az előbbi három megállapítás alapján igazak az alábbi egyenlőségek

$$(g, h)\sphericalangle = (g',\ h')\sphericalangle = (\tilde{g}',\ \tilde{h}')\sphericalangle = (\tilde{g},\ \tilde{h})\sphericalangle\,,$$

amelyben az első két hajlásszöget az euklideszi síkon, a másik két hajlásszöget pedig a modellben mérjük. Ebből viszont azt nyerjük, hogy a g, h körök euklideszi hajlásszöge megegyezik a modellbeli $\tilde{g}$, $\tilde{h}$ egyenesek hajlásszögével. $\square$

8) Az euklideszi geometriának a valós számtestre épített modellje

Mint ismeretes, jegyzetünkben $\mathbb{R}$ jelöli a valós számok halmazát. Tekintsük a valós számhármasok terét, melyet a szokásnak megfelelően $\mathbb{R}^3$–mal jelölünk. Az $\mathbb{R}^3$–ban természetes módon értelmezni lehet az összeadás és a számmal való szorzás műveletét. Ily módon $\mathbb{R}^3$ egy 3–dimenziós valós vektortérnek is tekinthető.

A definiálandó modellben a tér összes pontjának halmaza legyen $\mathbb{R}^3$. Eszerint a pontok valós számhármasok, vagyis $X = \{ (a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \mathbb{R};\ i = 1, 2, 3 \}$. Az egyeneseket és síkokat, melyek az $X = \mathbb{R}^3$ tér kitüntetett részhalmazai, az alábbiak szerint értelmezzük.

Legyenek $P = (p_1, p_2, p_3)$ és $Q = (q_1, q_2, q_3)$ az $\mathbb{R}^3$ különböző elemei. Tekintsük a $\langle P, Q \rangle = \{ P + t(P - Q) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ponthalmazt, mint a tér egyik egyenesét. A tér összes egyenesének halmaza pedig legyen $\mathcal{E} = \{ \langle P, Q \rangle \mid P,\ Q \in \mathbb{R}^3,\ P \neq Q \}$.

Vegyünk olyan $a,\ b,\ c,\ e$ valós számokat, melyekre fennáll $a^2+b^2+c^2 > 0$. Tekintsük az $[a, b, c, e] = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a\,x_1+b\,x_2+c\,x_3+e = 0 \}$ ponthalmazt a tér egyik síkjának. A tér összes síkjának halmaza legyen $\mathcal{S} = \{ [a, b, c, e] \mid a,\ b,\ c,\ e \in \mathbb{R};\ a^2 + b^2 + c^2 > 0 \}$. Célszerű itt megjegyezni, hogy tetszőleges $[a, b, c, e]$ síkot és λ ($\lambda \neq 0$) valós számot véve teljesül $[a, b, c, e] = [\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda e]$.

Nem nehéz belátni, hogy az $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}, \mathcal{S})$ hármas eleget tesz az (IA1)–(IA6) illeszkedési axiómáknak. Ezt követően megadunk egy távolságfüggvényt az $X = \mathbb{R}^3$ téren.

Vegyük azt a $d_E : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ leképezést, ahol tetszőleges $P = (p_1, p_2, p_3)$ és $Q = (q_1, q_2, q_3)$ pontok esetén fennáll

$$d_E(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}\ .$$

Ezt a d_E függvényt euklideszi metrikának nevezzük.

Legyenek $P,\ Q$ ($P \neq Q$) tetszőleges pontok, és tekintsük a rajtuk áthaladó $g = \langle P, Q \rangle = \{ P + t(Q - P) \mid t \in \mathbb{R} \}$ egyenest. Vegyük azt a $\xi : g \to \mathbb{R}$ leképezést, amelyet a

$$\xi((1 - t)P + tQ) \ =\ t \cdot d_E(P, Q) \ =\ t \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(p_i - q_i)^2}$$

összefüggés ír le ($t \in \mathbb{R}$). Könnyen belátható, hogy a ξ leképezés egy olyan bijekció, amely eleget tesz a (BVA) axiómában szereplő vonalzó feltételnek.

Lineáris algebrai módszerek alkalmazásával bizonyítható, hogy az $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}, \mathcal{S}, d_E)$ négyesre teljesül az euklideszi geometria összes axiómája. Ennek következtében az $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}, \mathcal{S}, d_E)$ négyest az euklideszi geometria *valós számtestre épített analitikus modelljének* nevezzük.

Megjegyzés. Az $\mathbb{R}^3$ téren tekintsük most azt a d_A távolságfüggvényt, ahol tetszőleges $P,\ Q \in \mathbb{R}^3$ pontokra fennáll $d_A(P, Q) = \sum_{i=1}^{3}|p_i - q_i|$. Igazolható, hogy az $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}, \mathcal{S}, d_A)$ négyesre teljesülnek az (IA1)–(IA6), (BVA), (PRA) és (PA) axiómák, azonban az (EA) egybevágósági axióma már nem teljesül.