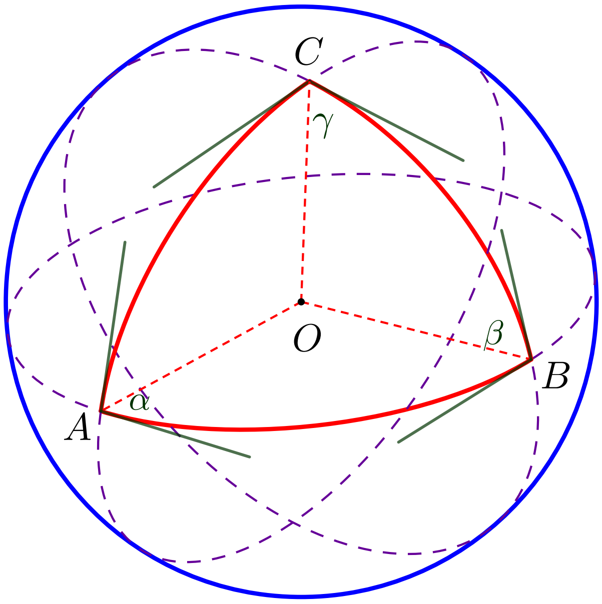
Verhóczki László

Analitikus geometria

előadásjegyzet
matematikatanári szakos hallgatóknak



ELTE TTK Matematikai Intézet
Geometriai Tanszék
2021

1) Az euklideszi tér szabad vektorainak tere

Az irány értelmezése

Az irány fogalmának bevezetése céljából előbb két egyenes párhuzamosságának adjuk meg egy szükséges és elégséges feltételét.

1.1. Állítás. *Két egyenes párhuzamos egymással akkor és csak akkor, ha bármely az egyik egyenest metsző sík metszi a másik egyenest is.*

Bizonyítás.

a) Legyen adott két egymással párhuzamos egyenes e és g. Ekkor van egy olyan α sík, amely mindkét egyenest tartalmazza és fennáll $e \cap g = \emptyset$. Tegyük fel, hogy egy σ sík metszi az e egyenest egy P pontban. Azt akarjuk belátni, hogy σ metszi a g egyenest is.

Evidens, hogy α és σ különböző síkok, melyeknek a P egy közös pontja. Ily módon az α és σ síkok metszete egy egyenes, melyet most jelöljön m. Az m is benne van az α síkban és áthalad a P ponton. Ily módon az m–nek metszenie kell a g egyenest, mert ha m–nek nem lenne közös pontja g–vel, akkor ellentmondásba kerülnénk a párhuzamossági axiómával. Az m és g metszéspontja egyben közös pontja a σ síknak és g–nek. Ily módon azt kaptuk, hogy σ metszi a g egyenest.

b) Legyen adott két egyenes e és g, melyeknél bármely az egyik egyenest metsző sík metszi a másikat is.

Az e és g nem lehetnek kitérő helyzetűek, mert akkor az e egy P pontja és a g által meghatározott $\sigma = \langle g, P \rangle$ sík metszené e–t és tartalmazná g–t.

Az e és g nem lehetnek metszőek sem, mert két metsző egyeneshez mindig megadható egy olyan sík, amely metszi az egyik egyenest, de a másikat nem. Legyenek a, b metsző egyenesek. Vegyünk egy olyan P pontot, amely nincs benne a két egyenes síkjában. Ekkor a b egyenes és a P pont által meghatározott $\beta = \langle b, P \rangle$ sík metszi az a egyenest, de tartalmazza a b egyenest.

A fent leírtak alapján az e, g egyenesek csakis párhuzamosak lehetnek. □

A következő kijelentés azt mondja ki, hogy a párhuzamosság egy tranzitív kapcsolatot ad az egyenesek között.

1.2. Állítás. *Legyen adva a térben három egyenes e, g és h, ahol e párhuzamos a g egyenessel és g párhuzamos a h egyenessel. Ekkor az e, h egyenesek is párhuzamosak egymással.*

Bizonyítás.

Alkalmazzuk az előbbi 1.1. Állítást. Azt kapjuk, hogy bármely az e–t elmetsző sík metszi a g–t, továbbá metszi a g–vel párhuzamos h egyenest is. Ez pedig azt jelenti, hogy az e, h egyenesek párhuzamosak egymással. □

Annak érdekében, hogy az egyenesek halmazán a párhuzamosság alapján egy ekvivalenciarelációt nyerjünk, bevezetjük a következő fogalmat.

1.3. Definíció. Legyenek adva a g, h egyenesek. Ezekről azt mondjuk, hogy egyező állásúak, ha párhuzamosak egymással vagy fennáll $g = h$.

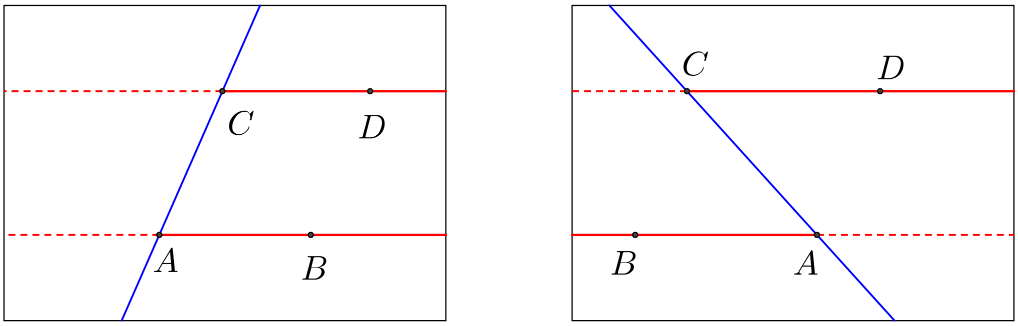
Ily módon az alábbi megállapítást tehetjük.

1.4. Következmény. *Az egyenesek halmazán az egyező állás alapján egy ekvivalenciarelációt kapunk.*

Megjegyzés. Világos, hogy igaz az alábbi kijelentés. *A centrális tükrözés bármely egyenest azzal egyező állású egyenesbe képez.*

Az alábbi definícióban megadjuk az egyező irányú félegyenesek fogalmát.

1.5. Definíció. Legyenek adva a térben az A, B és C, D pontok, amelyekre fennáll $A \neq B$ és $C \neq D$. Azt mondjuk, hogy az $[A,B\rangle$ és $[C,D\rangle$ félegyenesek egyező irányúak (vagy más szóval azonos irányúak), ha az alábbi két feltétel közül az egyik teljesül.
(1) Az egyik félegyenes tartalmazza a másikat.
(2) Az $\langle A,B\rangle$, $\langle C,D\rangle$ egyenesek párhuzamosak egymással és az $\langle A,C\rangle$ egyenes nem választja el a B, D pontokat.



1. ábra. *Egyező irányú és ellentétes irányú* $[A,B\rangle$, $[C,D\rangle$ *félegyenesek.*

Mivel az euklideszi geometriában érvényben van a párhuzamossági axióma, a fenti definícióból már egyből adódik, hogy igaz az alábbi kijeletés.

1.6. Állítás. *Legyen adva a térben egy* $[A,B\rangle$ *félegyenes és egy* C *pont. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan* C *kezdőpontú félegyenes, amely egyező irányú az* $[A,B\rangle$ *félegyenessel.*

Értelmezni lehet az ellentétes irányú félegyeneseket is.

1.7. Definíció. Legyenek adva a térben az A, B és C, D pontok, amelyekre fennáll $A \neq B$ és $C \neq D$. Azt mondjuk, hogy az $[A,B\rangle$ és $[C,D\rangle$ félegyenesek ellentétes irányúak, ha az alábbi két feltétel közül az egyik teljesül.
(1) A két félegyenes egyazon egyenesen van és egyik félegyenes sem tartalmazza a másikat.
(2) Az $\langle A,B\rangle$, $\langle C,D\rangle$ egyenesek párhuzamosak egymással és az $\langle A,C\rangle$ egyenes elválasztja a B, D pontokat.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a centrális tükrözés egy félegyenest azzal ellentétes irányú félegyenesbe képez.

Az eddigiek alapján igazolható, hogy amennyiben két félegyenes azonos irányú egy harmadik félegyenessel, akkor a két félegyenes egyező irányú. Ily módon az alábbi kijelentést tehetjük.

1.8. Következmény. *Az egyező irány szerinti reláció egy ekvivalenciarelációt ad a félegyenesek halmazán.*

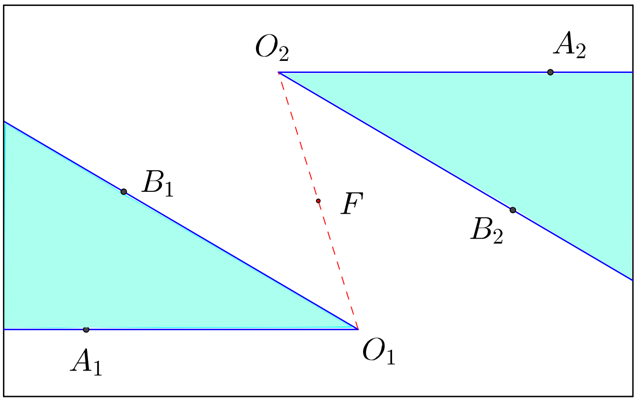
Mivel az egyező irány fogalma ekvivalenciarelációt eredményez, egy osztályozáshoz jutunk a tér félegyeneseinek halmazán. Mint ismeretes, ez annyit jelent, hogy a félegyenesek halmazát diszjunkt részhalmazokra (más szóval osztályokra) bontjuk, ahol egyazon osztályhoz az egymással egyező irányú félegyenesek tartoznak.

Ennyi előkészítés után már definiálni tudjuk, hogy mit értünk irányon az euklideszi térben.

1.9. Definíció. Irányon az egyező irányú félegyenesek egyik ekvivalenciaosztályát értjük.

Célszerűnek látszik itt bevezetni két fogalmat, amelyek a szögpárokra vonatkoznak.

1.10. Definíció. Legyenek adva az $A_1O_1B_1\sphericalangle$ és $A_2O_2B_2\sphericalangle$ konvex szögek. Ezekről azt mondjuk, hogy egyállású szögpárt képeznek, ha az $[O_1, A_1\rangle$ félegyenes egyező irányú az $[O_2, A_2\rangle$ szárral és az $[O_1, B_1\rangle$ félegyenes azonos irányú az $[O_2, B_2\rangle$ szárral. Amennyiben a $A_1O_1B_1\sphericalangle$ és $A_2O_2B_2\sphericalangle$ szögek megfelelő szárai ellentétes irányúak, akkor azt mondjuk, hogy $A_1O_1B_1\sphericalangle$ és $A_2O_2B_2\sphericalangle$ egy váltószögpárt alkotnak.



2. ábra. *Az $A_1O_1B_1\sphericalangle$ és $A_2O_2B_2\sphericalangle$ váltószögek.*

Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy amennyiben az $A_1O_1B_1\sphericalangle$ és $A_2O_2B_2\sphericalangle$ szögek váltószögpárt vagy egyállású szögpárt képeznek, akkor a két szög egybevágó. Ugyanis, váltószögpár esetén az $\overline{O_1O_2}$ szakasz F felezőpontjára való tükrözés a két szöget egymásba képezi. (Lásd a 2. ábrát.)

Amennyiben $A_1O_1B_1\sphericalangle$ és $A_2O_2B_2\sphericalangle$ egyállású szögpárt alkotnak, akkor az $\overline{O_1O_2}$ szakasz felezőpontjára és az O_2 pontra való tükrözések szorzata viszi az első szöget a másodikba.

Az egyenes irányítása és koordinátázása

Tekintsünk a térben egy egyenest, melyet jelöljön g. A g egyenesre eső két félegyenest egyező irányúnak mondunk, ha az egyik félegyenes tartalmazza a másikat. Az egyező irányúság a g–re eső félegyenesek halmazán egy ekvivalenciarelációt ad. Evidens, hogy ily módon a g egyenesen lévő félegyenesek két ekvivalenciaosztályt alkotnak.

1.11. Definíció. Egy g egyenes irányításán azt értjük, hogy kijelöljük a g által tartalmazott egyező irányú félegyenesek egyik ekvivalenciaosztályát.

Anennyiben egy félegyenes az irányítást képező osztályhoz tartozik, akkor arról azt mondjuk, hogy az egyenes irányítását reprezentálja (más szóval képviseli).

Megjegyzés. A fentiek alapján egy egyenesen két különböző irányítás adható meg.

Legyen adott egy g egyenes. Adjunk meg egy irányítást g–n, és válasszunk egy a g–re illeszkedő O pontot. A g–re eső, O kezdőpontú félegyenesek közül vegyük azt, amely a g irányítását képviseli. Legyen E egy további pontja ennek a félegyenesnek.

Tekintsük azt a $\xi : g \to \mathbb{R}$ leképezést, amelynél a g tetszőleges P pontján felvett $\xi(P)$ értéket az alábbi feltételek határozzák meg.
(1) Ha P rajta van az $[O, E\rangle$ félegyenesen, akkor $\xi(P) = d(O, P)$.
(2) Amennyiben P nincs rajta az $[O, E\rangle$ félegyenesen, akkor $\xi(P) = -d(O, P)$.

1.12. Definíció. A g egyenesnek a kijelölt irányításhoz és az O kezdőponthoz tartozó koordinátázásán a fentiekben leírt ξ bijektív leképezést értjük.

Megjegyzés. Legyenek A és B a g egyenes különböző pontjai. Könnyű belátni, hogy az $[A, B\rangle$ félegyenes akkor képviseli a g–n megadott irányítást, ha fennáll $\xi(B) - \xi(A) > 0$. Ezen kívül mindig igaz a $|\xi(B) - \xi(A)| = d(A, B)$ egyenlőség.

Az irányított szakaszok

1.13. Definíció. Legyenek adva a térben az A, B pontok. Tekintsük az A, B pontokkal határolt $\overline{AB}$ szakaszt. Az A kezdőpontú és B végpontú irányított szakaszon azt értjük, hogy az $\overline{AB}$ szakaszhoz még hozzárendeljük az $[A, B\rangle$ félegyenessel meghatározott irányt. Ezen irányított szakaszt $\overrightarrow{AB}$ jelöli.

1.14. Definíció. Legyenek adva a térben az A, B pontok. Az $\overrightarrow{AB}$ irányított szakasz hosszán az $\overline{AB}$ szakasz hosszát, vagyis az A, B pontok $d(A, B)$ távolságát értjük. Az $[A, B\rangle$ félegyenes által képviselt irányt mondjuk az $\overrightarrow{AB}$ irányított szakasz irányának.

Megjegyzés. A fenti definíció szerint egy szakaszból úgy kapunk irányított szakaszt, hogy kitüntetjük a két határpont egyik sorrendjét, vagyis az egyik határpontot kezdőpontnak a másik határpontot pedig végpontnak nevezzük, és ezáltal egy irányt rendelünk a szakaszhoz. Az irányt az a félegyenes adja, amely tartalmazza a szakaszt és amelynek kezdőpontja megegyezik a két határpont közül kijelölt kezdőponttal.

Világos, hogy az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BA}$ irányított szakaszok különbözőek, hiszen a hozzájuk tartozó irányok, melyeket az $[A, B\rangle$ és $[B, A\rangle$ félegyenes képviselnek, egymással ellentétesek.

1.15. Definíció. Legyenek adva olyan A, B, C, D pontok, ahol $A \neq B$ és $C \neq D$. Az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ irányított szakaszokat egymással egyenlőeknek mondjuk, ha az $[\,A, B\,\rangle$, $[\,C, D\,\rangle$ félegyenesek egyező irányúak és fennáll $AB = CD$.

Amennyiben az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ irányított szakaszok egyenlőek, akkor ezt az $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ kifejezéssel fogjuk jelölni.

Megjegyzés. A fenti definíció szerint két irányított szakasz akkor egyenlő egymással, ha a hosszuk és az irányuk megegyezik.

Megjegyzés. Tegyük fel, hogy az A, B, C, D pontok egyazon g egyenesre esnek. Vegyük a g egyenesnek egy ξ koordinátázását. Ez esetben az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ irányított szakaszok pontosan akkor egyenlőek, ha teljesül a $\xi(B) - \xi(A) = \xi(D) - \xi(C)$ egyenlőség.

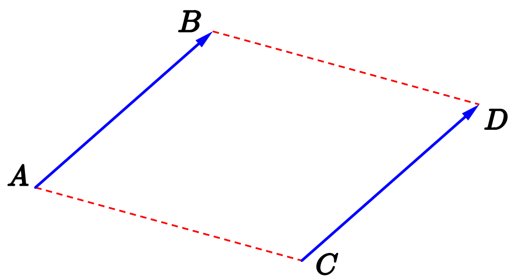
Két irányított szakasz egyenlőségével kapcsolatosan az alábbi kijelentést tehetjük.

1.16. Állítás. *Legyenek adva a térben az A, B, C, D különböző pontok. Az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ irányított szakaszok egyenlőek akkor és csak akkor, ha az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BD}$ irányított szakaszok egyenlőek egymással.*

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ irányított szakaszok egyenlőek.

Vegyük azt általános esetet, amikor az A, B, C, D pontok nincsenek egy egyenesen.



3. ábra. *Egyenlő irányított szakaszok.*

Ekkor az $\langle A, B\rangle$, $\langle C, D\rangle$ egyenesek párhuzamosak és fennáll $AB = CD$. Ismeretes, hogy ennek következtében az $ABDC$ négyszög egy parallelogramma. Ebből pedig már adódik, hogy az $[A, C\rangle$, $[B, D\rangle$ félegyenesek egyező irányúak és $AC = BD$ is teljesül. Ily módon azt kaptuk, hogy az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BD}$ irányított szakaszok egyenlőek.

Tekintsük most azt az esetet, amikor az A, B, C, D pontok egyazon egyenesre esnek. Jelöljük g–vel ezt az egyenest és vegyünk egy $\xi : g \to \mathbb{R}$ koordinátázást. Mivel igaz $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, fennáll $\xi(B) - \xi(A) = \xi(D) - \xi(C)$. Ebből átrendezéssel adódik a

$\xi(C) - \xi(A) = \xi(D) - \xi(B)$ összefüggés, ami azt jelenti, hogy az $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ irányított szakaszok egyenlőek. $\square$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ irányított szakaszok pontosan akkor egyenlőek, ha az $\overline{AD}$ és $\overline{BC}$ szakaszok felezőpontja megegyezik.

A fenti 1.15. Definíció alapján már könnyű belátni, hogy igaz az alábbi állítás.

1.17. Állítás. *Az irányított szakaszok halmazán értelmezett egyenlőség egy ekvivalencia-relációt ad.*

Bizonyítás.

Legyen adva három irányított szakasz $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{EF}$, melyeknél fennáll $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.

Ekkor az $AB = CD$ és $CD = EF$ egyenlőségek következtében igaz $AB = EF$. Mivel a $[C, D\rangle$ félegyenes egyező irányú az $[A, B\rangle$, $[E, F\rangle$ félegyenesekkel, azt kapjuk, hogy $[A, B\rangle$ és $[E, F\rangle$ azonos irányúak. Ez pedig azt jelenti, hogy $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{EF}$ egyenlőek. $\square$

A szabad vektor fogalma

A 1.15. Definícióban értelmezett egyenlőség alapján az irányított szakaszokat soroljuk ekvivalenciaosztályokba. Ez esetben tehát az egymással egyenlő irányított szakaszok képeznek egy–egy osztályt.

1.18. Definíció. Szabad vektoron az egymással egyenlő irányított szakaszok egyik ekvivalenciaosztályát értjük.

Az irányított szakaszoknak az egyenlőség szerinti ekvivalenciaosztályait a tér szabad vektorainak nevezzük.

Ebben a jegyzetben a szabad vektorokat félkövér latin betűkkel fogjuk jelölni (például $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$). Kézírás esetén aláhúzott latin kisbetűket szokás a szabad vektorok jelölésére használni (például $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$).

Amennyiben az $\mathbf{u}$ szabad vektornak (az irányított szakaszok egyik osztályának) eleme az $\overrightarrow{AB}$ irányított szakasz, akkor azt mondjuk, hogy $\overrightarrow{AB}$ az egyik reprezentánsa, vagy más szóval képviselője az $\mathbf{u}$–nak.

Fontos megjegyezni, hogy bármely $\mathbf{u}$ szabad vektorhoz végtelen sok reprezentáló irányított szakasz tartozik, vagy más szóval az $\mathbf{u}$–t végtelen sok irányított szakasz képviseli.

A továbbiakban az $\overrightarrow{AB}$ szimbólum az irányított szakasz mellett a reprezentált szabad vektort is jelölni fogja.

1.19. Definíció. Legyen adva egy $\mathbf{u}$ szabad vektor. Ennek hosszán (vagy más szóval a normáján) az $\mathbf{u}$–t reprezentáló irányított szakaszok közös hosszát értjük. Az $\mathbf{u}$ vektor irányán pedig az őt képviselő irányított szakaszok irányát értjük.

Egy $\mathbf{u}$ szabad vektor hosszát a továbbiakban az $\|\mathbf{u}\|$ szimbólum fogja jelölni. Azonban a szakirodalomban az $|\mathbf{u}|$ jelölést is szokás alkalmazni a vektor hosszára.

Megjegyzés. Világos, hogy a szabad vektort a hossza és az iránya már egyértelműen meghatározza.

Korábban már szó esett a pontszakaszokról. Amennyiben a szakasz két határpontja ugyanaz az A pont, akkor szakaszként az egyetlen pontból álló $\overline{AA} = \{A\}$ alakzatot kapjuk, és ezt neveztük el pontszakasznak. Állapodjunk meg abban, hogy a későbbiek során az $\overrightarrow{AA}$ szimbólum az $\overline{AA}$ pontszakaszt fogja jelenteni.

1.20. Definíció. A pontszakaszok osztályát nullvektornak mondjuk és $\mathbf{0}$–val jelöljük.

Megállapodás szerint a nullvektort is a szabad vektorok közé soroljuk. A $\mathbf{0}$ nullvektornak nincs iránya, a hossza pedig 0.

A definíciók alapján könnyű belátni, hogy igaz a következő kijelentés.

1.21. Állítás. *Legyen adott egy* $\mathbf{u}$ ($\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$) *szabad vektor és egy* A *pont. Ekkor pontosan egy olyan* B *pont található a térben, amelyre teljesül az, hogy az* $\overrightarrow{AB}$ *irányított szakasz egy reprezentánsa az* $\mathbf{u}$ *szabad vektornak.*

Bizonyítás.

A $\mathbf{u}$ vektort már egyértelműen meghatározza az iránya és a hossza. Ennek megfelelően tekintsük azt az A kezdőpontú félegyenest, amely az $\mathbf{u}$ vektor irányát képviseli (vagyis megfelel az $\mathbf{u}$ vektor irányának). Ezen félegyenesre az A pontból mérjük fel az $\mathbf{u}$ vektor $\|\mathbf{u}\|$ hosszát. A felméréssel kapott pont lesz az állításban szereplő B pont. $\square$.

Az összeadás művelete a szabad vektorok halmazán

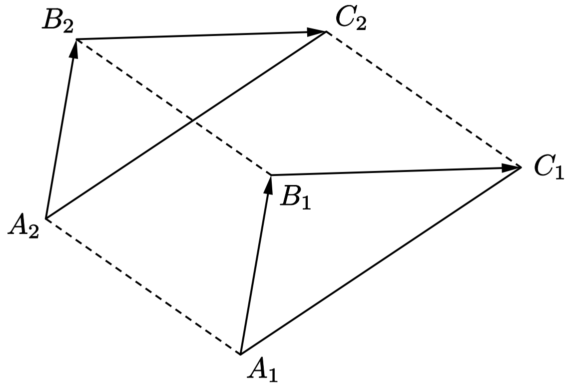
A tér összes szabad vektorának halmazát a továbbiakban $\mathcal{V}$ fogja jelölni. A szabad vektorokat a későbbiek során (a rövidség kedvéért) a tér vektorainak is mondjuk.

Ahhoz, hogy a reprezentáló irányított szakaszok alkalmazásával értelmezni tudjuk két szabad vektor összegét, szükségünk van az alábbi állításra.

1.22. Állítás. *Legyenek adva az A_1, B_1, C_1 és A_2, B_2, C_2 pontok. Ha fennáll $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$ és $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_2C_2}$, akkor igaz $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_2C_2}$.*

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy teljesül $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$ és $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_2C_2}$. Alkalmazzuk a 1.16. Állítást.



4. ábra. *Szemléltetés a 1.22. Állítás bizonyításához.*

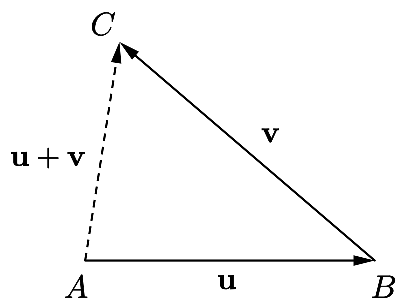
Azt kapjuk, hogy a feltevések alapján igaz $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_2}$ és $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{C_1C_2}$. Ebből viszont adódik az $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{C_1C_2}$ egyenlőség, ami annyit jelent, hogy fennáll $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_2C_2}$. $\square$

Az alábbi definícióban, amely két vektor összeadásáról szól, az 1.21. és 1.22. Állítások alkalmazására is szükség van.

1.23. Definíció. Legyen adott két szabad vektor $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$. Vegyünk a térben egy tetszőleges A pontot. Tekintsük az $\mathbf{u}$–t reprezentáló $\overrightarrow{AB}$ irányított szakaszt. Ezt követően vegyük azt a B kezdőpontú $\overrightarrow{BC}$ irányított szakaszt, amely a $\mathbf{v}$–t képviseli. Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ összegén az $\overrightarrow{AC}$ irányított szakasz által reprezentált szabad vektort értjük.

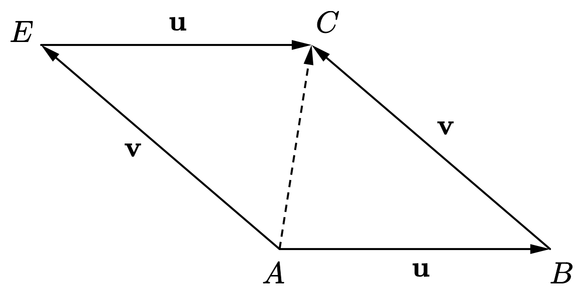
Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a 1.22. Állítás következtében az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok összege nem függ az A kezdőpont megválasztásától.

1.24. Tétel. *Legyenek $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ tetszőleges vektorok. Az összeadással kapcsolatban igazak az alábbi kijelentések.*
(1) A művelet asszociatív, azaz fennáll $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.
(2) A művelet kommutatív, vagyis igaz az $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$ *összefüggés.*
(3) A $\mathbf{0}$ *nullvektort véve teljesül* $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$.



5. ábra. *Két vektor összeadása.*

(4) Egyértelműen létezik egy olyan $-\mathbf{u}$*–val jelölt vektor, hogy fennáll* $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$.
Bizonyítás.
(1) Válasszunk a térben egy A pontot, mint kezdőpontot. Az $\mathbf{u}$ vektort reprezentálja az $\overrightarrow{AB}$ irányított szakasz, a $\mathbf{v}$ vektort képviselje a $\overrightarrow{BC}$ irányított szakasz, és végül a $\mathbf{w}$ vektort reprezentálja a $\overrightarrow{CD}$ irányított szakasz. Az összeadás definíciója alapján azt nyerjük, hogy ekkor az $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$ és $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ vektorokat egyaránt az $\overrightarrow{AD}$ irányított szakasz képviseli. Ennek következtében pedig fennáll $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.



6. ábra. *A vektorok összeadása egy kommutatív művelet.*

(2) Tekintsük azt az A kezdőpontú irányított szakaszt, amely a $\mathbf{v}$ vektort reprezentálja. Ennek a végpontját jelölje most E. Mivel fennáll az $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$ egyenlőség az 1.16. Állítás következtében $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EC}$ is teljesül, ami azt mutatja, hogy az $\overrightarrow{EC}$ irányított szakasz is az $\mathbf{u}$ vektort képviseli. Ily módon azt kapjuk, hogy az $\overrightarrow{AC}$ irányított szakasz egyaránt reprezentánsa az $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ vektornak és a $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ vektornak. Ez viszont azt jelenti, hogy az $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ és $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ vektorok egyenlőek.

Megjegyezzük még, hogy amennyiben az A, B, C pontok nincsenek egy egyenesen, akkor az $ABCE$ négyszög egy parallelogrammát ad.

(3) Mivel a $\mathbf{0}$ nullvektort a pontszakaszok reprezentálják, az $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ összefüggés teljesülése nyilvánvaló.

(4) Tekintsük a $\overrightarrow{BA}$ irányított szakasszal reprezentált vektort, melyet most jelöljön $-\mathbf{u}$. Az 1.23. Definíció alapján az $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})$ vektort az $\overline{AA}$ pontszakasz képviseli, és ebből már adódik, hogy $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$. $\square$

Megjegyzés. A fenti tétel alapján azt mondhatjuk, hogy az euklideszi tér szabad vektorainak $\mathcal{V}$ halmaza az összeadás művelettel ellátva egy kommutatív csoportot képez.

Megjegyzés. A továbbiakban egy $\mathbf{v}$ vektor esetében $-\mathbf{v}$ fogja jelölni azt a vektort, amelyre igaz az, hogy amennyiben a $\mathbf{v}$–hez hozzáadjuk, akkor összegként a $\mathbf{0}$ nullvektort kapjuk. Nyilvánvaló, hogy amennyiben a $\overrightarrow{BC}$ irányított szakasz reprezentálja a $\mathbf{v}$ vektort, akkor $\overrightarrow{CB}$ a $-\mathbf{v}$ vektort képviseli.

1.25. Definíció Legyen adott két szabad vektor $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$. A $\mathbf{v}$ vektornak az $\mathbf{u}$ vektorból történő *kivonásán* az értjük, hogy az $\mathbf{u}$–hoz hozzáadjuk a $-\mathbf{v}$ vektort.

Ezt követően az $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$ szabad vektort az $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ kifejezéssel fogjuk jelölni.

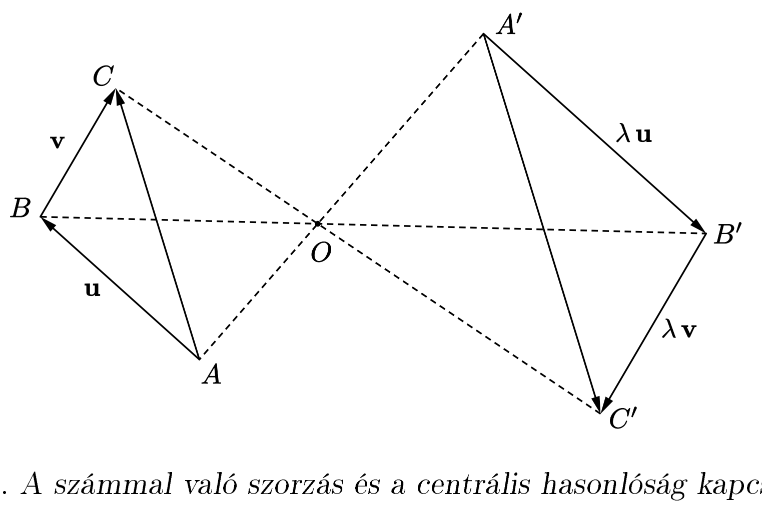
Szabad vektor szorzása valós számmal

A vektor skalárral való szorzásának definiálásához szükségünk lesz a vektor irányának és hosszának fogalmára.
Emlékezzünk rá, hogy az $\overrightarrow{AB}$ $(A \neq B)$ irányított szakasszal reprezentált $\mathbf{u}$ vektor irányán az $[A, B\rangle$ félegyenes által meghatározott irányt értjük. Az $\mathbf{u}$ vektor $\|\mathbf{u}\|$ hossza pedig egyenlő az AB szakaszhosszal.

1.26. Definíció. Legyen adott egy λ valós szám és egy $\mathbf{u}$ szabad vektor.
Ha fennáll $\lambda = 0$ vagy $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, akkor a $\lambda\mathbf{u}$ szorzaton a $\mathbf{0}$ nullvektort értjük.

Amennyiben $\lambda \neq 0$ és $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, akkor az $\mathbf{u}$ vektornak a λ valós számmal vett szorzatán azt a $\lambda\mathbf{u}$ által jelölt vektort értjük, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:
(1) A $\lambda\mathbf{u}$ vektor hosszára igaz $\|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{u}\|$.
(2) Az $\mathbf{u}$, $\lambda\mathbf{u}$ vektorok iránya $\lambda > 0$ esetén megegyezik, $\lambda < 0$ esetén pedig ellentétes.

Megjegyzés. Tekintsünk egy $\overrightarrow{AB}$ irányított szakaszt, amely az $\mathbf{u}$ vektort képviseli. Vegyünk egy κ középpontos hasonlóságot, amelynek centruma az O pont és előjeles aránya a λ $(\lambda \neq 0)$ szám. Az A, B pontoknak a κ szerinti képei legyenek $A' = \kappa(A)$ és $B' = \kappa(B)$. Felhasználva a centrális hasonlóság tulajdonságait könnyű belátni, hogy ekkor az $\overrightarrow{A'B'}$ irányított szakasz a $\lambda\mathbf{u}$ vektort reprezentálja.



7. ábra. *A számmal való szorzás és a centrális hasonlóság kapcsolata.*

1.27. Tétel. *A vektor skalárral történő szorzására vonatkozóan tetszőleges* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *vektorok és* λ, μ *valós számok esetén teljesülnek az alábbi összefüggések:*
(1) $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$; *(2)* $(\lambda+\mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$;
(3) $(\lambda\mu)\mathbf{u} = \lambda(\mu\mathbf{u})$; *(4)* $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Bizonyítás.
(1) Elegendő azt az esetet vizsgálni, amikor $\lambda \neq 0$. Vegyünk egy az $\mathbf{u}$ vektort reprezentáló $\overrightarrow{AB}$ irányított szakaszt. A $\mathbf{v}$ vektort képviselő és B kezdőpontú irányított szakasz végpontja legyen C. Mint ismeretes, az $\overrightarrow{AC}$ irányított szakasz az $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ vektornak felel meg.

Tekintsünk egy κ középpontos hasonlóságot, amelynek előjeles aránya λ. Vegyük az $A' = \kappa(A)$, $B' = \kappa(B)$ és $C' = \kappa(C)$ képpontokat. (Lásd a 7. ábrát.) Az előző megjegyzés alapján ekkor fennáll $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\mathbf{u}$, $\overrightarrow{B'C'} = \lambda\mathbf{v}$ és $\overrightarrow{A'C'} = \lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})$. Az $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'}$ egyenlőség pedig azt jelenti, hogy teljesül $\lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})$.

(2) A definíciók alkalmazásával belátható, hogy a $(\lambda+\mu)\mathbf{u}$, $\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{u}$ vektorok iránya és hossza akkor is megegyezik, amikor a λ, μ számok előjele ellentétes.

A (3) és (4) egyenlőségek teljesülése nyilvánvaló. □

1.28. Definíció. Egységvektoron egy olyan szabad vektort értünk, amelynek hossza 1.

Megjegyzés. A vektor számmal való szorzása kapcsán vegyük észre, hogy bármely λ szám és $\mathbf{u}$ vektor esetében igaz $(-\lambda)\mathbf{u} = -(\lambda\mathbf{u})$. Speciálisan, teljesül a $(-1)\,\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ egyenlőség.

Amennyiben fennáll $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, akkor az $\mathbf{u}^0 = \dfrac{1}{\|\mathbf{u}\|}\,\mathbf{u}$ adja azt az egységvektort, amely azonos irányú az $\mathbf{u}$ vektorral.

Algebrai tanulmányai során az olvasó már megismerte (vagy meg fogja ismerni) a számtest feletti vektortér fogalmát. Az 1.24. és 1.27. Tételek ismeretében az alábbi kijelentést tehetjük.

1.29. Következmény. *A szabad vektorok* $\mathcal{V}$ *halmaza egy vektorteret képez az* $\mathbb{R}$ *valós számtest felett.*

A továbbiakban még kitérünk azon egyszerű kérdés tárgyalására, hogy egy adott vektor mikor áll elő egy másik vektor számszorosaként.

1.30. Definíció. Legyen adva két vektor, amelyek különböznek $\mathbf{0}$–tól. Ezeket egymással párhuzamosnak mondjuk, ha az őket reprezentáló irányított szakaszok egyenesei párhuzamosak egymással.

1.31. Állítás. *Legyenek adva az* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *vektorok, melyekre igaz* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ *és* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. *Ez esetben a* $\mathbf{v}$ *vektor előáll az* $\mathbf{u}$ *egy számszorosaként akkor és csak akkor, ha* $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *párhuzamosak egymással.*

Bizonyítás.
Tegyük fel, hogy $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *párhuzamosak.*

Vegyünk egy az $\mathbf{u}$–t reprezentáló $\overrightarrow{AB}$ irányított szakaszt és az azt tartalmazó $g = \langle A, B\rangle$ egyenest. Tekintsük azt a $\mathbf{v}$–t képviselő irányított szakaszt, amelynek kezdőpontja szintén A. Jelölje C ennek az irányított szakasznak a végpontját. Evidens, hogy a párhuzamosság miatt a C pont is rajta van a g egyenesen.

Amennyiben az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok iránya megegyezik, akkor azt kapjuk, hogy fennáll $\overrightarrow{AC} = \dfrac{AC}{AB}\overrightarrow{AB}$. Ez pedig egyenértékű a $\mathbf{v} = \dfrac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}$ egyenlőséggel.

Ha pedig $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ iránya ellentétes, akkor az $\overrightarrow{AC} = -\dfrac{AC}{AB}\overrightarrow{AB}$ összefüggés adódik, ami azt jelenti, hogy fennáll $\mathbf{v} = -\dfrac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}$.

Amennyiben valamely λ számmal $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$ teljesül, akkor triviális, hogy az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorok párhuzamosak. $\square$

Vektorok lineáris kombinációja

A továbbiakban a vektorokkal kapcsolatos olyan fogalmakat adunk meg, amelyek az lineáris algebrában is fontos szerepet játszanak.

1.32. Definíció. Legyenek adva az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ $(n \geq 1)$ vektorok és a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ valós számok. Az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ vektoroknak a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal vett lineáris kombinációján a $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n$ vektort értjük.

Megjegyzés. A fenti definícióban szereplő lineáris kombinációt a tömörebb $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathbf{u}_i$ kifejezéssel is le lehet írni. A $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ számokat a lineáris kombináció együtthatóinak mondjuk.

1.33. Definíció. Legyenek adva az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ $(n \geq 1)$ vektorok. Ezekről azt mondjuk, hogy lineárisan függetlenek, ha velük a $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ egyenlőség csak abban az esetben áll fenn, ha az összes λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ együttható értéke 0.

1.34. Definíció. Az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ $(n \geq 1)$ vektorokat lineárisan összefüggőeknek nevezzük, ha léteznek olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ számok, amelyek között van 0–tól különböző és fennáll $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$.

A vektorok lineáris összefüggőségére ad meg egy szükséges és elégséges feltételt az alábbi állítás.

1.35. Állítás. *Legyenek adva az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ $(n \geq 2)$ vektorok. Ezek lineárisan összefüggőek akkor és csak akkor, ha közülük az egyik előáll a többi vektor egy lineáris kombinációjaként.*

Bizonyítás.

(1) Tegyük fel, hogy az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ $(n \geq 2)$ vektorok lineárisan összefüggőek.

Legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ olyan valós számok, amelyek között van 0–tól különböző és fennáll $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$. Az általánosság elvét nem sértjük azzal, ha feltesszük, hogy jelen esetben ez az együttható λ_n. Az egyenlőség átrendezésével adódik, hogy igaz

$$\lambda_n\mathbf{u}_n = -\lambda_1\mathbf{u}_1 - \ldots - \lambda_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}.$$

Ha a fenti egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk az $\dfrac{1}{\lambda_n}$ számmal, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{u}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\mathbf{u}_1 - \ldots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\mathbf{u}_{n-1}$$

teljesül, azaz az $\mathbf{u}_n$ vektor előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.

(2) Induljunk most ki abból a feltevésből, hogy az egyik vektor előáll a többi vektor egy lineáris kombinációjaként.

Amennyiben például az $\mathbf{u}_n$ vektor kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként, akkor vegyük azokat a $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ számokat, melyekre igaz

$$\mathbf{u}_n = \mu_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \mu_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} .$$

Ebből egyszerű átrendezéssel kapjuk a

$$\mu_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \mu_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + (-1) \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

összefüggést. A fenti egyenlet bal oldalán lévő lineáris kombinációban az $\mathbf{u}_n$ vektor együtthatója -1, tehát különbüzik 0–tól. Ez pedig azt jelenti, hogy az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ vektorok lineárisan összefüggőek. □

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a $\mathbf{0}$ nullvektort az összes vektorral párhuzamosnak tekintjük. Az előbbi két állítás következtében igaz az alábbi kijelentés.

1.36. Következmény. *Két vektor lineárisan összefüggő akkor és csak akkor, ha párhuzamosak egymással.*

1.37. Definíció. Egy $\mathbf{u}$ vektorról azt mondjuk, hogy párhuzamos egy σ síkkal ha az $\mathbf{u}$–t reprezentáló irányított szakaszok egyenesei párhuzamosak σ–val.

Állapodjunk meg abban, hogy a $\mathbf{0}$ nullvektort az összes síkkal párhuzamosnak tekintjük. Három vektor esetében az alábbi kijelentés alapján el lehet dönteni, hogy az általuk alkotott vektorrendszer lineárisan összefüggő–e vagy sem.

1.38. Állítás. *Három vektor lineárisan összefüggő akkor és csak akkor, ha van olyan sík, amellyel mindhárom vektor párhuzamos.*

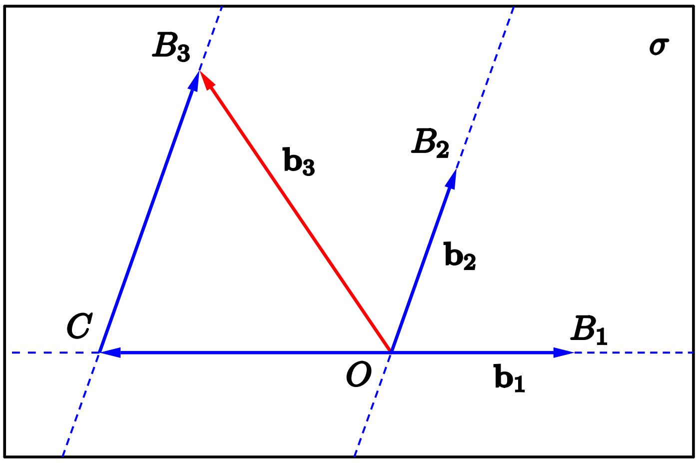
Bizonyítás.

(1) Legyenek $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ *és* $\mathbf{b}_3$ *olyan vektorok, amelyek egyaránt párhuzamosak egy* σ *síkkal.*

Amennyiben $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ párhuzamosak egymással, akkor evidens, hogy a három vektor lineárisan összefüggő.

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ nem párhuzamosak.

Vegyünk a σ síkban egy O pontot. A $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ vektorokat reprezentáló O kezdőpontú irányított szakaszok legyenek $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OB_2}$ és $\overrightarrow{OB_3}$. Evidens, hogy a B_1, B_2, B_3 pontok is benne vannak a σ síkban. A B_3 ponton átmenő és az $\langle O, B_2\rangle$ egyenessel párhuzamos egyenes metssze el az $\langle O, B_1\rangle$ egyenest a C pontban. Ekkor fennáll az $\overrightarrow{OB_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB_3}$ egyenlőség.



8. ábra. *Szemléltető ábra az 1.38. Állítás bizonyításához.*

Vegyük észre, hogy $\overrightarrow{OC}$ párhuzamos a $\mathbf{b}_1$ vektorral és $\overrightarrow{CB_3}$ párhuzamos a $\mathbf{b}_2$ vektorral. Ennek következtében vannak olyan λ_1, λ_2 számok, melyekkel teljesül $\overrightarrow{OC} = \lambda_1\,\mathbf{b}_1$ és $\overrightarrow{CB_3} = \lambda_2\,\mathbf{b}_2$. Ily módon azt kapjuk, hogy fennáll $\mathbf{b}_3 = \lambda_1\,\mathbf{b}_1 + \lambda_2\,\mathbf{b}_2$. Mivel $\mathbf{b}_3$ előáll a $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ vektorok egy lineáris kombinációjaként, a 1.35. Állítás következtében a három vektor lineárisan összefüggő.

(2) Az eddigi eredmények alapján azt könnyű belátni, hogy ha három vektor lineárisan összefüggő, akkor van olyan sík, amely mindhárom vektorral párhuzamos. $\square$

Vektor adott bázisra vonatkozó koordinátái

Az 1.38 Állítás következtében igaz az alábbi kijelentés.

1.39. Következmény. *Három vektor egy lineárisan független vektorrendszert alkot akkor és csak akkor, ha nincs olyan sík, amellyel mindhárom vektor párhuzamos.*

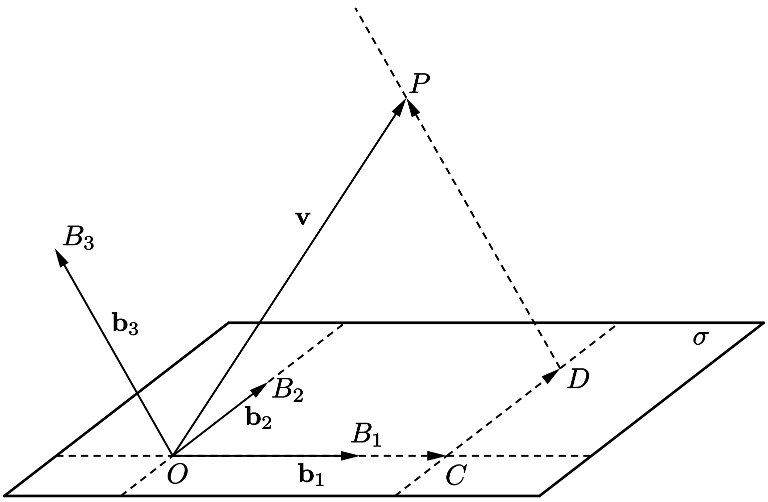
Fontos lesz számunkra a következő tétel.

1.40. Tétel. *Legyenek adva olyan* $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ *és* $\mathbf{b}_3$ *vektorok, amelyek linárisan függetlenek. Ekkor tetszőleges* $\mathbf{v}$ *vektor egyértelműen áll elő a* $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ *és* $\mathbf{b}_3$ *vektorok lineáris kombinációjaként.*

Bizonyítás.

A lineáris kombinációs kifejezés létezésének igazolása.

Válasszunk ki egy $\mathbf{v}$ szabad vektort. Rögzítsünk a térben egy O pontot. Tekintsük a $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ és $\mathbf{v}$ vektorokat képviselő azon irányított szakaszokat, melyeknél O a kezdőpont. Legyenek ezek $\overrightarrow{OB_1} = \mathbf{b}_1$, $\overrightarrow{OB_2} = \mathbf{b}_2$, $\overrightarrow{OB_3} = \mathbf{b}_3$ és $\overrightarrow{OP} = \mathbf{v}$.



9. ábra. *Illusztráció a 4.3. Tétel bizonyításához.*

Jelölje σ az O, B_1, B_2 pontokat tartalmazó síkot. A P ponton átmenő és az $\langle O, B_3\rangle$ egyenessel párhuzamos egyenes messe el a σ síkot a D pontban. Ezt követően vegyük a D ponton átmenő és az $\langle O, B_2\rangle$ egyenessel párhuzamos egyenest. Ennek az $\langle O, B_1\rangle$ egyenessel vett metszéspontja legyen C. Ezek alapján fennáll az

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DP}$$

egyenlőség. Vegyük észre, hogy $\overrightarrow{OC}$ párhuzamos a $\mathbf{b}_1$ vektorral, $\overrightarrow{CD}$ párhuzamos a $\mathbf{b}_2$ vektorral és $\overrightarrow{DP}$ párhuzamos a $\mathbf{b}_3$ vektorral. Ennek következtében vannak olyan v_1, v_2, v_3 számok, melyekkel teljesül $\overrightarrow{OC} = v_1\,\mathbf{b}_1$, $\overrightarrow{CD} = v_2\,\mathbf{b}_2$ és $\overrightarrow{DP} = v_3\,\mathbf{b}_3$. A fentiek alapján azt kapjuk, hogy igaz a

$$\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{b}_1 + v_2\,\mathbf{b}_2 + v_3\,\mathbf{b}_3$$

egyenlőség, vagyis a $\mathbf{v}$ vektor előáll a $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ vektorok egy lineáris kombinációjaként.

A lineáris kombinációs kifejezés egyértelműségének igazolása.
Legyenek $\lambda_1,\ \lambda_2$ és λ_3 olyan együtthatók, amelyekkel vett lineáris kombináció szintén a $\mathbf{v}$ vektort adja, azaz fennáll

$$\mathbf{v} = \lambda_1\,\mathbf{b}_1 + \lambda_2\,\mathbf{b}_2 + \lambda_3\,\mathbf{b}_3\,.$$

Eszerint teljesül

$$v_1\,\mathbf{b}_1 + v_2\,\mathbf{b}_2 + v_3\,\mathbf{b}_3 = \lambda_1\,\mathbf{b}_1 + \lambda_2\,\mathbf{b}_2 + \lambda_3\,\mathbf{b}_3\,.$$

A fenti egyenlet átrendezésével azt kapjuk, hogy

$$(v_1 - \lambda_1)\,\mathbf{b}_1 + (v_2 - \lambda_2)\,\mathbf{b}_2 + (v_3 - \lambda_3)\,\mathbf{b}_3 = \mathbf{0}.$$

Mivel a $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3$ vektorok linárisan függetlenek, a fenti egyenlet bal oldalán szereplő együtthatókra igaz $v_i - \lambda_i = 0$ $(i = 1,\,2,\,3)$. Ez pedig azt jelenti, hogy fennáll
$v_1 = \lambda_1,\ v_2 = \lambda_2$ és $v_3 = \lambda_3$, tehát a $\mathbf{v}$ vektor csak egyféleképpen áll elő a $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3$ vektorok lináris kombinációjaként. $\Box$

Megjegyzés. A fenti tételből adódik, hogy négy vektor már minden esetben egy lineárisan összefüggő vektorrendszert képez. Ily módon az euklideszi tér szabad vektorainak $\mathcal{V}$ terében a lineárisan független vektorrendszerek maximális elemszáma 3. Enek alapján azt mondhatjuk, hogy $\mathcal{V}$ egy 3–dimenziós vektortér.

4.41. Definíció. Amennyiben a $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor azt mondjuk, hogy azok a $\mathcal{V}$ vektortér egy bázisát képezik.

Megjegyzés. A fentiek szerint $\mathcal{V}$–beli bázison egy olyan vektorhármast értünk, amelynek elemei egy lineárisan független vektorrendszert alkotnak. Vegyük észre, hogy a bázis esetében ki van tüntetve a három vektor egy sorrendje.

A bázist képező vektorokat alapvektoroknak is szokás nevezni.

1.42. Definíció. Legyen adva a szabad vektorok $\mathcal{V}$ terének egy $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3$ bázisa. Vegyünk egy tetszőleges $\mathbf{v}$ vektort és fejezzük azt ki a bázisvektorok lineáris kombinációjaként a $\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + v_3\mathbf{b}_3$ alakban. Az ebben szereplő $v_1,\ v_2,\ v_3$ valós számokat a $\mathbf{v}$ vektor adott bázisra vonatkozó koordinátáinak mondjuk.

Megjegyzés. A vektor koordinátáit számhármasként szokás feltüntetni, Amennyiben a $\mathcal{V}$–beli bázis rögzített, akkor $\mathbf{v}\,(v_1, v_2, v_3)$ kifejezés formájában szokás megadni a $\mathbf{v}$ vektor koordináta–hármasát.

Evidens, hogy amennyiben veszünk egy λ számot, akkor a $\lambda\mathbf{v}$ vektorhoz tartozó koordináta–hármas $(\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$ lesz.

Tekintsünk egy további $\mathbf{w}$ vektort, amelynek koordinátái (w_1, w_2, w_3). Egyszerűen adódik, hogy ekkor $(v_1{+}w_1, v_2{+}w_2, v_3{+}w_3)$ megegyezik a $\mathbf{v}{+}\mathbf{w}$ koordináta–hármasával.

Két vektor hajlásszöge

Kézenfekvő, hogy miként értelmezzük két vektor hajlásszögét.
1.43. Definíció. Legyen adott két vektor $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$, amelyek $\mathbf{0}$–tól kűlönbözőek. Tekintsünk a térben egy O pontot és vegyük az $\mathbf{u},\ \mathbf{v}$ vektorokat reprezentáló $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ irányított

szakaszokat ($\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$). Az $AOB\sphericalangle$ konvex szög mértékét mondjuk az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorok hajlásszögének.

Amennyiben az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok hajlásszöge derékszög, akkor azt mondjuk, hogy a két vektor merőleges egymásra.

1.44. Definíció. A szabad vektorok $\mathcal{V}$ terének egy $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ bázisát ortonormáltnak nevezzük, ha a $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ vektorok páronként merőlegesek egymásra és a hosszuk 1.

A későbbiek során majd látni fogjuk, hogy az ortonormált bázis alkalmazásának komoly előnyei vannak. Vegyük észre, hogy ez esetben egy $\mathbf{v}\,(v_1, v_2, v_3)$ vektor hosszát ki lehet számítani a $\mathbf{v}$ koordinátáiból. Ugyanis, a Pitagorasz–tétel alapján be lehet látni, hogy $\mathbf{v}$ hosszára fennáll a $\|\mathbf{v}\|^2 = (v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2$ összefüggés.

A helyvektor fogalma

1.45. Definíció. Legyen adva a térben egy O pont. Egy tetszőleges P pont O–ra vonatkozó helyvektorán az $\overrightarrow{OP}$ irányított szakasz által képviselt szabad vektort értjük.

Az alábbi kézenfekvő állítás arra mutat rá, hogy a helyvektorok által egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést lehet létrehozni a tér pontjai és a szabad vektorok tere között.

1.46. Állítás. *Rögzítsünk a térben egy O pontot. Ekkor az $\omega(P) = \overrightarrow{OP}$ $(P \in X)$ formulával értelmezett $\omega : X \to \mathcal{V}$ leképezés bijektív.*

Az következő állításban szereplő összefüggést gyakran szokták alkalmazni különféle geometriai feladatok megoldásához.

1.47. Állítás. *Legyen adva egy O pont, egy $\overline{AB}$ szakasz és valamely α, β pozitív számok. Tekintsük az $\overline{AB}$ szakasz azon P pontját, amelyre igaz $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Ekkor a P pont helyvektorára fennáll*

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{OA} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{OB}\,.$$

Bizonyítás.
Célszerűnek tűnik, hogy a helyvektorokra bevezessük az $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ és $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$ jelöléseket. Az $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ egyenlőségből adódik, hogy igaz $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Vegyük észre, hogy $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ következtében teljesül $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AP}{AP+BP} = \dfrac{\frac{AP}{BP}}{\frac{AP}{BP}+1} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Ebből viszont az következik, hogy igaz $\overrightarrow{AP} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{AB}$.

Végül alkalmazzuk az $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ egyenlőséget. Eszerint teljesül

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \Big(1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\Big)\,\mathbf{a} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\mathbf{b}\,.$$

Ily módon azt kapjuk, hogy fennáll

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\alpha+\beta}\,\big(\beta\,\mathbf{a} + \alpha\,\mathbf{b}\big)\,.\ \square$$

Megjegyzés. Amennyiben az F pont felezőpontja az $\overline{AB}$ szakasznak, akkor az F helyvektorára igaz $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

A tér eltolása egy adott vektorral

Az első fejezetben a centrális tükrözés és a síkra történő tükrözés szerepeltek példaként a tér egybevágósági transzformációira. A vektor fogalmának bevezetése miatt az egybevágóságok egy további típusát tudjuk értelmezni, nevezetesen az eltolást.

1.48. Definíció. Legyen adva egy $\mathbf{u}$ vektor. A térnek az $\mathbf{u}$ vektorral való eltolásán azt az $\varepsilon : X \to X$ leképezést értjük, ahol tetszőleges P pont $P' = \varepsilon(P)$ képére fennáll $\overrightarrow{PP'} = \mathbf{u}$.

1.49. Állítás. *Az eltolás egy egybevágósági transzformáció.*

Bizonyítás.

Legyen az $\varepsilon : X \to X$ eltolás vektora $\mathbf{u}$. Vegyünk a térben két pontot A–t és B–t, továbbá azok $A' = \varepsilon(A)$, $B' = \varepsilon(B)$ képeit. Ekkor az $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{u}$ és $\overrightarrow{BB'} = \mathbf{u}$ egyenlőségek következtében az $\overrightarrow{AA'}$ és $\overrightarrow{BB'}$ irányított szakaszok egyenlőek. A 1.16. Állítást alkalmazva azt kapjuk, hogy fennáll $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, amiből már adódik $AB = A'B'$ teljesülése. Ezek szerint az ε eltolás megőrzi a pontok távolságát, ami azt jelenti, hogy ε egy egybevágósági transzformáció. $\square$

2) A tér vektorainak skaláris és vektoriális szorzata

Az analitikus geometriában fontos szerepet játszanak a szögfüggvények. A szögfüggvények értelmezéséhez szükségünk van a síkbeli elforgatás fogalmára. Ahhoz pedig, hogy definiálni tudjuk a síkbeli elforgatást (egy adott pont körül, adott szöggel), a síkot előbb irányítani kell. Ebben a fejezetben a síkot a szemlélet felhasználásával fogjuk irányítani oly módon, hogy a síkbeli zászlókat két osztályba soroljuk. A szögfüggvények tárgyalása után bevezetjük két vektor skaláris szorzatának a fogalmát.

A tér irányítását is a szemlélet segítségével fogjuk elvégezni. A jobbkéz módszerével a térbeli zászlókat soroljuk majd két osztályba. Ennek alapján definiálni lehet, hogy három lineárisan független vektor mikor képez jobbrendszert, illetőleg balrendszert. Ezt követően már módunk lesz arra, hogy értelmezzük két vektor vektoriális szorzatát is.

A sík irányítása

Korábbi tanulmányokban már szerepeltek a síkbeli és a térbeli zászlók. Idézzük fel a síkbeli zászló fogalmát.

2.1. Definíció. Síkbeli zászlón egy félegyenesből és egy félsíkból álló olyan alakzatpárt értünk, ahol a félsík határegyenese tartalmazza a félegyenest.

Megjegyzés. A félegyenest a zászló rúdjának, a félsíkot pedig a zászló lapjának szokás nevezni. A lapot tartalmazó síkot a zászló síkjának mondjuk.

Legyenek adva az A, B, C nem kollineáris pontok. Ezen ponthármasnak egyértelműen meg lehet feleltetni egy síkbeli zászlót.

Vegyük az $e = \langle A, B\rangle$ egyenest. A ponthármashoz rendeljük hozzá az $[A, B\rangle$ félegyenes és az $[e, C\rangle$ félsík által alkotott zászlót. Állapodjunk meg abban, hogy ezt a síkbeli zászlót a későbbiek során $\mathcal{Z}(A, B, C)$ fogja jelölni. Célszerű megjegyeznünk, hogy a jelölési megállapodás szerint fennáll $\mathcal{Z}(A, B, C) = ([A, B\rangle,\ [e, C\rangle)$.

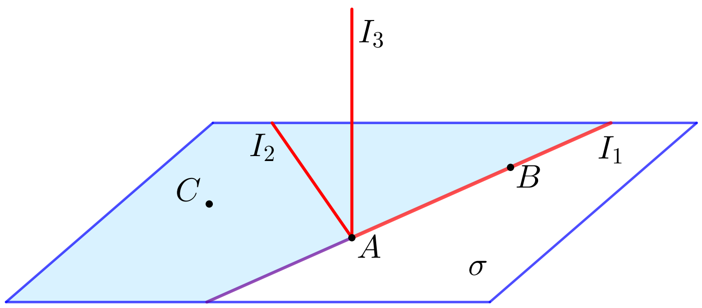
A síkot és később a teret a szemlélet alapján, konkrétan a jobbkéz módszerével, fogjuk irányítani.

Három olyan térbeli irányt, amelyek közül bármely két irány merőleges egymásra, egy ortogonális irányhármasnak mondunk. Egy ilyen ortogonális irányhármasnál azt is feltesszük, hogy ki van tüntetve az irányok egy sorrendje, azaz van közöttük első, második és harmadik irány.

Ha az egyik kezünk hüvelykujját, mutatóujját és középső ujját kifeszítjük, akkor azokkal a térben három olyan irányt tudunk kijelölni, amelyek páronként merőlegesek egymásra. Ez esetben azt mondjuk, hogy kezünkkel egy ortogonális irányhármast adunk meg. Azonban bármely ortogonális irányhármasra igaz, hogy azt vagy csak a jobbkézzel vagy pedig csak a balkézzel lehet megadni. Ily módon beszélhetünk jobbkezes és balkezes ortogonális irányhármasról.

Tekintsünk egy σ síkot. Két olyan féltér van, amelyet a σ sík határol. Jelöljük ki az egyik σ által határolt félteret és nevezzük ezt el a *pozitív féltérnek*. A jobbkéz módszerével a σ–beli zászlókat két osztályba soroljuk az alábbiak szerint.

Vegyünk egy olyan síkbeli zászlót, amelyet a σ sík tartalmaz. Jobbkezünk hüvelykujja mutasson a zászló rúdjának irányába, a mutatóujj legyen a σ síkban és mutasson a zászló



10. ábra. *A $\mathcal{Z}(A,B,C)$ zászlóhoz rendelt jobbkezes iránymármas.*

lapjának oldalára. Ha ebben a helyzetben a középső ujj a kijelölt pozitív féltérbe mutat, akkor azt mondjuk, hogy az adott zászló az első osztályhoz tartozik.

Ellenkező esetben pedig azt mondjuk, hogy az adott zászló a síkbeli zászlók második osztályához tartozik.

A σ sík irányításán azt értjük, hogy a jobbkéz módszerével a σ–beli zászlókat két osztályba soroljuk és kitüntetjük közülük az első osztályt.

Az irányított szög előjeles mértéke

Állapodjunk meg abban, hogy ebben a fejezetben a szögtartományokat ívmértékben mérjük. Vezessük most be az irányított szög fogalmát.

2.2. Definíció. Legyen adott egy $AOB\sphericalangle$ konvex szögtartomány. Ha az $AOB\sphericalangle$ szöghöz hozzárendeljük az $[O,A\rangle$, $[O,B\rangle$ szárak egyik sorrendjét oly módon, hogy az egyiket kezdőszárnak, a másikat pedig végszárnak nevezzük, akkor egy irányított szöghöz jutunk.

Irányított szögnél az $AOB\sphericalangle$ jelölés utal arra, hogy $[O,A\rangle$ a kezdőszár és $[O,B\rangle$ a végszár.

Az irányított síkban lévő irányított szög esetében a mértéknek előjelet adunk.

2.3. Definíció. Az irányított σ síkban legyen adott egy $AOB\sphericalangle$ konvex szögtartomány, melynek mértéke α $(0<\alpha<\pi)$. Az $AOB\sphericalangle$ irányított szög előjeles mértékén az α pozitív számot értjük abban az esetben, amikor a $\mathcal{Z}(O,A,B)$ síkbeli zászló az első osztályhoz tartozik. Amennyiben a $\mathcal{Z}(O,A,B)$ síkbeli zászló a második osztályhoz tartozik, akkor az $AOB\sphericalangle$ irányított szög előjeles mértékén a $-\alpha$ negatív számot értjük.

Megjegyzés. Legyenek O, A, B olyan pontok az irányított σ síkban, amelyek nincsenek egy egyenesen. Vegyük észre, hogy a $\mathcal{Z}(O,A,B)$ és $\mathcal{Z}(O,B,A)$ síkbeli zászlók más–más osztályhoz tartoznak. Ennek következtében ha az $AOB\sphericalangle$ irányított szög előjeles mértéke az α szám, akkor $-\alpha$ lesz a $BOA\sphericalangle$ irányított szög előjeles mértéke.

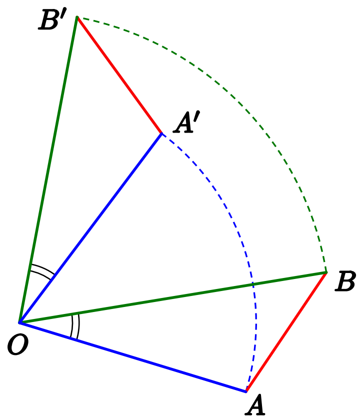
A síkbeli elforgatás

2.4. Definíció. Legyen adott egy irányított σ sík, abban egy O pont és egy α előjeles szögmérték, amelyre igaz $-\pi < \alpha < \pi$ és $\alpha \neq 0$. A σ sík O pont körüli α szögű elforgatásán azt a $\varrho : \sigma \to \sigma$ bijektív leképezést értjük, amely az O pontot fixen hagyja és egy az O–tól különböző P pont $P' = \varrho(P)$ képét az alábbi feltételek határozzák meg:
(1) A $POP'\sphericalangle$ irányított szög előjeles mértéke megegyezik α–val.
(2) Fennáll az $OP = OP'$ egyenlőség.

A σ sík O pontra történő centrális tükrözését egyben az O körüli π szögű elforgatásnak is nevezzük. A sík 0 szöggel vett elforgatásán a sík identikus leképezését értjük, amely minden ponot fixen hagy.

2.5. Definíció. Egy σ sík egybevágósági transzformációján egy olyan $\varphi : \sigma \to \sigma$ bijektív leképezést értünk, amely megőrzi a σ–beli pontok távolságát.

2.6. Állítás. *Bármely síkbeli elforgatás egy egybevágósági transzformációja a síknak.*
Bizonyítás.
Vegyünk egy σ irányított síkot, egy σ–beli O pontot és egy α számot, amelyre igaz $-\pi < \alpha < \pi$. Legyen a $\varrho : \sigma \to \sigma$ bijektív leképezés a σ síknak az O pont körüli α szögű elforgatása.



11. ábra. *A sík elforgatása az O pont körül.*

Válasszunk két σ–beli pontot A–t és B–t. Tekintsük az $A' = \varrho(A)$ és $B' = \varrho(B)$ képpontokat. Amennyiben az O, A, B pontok kollineárisak, akkor azonnal adódik, hogy fennáll $A'B' = AB$.

Tegyük fel, hogy az O, A, B pontok nincsenek egy egyenesen. Mivel az $AOA'\sphericalangle$ és $BOB'\sphericalangle$ irányított szögek előjeles mértéke egyaránt α, azt kapjuk, hogy az $AOB\sphericalangle$ és $A'OB'\sphericalangle$ konvex szögek egyenlőek. Vegyük az $OAB\triangle$ és $OA'B'\triangle$ háromszögeket. Ezekre fennáll $OA = OA'$, $OB = OB'$ és az O csúcsnál lévő szögeik is egyenlőek. Ennek következtében az $OAB\triangle$ és $OA'B'\triangle$ háromszögek egybevágóak. Ebből adódik, hogy igaz az $A'B' = AB$ összefüggés. $\square$

A síkbeli vektorok altere

Tekintsünk a térben egy σ síkot. Legyen $\mathcal{V}_\sigma$ a σ síkkal párhuzamos szabad vektorok halmaza. Soroljuk ezek közé a $\mathbf{0}$ nullvektort is. Evidens, hogy azok a vektorok tartoznak a $\mathcal{V}_\sigma$ halmazba, melyeket σ síkba eső irányított szakaszok reprezentálnak.

Vegyük észre, hogy ha két vektor benne van a $\mathcal{V}_\sigma$ halmazban, akkor azok összege is párhuzamos a σ síkkal. Emellett egy $\mathcal{V}_\sigma$–beli vektor bármely számszorosa ugyancsak eleme a $\mathcal{V}_\sigma$ halmaznak. Mivel az összeadás és a számmal való szorzás nem vezet ki a $\mathcal{V}_\sigma$ halmazból, azt mondjuk, hogy $\mathcal{V}_\sigma$ egy altere a $\mathcal{V}$ vektortérnek.

Az előző fejezetben szereplő 1.38. Állításból már adódik, hogy a $\mathcal{V}_\sigma$–ból vett lineárisan független vektorok maximális elemszáma 2. Az 1. 40. Tétel bizonyításában leírt eljárást követve könnyű belátni, hogy igaz az alábbi kijelentés.

2.7. Állítás. *Legyenek $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ olyan $\mathcal{V}_\sigma$–beli vektorok, amelyek nem párhuzamosak egymással. Ekkor a $\mathcal{V}_\sigma$ altér bármely $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen áll elő $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ lineáris kombinációjaként.*

2.8. Definíció. A σ síkbeli vektorok $\mathcal{V}_\sigma$ alterének bázisán egy olyan $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ vektorpárt értünk, ahol a két vektor lineárisan független és elemei $\mathcal{V}_\sigma$–nak.

2.9. Definíció. Legyen adva a $\mathcal{V}_\sigma$ altérben egy $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ bázis. Vegyünk egy a $\mathcal{V}_\sigma$–hoz tartozó $\mathbf{v}$ vektort és fejezzük azt ki az alapvektorok lineáris kombinációjaként a $\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2$ alakban. Az ebben szereplő v_1, v_2 valós számokat a $\mathbf{v}$ vektor adott bázisra vonatkozó, $\mathcal{V}_\sigma$–beli koordinátáinak mondjuk. (Jelölés: $\mathbf{v}\,(v_1, v_2)$.)

2.10. Definíció. A $\mathcal{V}_\sigma$–beli $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ vektorokról azt mondjuk, egy ortonormált bázisát képezik a $\mathcal{V}_\sigma$ altérnek, ha a két vektor merőleges egymásra és a hosszuk 1.

A síkbeli Descartes–féle koordináta–rendszer értelmezése

Legyen adva a térben egy σ sík. Vegyük a σ–beli (vagy más szóval a σ–val párhuzamos) szabad vektorok $\mathcal{V}_\sigma$ halmazát, amely egy 2–dimenziós altere a $\mathcal{V}$ vektortérnek.

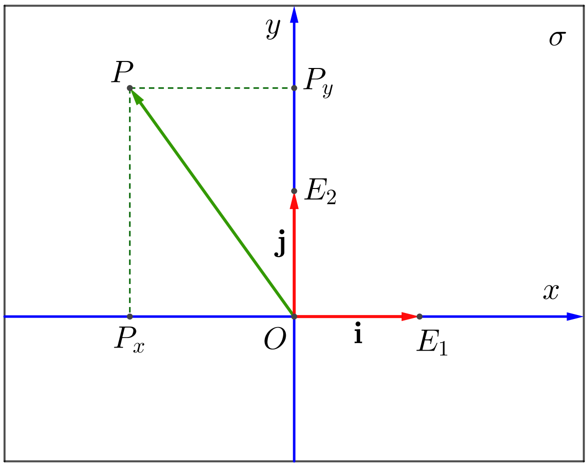
2.11. Definíció. Legyen adott a σ síknak egy O pontja, továbbá a $\mathcal{V}_\sigma$ altérnek olyan $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ vektorai, amelyek merőlegesek egymásra és a hosszuk 1. Az $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j})$ hármasról azt mondjuk, hogy egy Descartes–féle koordináta–rendszert ad a σ síkban.

Az O–t a koordináta–rendszer kezdőpontjának (vagy origójának), a két vektort pedig a koordináta–rendszer alapvektorainak nevezzük.

Megjegyzés. Vegyük a sík azon E_1, E_2 pontjait, melyekre fennáll $\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{i}$ és $\overrightarrow{OE_2} = \mathbf{j}$. Mint ismeretes, ahhoz, hogy a σ síkot a jobbkéz módszerével irányítani tudjuk, a σ által határolt két féltér közül az egyiket ki kell jelölni pozitív féltérnek. A kijelölést célszerű úgy elvégezni, hogy az irányított σ síkban az O körüli $\frac{\pi}{2}$ szögű elforgatás az E_1 pontot E_2–be vigye.

Megjegyzés. Legyenek E_1, E_2 azok a σ–beli pontok, melyekre fennáll $\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{i}$, $\overrightarrow{OE_2} = \mathbf{j}$ Az $\langle O, E_1\rangle$, $\langle O, E_2\rangle$ egyeneseket az $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j})$ koordináta–rendszer tengelyeinek mondjuk. Ezekre szokás az x tengely és y tengely elnevezéseket is használni. Az E_1, E_2 pontokat a tegelyekre eső egységpontoknak nevezzük.

A tengelyeket irányított egyeneseknek tekintjük oly módon, hogy az irányításokat az $[O, E_1\rangle$, $[O, E_2\rangle$ félegyenesekkel adjuk meg.



12. ábra. *Egy síkbeli P pont koordinátáinak értelmezése.*

2.12. Definíció. Legyen adott a σ síkban egy $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j})$ Descartes–féle koordináta–rendszer. Tekintsünk a síkban egy tetszőleges P pontot. Fejezzük ki az $\overrightarrow{OP}$ helyvektort az alapvektorok lineáris kombinációjaként az $\overrightarrow{OP} = x_P\,\mathbf{i} + y_P\,\mathbf{j}$ formában. Ezen lineáris kombinációban szereplő x_P, y_P együtthatókat a P pont $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j})$ koordináta–rendszerre vonatkozó koordinátáinak nevezzük. Az (x_P, y_P) számpárt a P ponthoz tartozó koordinátapárnak mondjuk.

A továbbiakban egy P pont síkbeli koordinátáinak feltüntetésére a $P\,(x_P, y_P)$ jelölést fogjuk használni.

Megjegyzés. Fontosnak tartjuk megjegyezni, hogy a síkbeli koordinátákat eredetileg a vektorok (és a lineáris kombináció fogalmának) felhasználása nélkül értelmezték az alább leírt eljárással. A XIX. század második feléig ez volt az általánosan elfogadott értelmezés.

Vegyünk a síkban két egymásra merőleges egyenest, melyeket jelöljön x és y, a metszéspontjukat pedig jelölje O. A két egyenesen adjunk meg egy-egy irányítást. Azt mondjuk, hogy a két irányított egyenes egy derékszögű koordináta-rendszert képez a síkban. Az egyeneseket nevezzük a koordináta-rendszer tengelyeinek, az O-t pedig a kezdőpontnak (vagy origónak) hívjuk.

Tekintsük a sík egy tetszőleges P pontját. A P pontból az x, y egyenesekhez húzott merőleges szakaszok talppontját jelelölje P_x és P_y. Az irányított tengelyeken az $\overrightarrow{OP_x}$ és $\overrightarrow{OP_y}$ irányított szakaszok előjeles hosszát jelölje x_P és y_P. A P pont koordinátáin ezen x_P, y_P valós számokat értjük.

2.13. Definíció. Azt a $\xi : \sigma \to \mathbb{R}^2$ leképezést, ahol tetszőleges $P \in \sigma$ pont esetén fennáll $\xi(P) = (x_P, y_P)$, a σ sík koordinátázásának mondjuk.

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy a $\xi : \sigma \to \mathbb{R}^2$ koordinátázás egy bijektív leképezés.

Célszerűnek látszik bevezetni a koordinátákra vonatkozó egyenlettel leírt alakzat fogalmát.

2.14. Definíció. Legyen adva egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ valós függvény és egy $c \in \mathbb{R}$ szám. Az $f(x, y) = c$ egyenlettel leírt σ–beli alakzaton az $\mathcal{A} = \{\, P \in \sigma \mid f(x_P, y_P) = c \}$ ponthalmazt érjük.

A szögfüggvények értelmezése

Állapodjunk meg abban, hogy a továbbiakban a szögeket az ívmértékükkel fogjuk mérni.

Legyen adott a térben egy σ sík. Vegyünk ebben egy $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j})$ Descartes–féle koordináta–rendszert. Jelöljük ki a síkban azon E_1, E_2 pontokat, amelyeknek az O kezdőpontra vonatkozó helyvektoraira fennáll $\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{i}$ és $\overrightarrow{OE_2} = \mathbf{j}$. A síkban az O centrumú és 1 sugarú kört pedig jelölje $k_\sigma(O, 1)$.

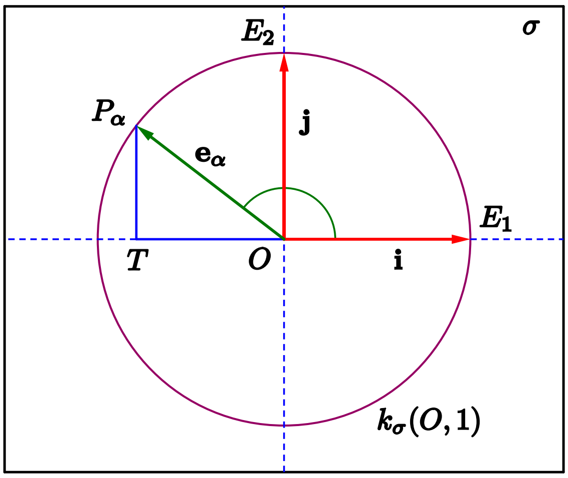
Irányítsuk a σ síkot oly módon, hogy a σ síknak az O körüli $\pi/2$ szögű elforgatása az E_1 pontot az E_2 pontba képezze.

Vegyünk egy olyan α valós számot, amelyre fennáll $-\pi < \alpha < \pi$. Az O pont körüli α szögű elforgatás vigye az E_1 pontot a P_α–val jelölt pontba. Célszerű megjegyeznünk, hogy az így nyert P_α pont rajta van a $k_\sigma(O, 1)$ körvonalon és az $E_1OP_\alpha\sphericalangle$ irányított szög előjeles mértéke α.

A fent leírtak alapján már definiálni tudjuk a koszinusz és szinusz valós függvényeket. Azonban ezeknek a teljes $\mathbb{R}$ valós számegyenesen való értelmezéséhez szükségünk van az alábbi fogalomra.

2.15. Definíció. Tekintsünk egy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ valós számot. Ehhez rendeljük hozzá azt az α valós számot és k egész számot, melyekkel fennállnak a $-\pi < \alpha \leq \pi$ és $t = \alpha + 2k\pi$ összefüggések. Az α számot nevezzük a t forgásszöghöz tartozó síkbeli elforgatás előjeles mértékének.

Az E_1 egységpontnak az O körüli α előjeles szögű elforgatottja legyen P_α. Ezt mondjuk az E_1 pont t előjeles forgásszöghöz tartozó elforgatottjának az O kezdőpont körül és egyúttal a P_t jelölést alkalmazzuk rá.



13. ábra. *Az elforgatással nyert $P_\alpha = P_t$ pont koordinátái a $\cos t$ és $\sin t$ függvényértékek.*

2.16. Definíció. Koszinusz függvényen azt a $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvényt értjük, amelynek tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ helyen felvett értéke egyenlő azon P_t pont első koordinátájával, amely megegyezik az E_1 egységpont t forgásszöghöz tartozó O körüli elforgatottjával.

Szinusz függvényen azt a $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvényt értjük, amelynek tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ helyen felvett értéke egyenlő a P_t pont második koordinátájával.

Megjegyzés. A fentiek során definiált $\cos,\ \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvényeket közös néven szögfüggvényeknek hívjuk. Ezen függvények $t \in \mathbb{R}$ helyen nyert értékét $\cos t$ és $\sin t$ jelöli.

Fontos kiemelni, hogy $\cos t$ és $\sin t$ azok a valós számok, amelyekkel fennáll az $\overrightarrow{OP_t} = \cos t\, \mathbf{i} + \sin t\, \mathbf{j}$ egyenlőség.

A továbbiakban jelöje $\mathbf{e}_\alpha$ az $\overrightarrow{OP_\alpha}$ irányított szakasz által képviselt egységvektort, azaz legyen $\mathbf{e}_\alpha = \overrightarrow{OP_\alpha}$.

2.17. Állítás. *A szögfüggvényekre tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ valós szám és k egész szám esetén teljesülnek az alábbi összefüggések:*

(1) $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$;

(2) $\cos(-t) = \cos t, \qquad \sin(-t) = -\sin t$;

(3) $\cos(t + 2k\pi) = \cos t, \qquad \sin(t + 2k\pi) = \sin t.$

Bizonyítás.

(1) A $P_t = P_\alpha$ pontból az $\langle O, E_1\rangle$ egyeneshez húzott merőleges szakasz talppontja legyen T. Az $\mathbf{e}_\alpha = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TP_\alpha}$ egyenlőség szerint igaz $\overrightarrow{OT} = \cos t\, \mathbf{i}$ és $\overrightarrow{TP_\alpha} = \sin t\, \mathbf{j}$. Ennek következtében teljesül $OT = |\cos t|$ és $TP_\alpha = |\sin t|$. Alkalmazzuk a Pitagorasz–tételt az $OTP_\alpha\triangle$ derékszögű háromszögre, ahol $OP_\alpha = 1$. Ily módon az $OT^2 + (TP_\alpha)^2 = (OP_\alpha)^2$ összefüggésből adódik, hogy fennáll $(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$.

(2) Vegyük észre, hogy tetszőleges $\alpha \in (-\pi, \pi]$ előjeles szögmérték mellett az $\mathbf{e}_\alpha$ és $\mathbf{e}_{-\alpha}$ vektorok egymásnak az $\langle O, E_1\rangle$ egyenesre vonatkozó tükörképei. Ebből az következik, hogy $\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{e}_{-\alpha}$ vektorok első koordinátája megegyezik, a második koordinátájuk pedig előjelben különbözik. Ily módon teljesül $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ és $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

A (3) összefüggések könnyen beláthatóak a 2.15. és 2.16. Definíciók alapján. $\square$

Az alábbi tételben szereplő formulákat a szögfüggvényekre vonatkozó addíciós képleteknek szokás nevezni.

2.18. Tétel. *Tetszőleges x, y valós számok esetén igazak az alábbi összefüggések*

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \qquad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y\,.$$

A cos és sin függvények hányadosaként további valós függvényeket tudunk definiálni. Ezek azonban már nem a teljes valós számhalmazon lesznek értelmezve, mivel a cos és sin függvényeknek zérushelyei is vannak. A 2.16. Definíció alapján adódik, hogy tetszőleges k egész szám esetén igaz

$$\cos\Big((2k + 1)\frac{\pi}{2}\Big) = 0, \qquad \sin(k\pi) = 0.$$

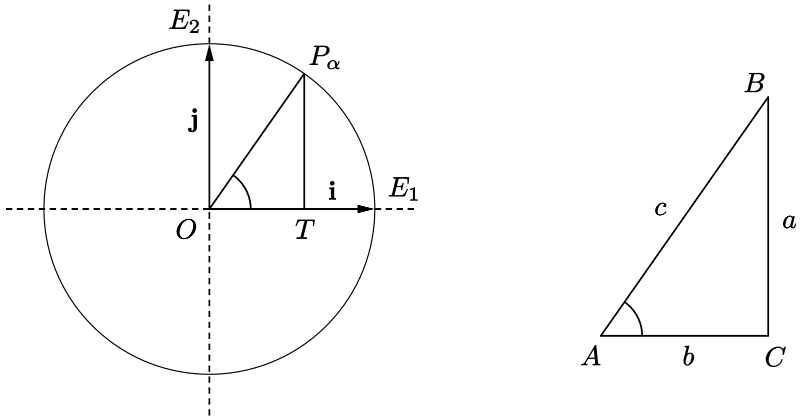
Könnyen belátható, hogy a *koszinusz, szinusz* függvényeknek a fenti összefüggésekben megadott helyeken kívül már nincs további zérushelye. Ily módon értelmezni tudjuk a *tangensfüggvényt* és a *kotangensfüggvényt* is. Az egész számok halmazát $\mathbb{Z}$ fogja jelölni a továbbiakban.

2.19. Definíció. Tekintsük a kivonással nyert $D_{\mathrm{tg}} = \mathbb{R} \setminus \{\, (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$ és $D_{\mathrm{ctg}} = \mathbb{R} \setminus \{\, k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$ halmazokat.

A $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ formulával értelmezett $\mathrm{tg} : D_{\mathrm{tg}} \to \mathbb{R}$ függvényt tangensfüggvénynek mondjuk. A $\mathrm{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$ összefüggéssel definiált $\mathrm{ctg} : D_{\mathrm{ctg}} \to \mathbb{R}$ függvényt kotangensfüggvénynek nevezzük.

A szögfüggvények geometriai jelentése

Legyen α egy olyan szögmérték, amelyre fennáll $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Vegyük az E_1 egységpontnak az O körüli α szögű elforgatásával nyert P_α pontot. Ezen P_α pontból az $\langle O, E_1 \rangle$ egyeneshez húzott merőleges szakasz talppontja legyen T. Nyilvánvaló, hogy ez esetben teljesül $OT = \cos\alpha$, $TP_\alpha = \sin\alpha$ és $OP_\alpha = 1$.



14. ábra. *A szögfüggvények geometriai jelentése.*

Tekintsünk egy olyan $ABC\triangle$ derékszögű háromszöget, ahol $\gamma = \frac{\pi}{2}$ és az A csúcsnál lévő szög α. Ekkor az $OP_\alpha T\triangle$ és $ABC\triangle$ háromszögek hasonlóak, mivel szögeik páronként egyenlőek. Ennek következtében igaz $\dfrac{OT}{b} = \dfrac{OP_\alpha}{c}$ és $\dfrac{TP_\alpha}{a} = \dfrac{OP_\alpha}{c}$. A fentiek alapján a következő összefüggésekhez jutunk:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}.$$

Azt mondhatjuk, hogy egy α $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ hegyesszög esetében a szögfüggvények értékét megkaphatjuk oly módon, hogy egy α szögű derékszögű háromszögben vesszük a megfelelő oldalak hányadosát.

Vegyük még észre, hogy a $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ szögre fennáll $\cos\beta = \sin\alpha$ és $\sin\beta = \cos\alpha$.

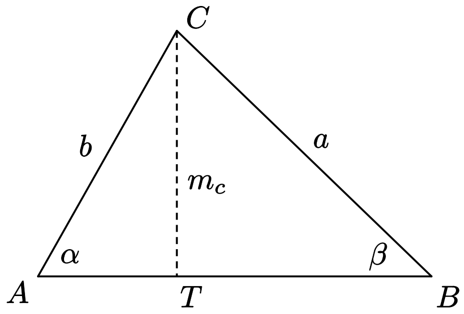
Megjegyzés. A középiskolai oktatásban a szögfüggvényeket célszerü először csupán a hegyesszögekre, azaz a $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ esetre értelmezni a derékszögű háromszögek alkalmazásával. Ezt követően lehet kiterjeszteni a szögfüggvények értelmezési tartományát az $\mathbb{R}$ valós számhalmazra oly módon, hogy $\cos t$ és $\sin t$ $(t \in \mathbb{R})$ értékét úgy értelmezzük, mint az E_1 egységpont O körüli, t forgásszögű elforgatásával nyert P_t pont koordinátáit.

A háromszögre vonatkozó szinusztétel és koszinusztétel

Amennyiben vesszük a szögfüggvények értékét egy általános háromszög szögein, akkor könnyen igazolni lehet olyan összefüggéseket, amelyek a szögek és az oldalak kapcsolatáról szólnak. Az alábbi eredményt a háromszögre vonatkozó szinusztételnek szokás nevezni.

2.20. Tétel. *Tetszőleges $ABC\triangle$ háromszögben a szögekre és az oldalakra fennáll a $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{a}{b}$ összefüggés.*

Bizonyítás.



15. ábra. *Illusztráció a szinusztétel bizonyításához.*

Legyen adott egy $ABC\triangle$ háromszög. Tekintsük azt a C csúcson átmenő egyenest, amely derékszögben metszi el az $\langle A, B\rangle$ oldalegyenest. Ennek az $\langle A, B\rangle$ egyenessel vett metszéspontja legyen T. Mint ismeretes, a $\overline{CT}$ szakaszt mondjuk a háromszög C csúcshoz tartozó magasságvonalának és az $m_c = CT$ hosszt a C csúcshoz tartozó magasságnak. Az $ACT\triangle$ derékszögű háromszöget véve, azt kapjuk, hogy fennáll $\sin\alpha = \dfrac{m_c}{b}$. A $BCT\triangle$ derékszögű háromszöget alkalmazva pedig adódik, hogy igaz $\sin\beta = \dfrac{m_c}{a}$. Ezek szerint teljesül $m_c = b\,\sin\alpha$ és $m_c = a\,\sin\beta$. Amennyiben az így nyert $b\,\sin\alpha = a\,\sin\beta$ egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk az $\dfrac{1}{b\,\sin\beta}$ számmal, akkor a $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{a}{b}$ egyenlőséghez jutunk. □

Megjegyzés. A szinusztétel tehát azt mondja ki, hogy egy $ABC\triangle$ háromszögben a szögek szinuszainak aránya megegyezik a szemközti oldalak hosszainak arányával, azaz fennáll $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$.

A következő tétel, amelyet koszinusztételnek hívunk, arra mutat rá, hogy egy háromszög oldalhosszainak ismeretében meg lehet határozni a háromszög szögeit.

2.21. Tétel. *Tetszőleges $ABC\triangle$ háromszögre teljesül az $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha$ összefüggés.*

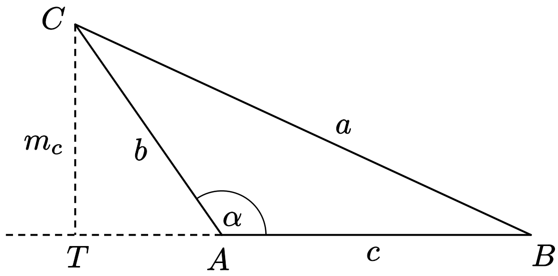
Bizonyítás.

Legyen adott egy $ABC\triangle$ háromszög. Amennyiben igaz $\alpha = \frac{\pi}{2}$, akkor $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ és a Pitagorasz–tétel miatt igaz a fenti összefüggés. Ily módon a továbbiakban feltehetjük, hogy $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

Jelöljük T–vel a C csúcsból az $\langle A, B\rangle$ oldalegyeneshez húzott merőleges szakasz talppontját. Tekintsük az $ACT\triangle$ derékszögű háromszöget. Könnyű belátni, hogy amennyiben

$\alpha < \frac{\pi}{2}$, akkor fennáll $AT = b\cos\alpha$. Ha pedig $\alpha > \frac{\pi}{2}$, akkor $AT = -b\cos\alpha$ teljesül. A Pitagorasz–tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy mindkét esetben igaz

$$b^2 = TA^2 + TC^2 = b^2\cos^2\alpha + m_c^2 .$$



16. ábra. *Illusztráció a koszinusztétel bizonyításához ($\alpha > \frac{\pi}{2}$ eset).*

Vegyük most a $BCT\triangle$ derékszögű háromszöget. Függetlenül attól, hogy az α hegyesszög vagy tompaszög, fennáll $BT = c - b\cos\alpha$. Ha a Pitagorasz–tételt a $BCT\triangle$ derékszögű háromszögre alkalmazzuk, akkor azt nyerjük, hogy

$$a^2 = TB^2 + TC^2 = (c - b\cos\alpha)^2 + m_c^2 = c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha + (b^2\cos^2\alpha + m_c^2)$$

teljesül. Használjuk most fel a b^2–re vonatkozó fenti kifejezést. Ily módon az $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$ egyenlőséghez jutunk. □

Megjegyzés. A Pitagorasz–tételhez való kapcsolódása miatt a koszinusztételt többnyire a $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma$ alakban szokás felírni.

Két vektor skaláris szorzatának értelmezése

A továbbiak során egy $\mathbf{a}$ vektor hosszát $\|\mathbf{a}\|$ helyett olykor az $|\mathbf{a}|$ szimbólummal jelöljük. A vektorok hossza és hajlásszöge alapján értelmezzük két vektor skaláris szorzatát.

2.22. Definíció. Legyenek adva az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok, melyekre fennáll $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. A két vektor hajlásszögét jelölje φ. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatán az $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi$ számot értjük és azt az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ szimbólummal jelöljük.

Amennyiben $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ teljesül, akkor a két vektor skaláris szorzatán a 0 számot értjük.

Megjegyzés. Az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi$ definiáló összefüggésből adódik, hogy tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorokra igaz $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$. Eszerint a skaláris szorzás egy kommutatív művelet.

Amennyiben az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt φ szög egy hegyesszög, akkor $\cos\varphi > 0$ következtében fennáll $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$. Ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok egy tompaszöget zárnak be, akkor $\cos\varphi < 0$ és $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ teljesül.

Vegyük észre, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok merőlegesek egymásra akkor és csak akkor, ha a skaláris szorzatukra igaz $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Megjegyzés. Tekintsünk egy $\mathbf{a}$ vektort, amelyre fennáll $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Az $\mathbf{a}$ önmagával vett skaláris szorzatát véve azt kapjuk, hogy teljesül $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos 0 = |\mathbf{a}|^2$.

Az $\mathbf{a}$ vektor önmagával vett skaláris szorzatát szokás az $\mathbf{a}^2$ kifejezéssel is jelölni.

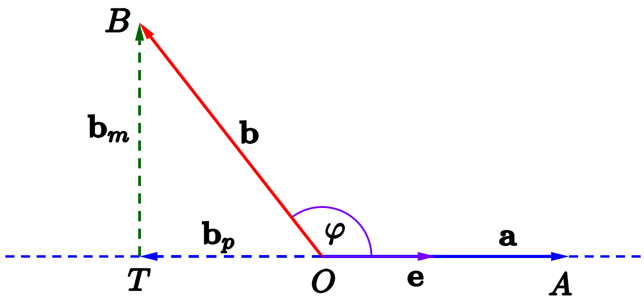
Megjegyzés. Ugyancsak következik a skaláris szorzat definíciójából, hogy bármely $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok és λ szám mellett fennáll a $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b})$ összefüggés.

Megjegyzés. A szakirodalomban szokás a $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ jelölést alkalmazni az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatára. Vannak olyan tankönyvek is, amelyekben a skaláris szorzatot $\mathbf{ab}$ jelöli.

Vektor felbontása egy adott vektorral párhuzamos és arra merőleges összetevőkre

Legyenek adva olyan $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok, amelyek különböznek $\mathbf{0}$–tól, nem párhuzamosak és nem merőlegesek egymásra. Rögzítsünk egy O pontot. Az O kezdőpontú és az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorokat reprezentáló irányított szakaszok legyenek $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$. A B pontból az $\langle O, A\rangle$ egyeneshez húzott merőleges szakasz talppontja legyen T. Tekintsük a $\mathbf{b}_p = \overrightarrow{OT}$ és $\mathbf{b}_m = \overrightarrow{TB}$ vektorokat, melyekre fennáll $\mathbf{b}_p + \mathbf{b}_m = \mathbf{b}$. Vegyük észre, hogy $\mathbf{b}_p$ párhuzamos az $\mathbf{a}$ vektorral és $\mathbf{b}_m$ merőleges az $\mathbf{a}$–ra.

2.23. Definíció. A $\mathbf{b}_p = \overrightarrow{OT}$ vektort a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{a}$–val párhuzamos összetevőjének mondjuk. A $\mathbf{b}_m = \overrightarrow{TB}$ vektort a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{a}$–ra merőleges összetevőjének nevezzük.



17. ábra. *Vektor felbontása merőleges összetevőkre* ($\mathbf{b} = \mathbf{b}_p + \mathbf{b}_m$).

2.24. Állítás. *Legyenek adva olyan* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *vektorok, amelyek különböznek* $\mathbf{0}$*–tól. Jelölje* $\mathbf{e}$ *az* $\mathbf{a}$*–val egyirányú egységvektort. Ekkor a* $\mathbf{b}$ *vektor* $\mathbf{a}$*–val párhuzamos összetevőjére fennáll* $\mathbf{b}_p = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{e}$.

Bizonyítás.

Jelöljük φ–vel az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszögét és tekintsük az $OBT\triangle$ derékszögű háromszöget. Vegyük észre, hogy az $(\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{e}$ vektor hosszára fennáll $|(\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{e}| = |\mathbf{e}\cdot\mathbf{b}|\cdot 1 = |1\cdot\|\mathbf{b}\|\cdot\cos\varphi| = OB\cdot|\cos\varphi| = OT$. Ezek szerint a $\mathbf{b}_p = \overrightarrow{OT}$ és $(\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{e}$ vektorok hossza megegyezik.

Azt már könnyű belátni, hogy a két vektor iránya is azonos. Ugyanis, ha a φ hegyesszög (azaz $\varphi < 90°$), akkor az $\mathbf{b}_p = \overrightarrow{OT}$ és $(\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{e}$ vektorok iránya megegyezik az $\mathbf{a}$ irányával. Ha pedig $\varphi > 90°$ teljesül, akkor a két vektor iránya ellentétes az $\mathbf{a}$ irányával.

Ez viszont azt jelenti, hogy a $\mathbf{b}_p$ és $(\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{e}$ vektorok egyenlőek. □

Evidens, hogy az $\mathbf{a}$–val egyirányú egységvektorra igaz $\mathbf{e} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a}$. Az előbbi állítás következtében az alábbi kijelentést tehetjük.

2.25. Következmény. *Legyenek adva olyan* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *vektorok, amelyek különböznek* $\mathbf{0}$*–tól. Ekkor a* $\mathbf{b}$ *vektor* $\mathbf{a}$*–val párhuzamos és* $\mathbf{a}$*–ra merőleges összetevőire teljesül*

$$\mathbf{b}_p = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} \quad \textit{és} \quad \mathbf{b}_m = \mathbf{b} - \mathbf{b}_p.$$

A következő állítás azt mondja ki, hogy a vektorok skaláris szorzása egy disztributív művelet az összeadásra nézve.

2.26. Állítás. *Tetszőleges* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *vektorokra fennáll az* $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$

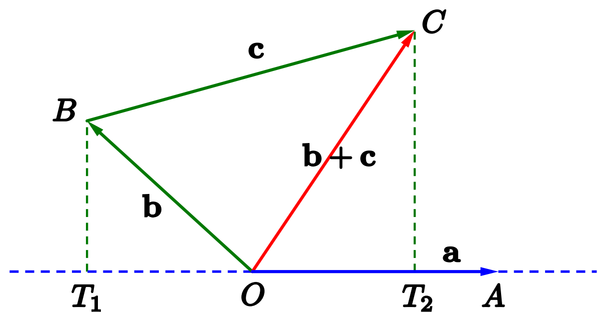
összefüggés.

Bizonyítás.

Amennyiben $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, akkor nyilván fennáll a fenti egyenlőség.

Ezt követően feltesszük, hogy igaz $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Rögzítsünk a térben egy O pontot. Az O kezdőpontú és az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorokat képviselő irányított szakaszok legyenek $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$. A $\mathbf{c}$ vektort reprezentáló és B kezdőpontú irányított szakasz pedig legyen $\overrightarrow{BC}$. Ez esetben tehát fennáll $\overrightarrow{OC} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$. Megjegyezzük még, hogy az O, A, B, C pontoknak most nem szükséges egyazon síkban lenniük.

A B, C pontokból az $\langle O, A\rangle$ egyeneshez húzott merőleges szakaszok talppontját jelölje T_1 és T_2. Ekkor a $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ vektoroknak az $\mathbf{a}$–val párhuzamos komponenseire fennáll $\mathbf{b}_p = \overrightarrow{OT_1}$, $\mathbf{c}_p = \overrightarrow{T_1T_2}$ és $(\mathbf{b}+\mathbf{c})_p = \overrightarrow{OT_2}$. Ily módon teljesül a $(\mathbf{b}+\mathbf{c})_p = \mathbf{b}_p + \mathbf{c}_p$ egyenlőség.



18. ábra. *A 2.26. Állítás bizonyításának szemléltetése.*

Tekintsük az $\mathbf{a}$–val egyirányú $\mathbf{e} = \dfrac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a}$ egységvektort. Vegyük észre, hogy a 2.24. Állítás következtében bármely $\mathbf{u}$ vektorra igaz az $\mathbf{e}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{e}\cdot\mathbf{u}_p$ összefüggés, amelyben $\mathbf{u}_p$ az $\mathbf{u}$ vektor $\mathbf{a}$–val párhuzamos összetevőjét jelöli. Ily módon az kapjuk, hogy teljesül

$$\begin{aligned}\mathbf{e}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= \mathbf{e}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})_p = \mathbf{e}\cdot(\mathbf{b}_p+\mathbf{c}_p) = \mathbf{e}\cdot((\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{e}+(\mathbf{e}\cdot\mathbf{c})\mathbf{e}) = \\ &= \mathbf{e}\cdot((\mathbf{e}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{e}\cdot\mathbf{c})\mathbf{e}) = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{e}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}) = \mathbf{e}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{e}\cdot\mathbf{c}\,.\end{aligned}$$

Ez már azt mutatja, hogy amennyiben az $\mathbf{a}$ vektor hossza 1, akkor igaz az állításban szereplő összefüggés. Az $\|\mathbf{a}\| \neq 1$ esetben alkalmazzuk az $\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|\,\mathbf{e}$ kifejezést. Kihasználva a skaláris szorzás eddig megismert tulajdonságait, azt kapjuk, hogy fennáll

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= (\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{e})\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \|\mathbf{a}\|\,(\mathbf{e}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})) = \|\mathbf{a}\|\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{e}\cdot\mathbf{c}) = \\ &= (\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{e})\cdot\mathbf{b} + (\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{e})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c},\end{aligned}$$

ami már igazolja az állítást. $\square$

A skaláris szorzat kiszámítása a koordinátákból

Vegyük a szabad vektorok $\mathcal{V}$ terének egy $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ortonormált bázisát. Mint ismeretes ez annyit jelent, hogy az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektorok páronként merőlegesek egymásra és a hosszuk 1.

A 2.22. Definícióból azonnal adódik, hogy ezen egységvektorok skaláris szorzataira igazak az alábbi egyenlőségek:
$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1,\quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1,\quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$ és $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0,\quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0,\quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=0.$

Tekintsünk két vektort $\mathbf{a}$–t és $\mathbf{b}$–t. Fejezzük ki ezeket az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ortonormált vektorok lineáris kombinációjaként az $\mathbf{a}=a_1\,\mathbf{i}+a_2\,\mathbf{j}+a_3\,\mathbf{k}$ és $\mathbf{b}=b_1\,\mathbf{i}+b_2\,\mathbf{j}+b_3\,\mathbf{k}$ alakban. Mint ismeretes, az (a_1,a_2,a_3) és (b_1,b_2,b_3) számhármasok adják az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisra vonatkozó koordinátáit.

Az eddigi megállapításaink alapján már meg tudjuk mutatni, hogy a skaláris szorzat értéke könnyen megkapható a koordinátákból. Erről szól a következő állítás.

2.27. Állítás. *Tetszőleges* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorok skaláris szorzatára teljesül az*
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1\,b_1+a_2\,b_2+a_3\,b_3$ *egyenlőség.*

Bizonyítás.
Amennyiben a skaláris szorzással kapcsolatban az előző állításban szereplő disztributivitási tulajdonságot is felhasználjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (a_1\,\mathbf{i}+a_2\,\mathbf{j}+a_3\,\mathbf{k})\cdot(b_1\,\mathbf{i}+b_2\,\mathbf{j}+b_3\,\mathbf{k})\\
&= (a_1\,\mathbf{i})\cdot(b_1\,\mathbf{i})+(a_1\,\mathbf{i})\cdot(b_2\,\mathbf{j})+(a_1\,\mathbf{i})\cdot(b_3\,\mathbf{k})+(a_2\,\mathbf{j})\cdot(b_1\,\mathbf{i})\\
&+(a_2\,\mathbf{j})\cdot(b_2\,\mathbf{j})+(a_2\,\mathbf{j})\cdot(b_3\,\mathbf{k})+(a_3\,\mathbf{k})\cdot(b_1\,\mathbf{i})+(a_3\,\mathbf{k})\cdot(b_2\,\mathbf{j})+(a_3\,\mathbf{k})\cdot(b_3\,\mathbf{k})\\
&= a_1\,b_1(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})+a_1\,b_2(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j})+a_1\,b_3(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k})+a_2\,b_1(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i})\\
&+a_2\,b_2(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})+a_2\,b_3(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k})+a_3\,b_1(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i})+a_3\,b_2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j})+a_3\,b_3(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})
\end{aligned}$$

teljesül. Eszerint az $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ skaláris szorzat 9 tag összegeként áll elő. Azonban az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisvektorok páronként egymásra merőleges egységvektorok, és emiatt a fenti kifejezésben 6 tag értéke 0. Ily módon azt kapjuk, hogy fennáll az állításban megadott

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1\,b_1+a_2\,b_2+a_3\,b_3 \qquad \Box$$

összefüggés.

Megjegyzés. Az ortonormált bázisvektorokra szokás még az $\mathbf{e}_1=\mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2=\mathbf{j}$ és $\mathbf{e}_3=\mathbf{k}$ jelölést is alkalmazni. Ekkor két bázisvektor szorzatára fennáll az $\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_s=\delta_{rs}$ $(r,\ s=1,2,3)$ összefüggés, ahol δ_{rs} az úgynevezett Kronecker–szimbólum (más szóval a Kronecker–delta). Ezen δ_{rs} szimbólum értéke megállapodás szerint 1, amennyiben az idexekre igaz $r=s$. Ha pedig az idexekre $r\neq s$ teljesül, akkor a δ_{rs} szimbólum értéke 0.

A tér irányítása

A térbeli zászlót már a jegyzet első fejezetében értelmeztük. Mint ismeretes, ha veszünk egy félteret, a félteret határoló síkban egy félsíkot és a félsíkot határoló egyenesen egy félegyenest, akkor egy térbeli zászlót kapunk. A térbeli zászló tehát egy alakzathármas, amely egy félegyenesből, egy félsíkból és egy féltérből áll. A félegyenest a zászló rúdjának nevezzük, a félsíkot pedig a zászló lapjának mondjuk.

Emlékezzünk rá, hogy amennyiben az A, B, C, D pontok nincsenek egy síkon, akkor a pontnégyeshez egy $\mathcal{Z}(A,B,C,D)$ által jelölt zászlót rendelünk. Ehhez vennünk kell az $e = \langle A,B\rangle$ egyenest és a $\sigma = \langle A,B,C\rangle$ síkot. Az $[A,B\rangle$ félegyenes, az $[e,C\rangle$ félsík és a $[\sigma,D\rangle$ féltér alkotják a $\mathcal{Z}(A,B,C,D)$ zászlót.

Akárcsak a sík irányítása esetében most is azt használjuk fel, hogy ha az egyik kezünk hüvelykujját, mutatóujját és középső ujját kifeszítjük, akkor azokkal egy ortogonális irányhármast jelölünk ki. A térbeli zászlókat a jobbkéz módszerével soroljuk két osztályba az alábbiak szerint.

Vegyünk egy térbeli zászlót. Jobbkezünk hüvelykujja mutasson a zászló rúdjának irányába, a mutatóujj legyen a zászló félterét határoló síkban és mutasson a zászló lapjának oldalára. Ha ebben a helyzetben a középső ujj a zászló félterébe mutat, akkor azt mondjuk, hogy az adott térbeli zászló az első osztályhoz tartozik.

Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az adott zászló a térbeli zászlók második osztályához tartozik.

A tér irányításán azt értjük, hogy a jobbkéz módszerével a térbeli zászlókat két osztályba soroljuk és kitüntetjük közülük az első osztályt.

A $\mathcal{V}$–beli bázisok osztályozása

2.28. Definíció. Legyenek adva az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ lineárisan független vektorok. Vegyünk a térben egy O pontot. Tekintsük azokat az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorokat reprezentáló irányított szakaszokat, amelyek kezdőpontja az O pont. Legyenek ezen irányított szakaszok végpontjai A, B és C. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok ebben a sorrendben egy jobbrendszert alkotnak, ha a $\mathcal{Z}(O,A,B,C)$ zászló a térbeli zászlók első osztályához tartozik. Amennyiben a $\mathcal{Z}(O,A,B,C)$ zászló a térbeli zászlók második osztályához tartozik, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorhármas egy balrendszert képez.

Megjegyzés. Mint ismeretes, $\mathcal{V}$–beli bázison egy olyan vektorhármast értünk, amelynek elemei lineárisan függetlenek. Az előbbi definíció alapján a szabad vektorok terének bázisait két osztályba soroltuk. Vannak olyan bázisok, amelyek jobbrendszert képeznek, és vannak olyanok, amelyek balrendszert adnak.

Megjegyzés. Három vektor vegyes szorzatának tárgyalása során majd látni fogjuk, hogy amennyiben a lineárisan független $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok ebben a sorrendben egy jobbrendszert alkotnak, akkor a $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ vektorhármasok balrendszert képeznek. Azt mondhatjuk tehát, hogy a vektorhármas típusa megváltozik, ha benne két elemet felcserélünk.

Megjegyezzük még, hogy a vektorhármas típusa akkor is megváltozik, ha az egyik elemét egy negatív számmal, például (-1)–gyel, megszorozzuk.

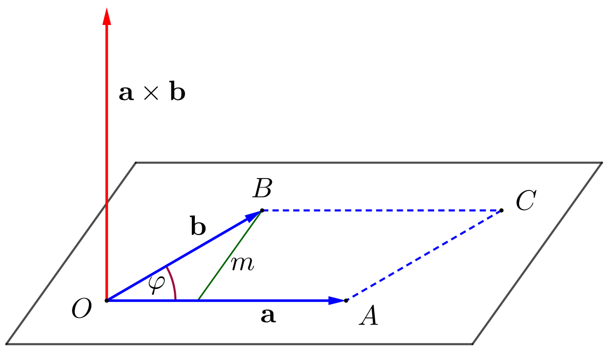
Két vektor vektoriális szorzata

2.29. Definíció. Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ olyan vektorok, amelyek lineárisan függetlenek. Ekkor az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatán azt az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ által jelölt vektort értjük, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:
(1) Fennáll az $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$ összefüggés, ahol φ az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszöge.
(2) Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor merőleges az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorokra.
(3) Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok ebben a sorrendben egy jobbrendszert alkotnak.
Amennyiben az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok lineárisan összefüggőek, akkor az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektoriális szorzaton a $\mathbf{0}$ nullvektort értjük.

Megjegyzés. Az előző definícióban szereplő feltételek alapján bármely két vektor vektoriális szorzata egyértelműen meg van határozva.

Megjegyzés. Könnyen be lehet látni, hogy tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok és λ valós szám esetén teljesül $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$.

Vegyük észre, hogy a vektoriális szorzás nem kommutatív, mivel fennáll a $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ összefüggés. Emiatt azt is szokták mondani, hogy a vektoriális szorzás egy antikommutatív művelet.



19. ábra. *Az* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *vektorok vektoriális szorzata.*

Megjegyzés. Legyenek az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok lineárisan függetlenek. Rögzítsünk a térben egy O pontot. Tekintsük, azokat az O kezdőpontú $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ irányított szakaszokat, amelyek az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektorokat képviselik. Vegyük észre, hogy az $OACB$ négyszög egy parallelogramma. Ez esetben azt mondjuk, hogy az $OACB$ parallelogrammát az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok feszítik ki.

A fenti parallelogramma oldalainak hossza $OA = |\mathbf{a}|$, $OB = |\mathbf{b}|$ és az $\overline{OA}$ oldalhoz tartozó magassága $m = |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$. Ennek következtében azt nyerjük, hogy az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor hosszára fennáll $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi = |\mathbf{a}| \cdot m$, vagyis az egyenlő az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített parallelogramma területével.

A vektoriális szorzás geometriai jelentése

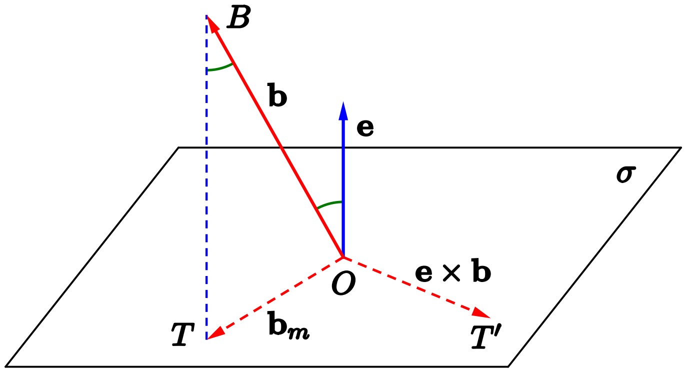
2.30. Definíció. Legyen adott egy $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$) vektor és egy σ sík. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}$ vektor merőleges a σ síkra, ha az $\mathbf{a}$–t képviselő irányított szakaszok egyenesei merőlegesek σ–ra.

Megjegyzés. Legyen adva egy σ sík és egy $\mathbf{a}$ vektor, amely nem párhuzamos σ–val. Mint ismeretes, a sík irányításához ki kell jelölni a σ által határolt két féltér egyikét.

Tekintsük a σ sík egy O pontját, majd az O kezdőponttal vegyük az $\mathbf{a}$–t reprezentáló $\overrightarrow{OA}$ irányított szakaszt. Válasszuk pozitív féltérnek a $[\sigma, A\rangle$ félteret, vagyis azt a félteret, amelybe az $\mathbf{a}$ vektor mutat. Ekkor a σ síkon nyert irányításról azt mondjuk, hogy azt az $\mathbf{a}$ vektorral határoztuk meg.

2.31. Definíció. Legyen adva egy σ irányított sík és abban az A, B pontok. Hajtsunk végre egy σ–beli elforgatást a sík egy O pontja körül egy α szöggel és jelöljük azt el ϱ–val. Tekintsük az $A' = \varrho(A)$ és $B' = \varrho(B)$ képpontokat. Ez esetben a $\mathcal{V}_\sigma$ altér $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ vektorának a σ síkbeli α szögű elforgatottján az $\overrightarrow{A'B'}$ vektort értjük.

Az alábbi kijelentés arra utal, hogy az egységvektorral történő vektoriális szorzásnak geometriai tartalma van. Konkrétabban azt mondhatjuk, hogy a szorzatvektor megkapható a második tényező egységvektorra merőleges összetevőjének derékszögű elforgatásával.
2.32. Állítás. *Legyen adott egy* $\mathbf{e}$ *egységvektor és egy azzal nem párhuzamos* $\mathbf{b}$ *vektor, amelynek az* $\mathbf{e}$*–re merőleges összetevőjét jelölje* $\mathbf{b}_m$*. Tekintsünk egy az* $\mathbf{e}$*–re merőleges* σ *síkot és vegyük abban az* $\mathbf{e}$ *által meghatározott irányítást. Ekkor az* $\mathbf{e} \times \mathbf{b}$ *vektoriális szorzat megegyezik a* $\mathbf{b}_m$ *vektor* σ*–beli* $\frac{\pi}{2}$ *szögű elforgatottjával.*
Bizonyítás.
Válasszunk a σ síkban egy O pontot. Az O kezdőpontú, $\mathbf{b}$–t reprezentáló irányított szakasz legyen $\overrightarrow{OB}$. A B–n átmenő σ–ra merőleges egyenes messe el a síkot a T pontban. Vegyük észre, hogy a $\mathbf{b}$ vektornak az $\mathbf{e}$–vel párhuzamos és az $\mathbf{e}$–re merőleges összetevőire fennáll $\mathbf{b}_p = \overrightarrow{TB}$ és $\mathbf{b}_m = \overrightarrow{OT}$. Legyen a $\varrho : \sigma \to \sigma$ leképezés a σ síknak az O körüli $\frac{\pi}{2}$ szögű elforgatása. Tekintsük a T pont $T' = \varrho(T)$ képét. Ekkor az $\overrightarrow{OT'}$ vektor azonos a $\mathbf{b}_m$ vektor $\frac{\pi}{2}$ szögű elforgatottjával.



20. ábra. *Az egységvektorral történő vektoriális szorzás szemléltetése.*

Jelölje φ az $\mathbf{e}$, $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszögét. Az $OTB\triangle$ derékszögű háromszöget alkalmazva azt kapjuk, hogy $OT = OB \cdot \sin\varphi = \|\mathbf{b}\| \cdot \sin\varphi$ ami azt mutatja, hogy az $\overrightarrow{OT'}$ vektor hossza megegyezik az $\mathbf{e} \times \mathbf{b}$ vektor hosszával.

Az $\overrightarrow{OT'}$ vektor merőleges az $\mathbf{e}$, $\mathbf{b}_m$ vektorokra, és ennek következtében merőleges $\mathbf{b}$–re is. Azt könnyű belátni, hogy az $\mathbf{e}$, $\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OT'}$ vektorok egy jobbrendszert alkotnak. Ezekből pedig következik, hogy az $\overrightarrow{OT'}$ és $\mathbf{e} \times \mathbf{b}$ vektoroknak az irányuk is megegyezik. Ily módon beláttuk, hogy fennáll $\mathbf{e} \times \mathbf{b} = \overrightarrow{OT'}$. $\square$

A következő állítás szerint a vektoriális szorzás is egy disztributív művelet.

2.33. Állítás. *Tetszőleges* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *vektorok esetén teljesül* $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

Bizonyítás.

Amennyiben $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, akkor nyilván fennáll a fenti egyenlőség.

Ezt követően feltesszük, hogy igaz $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Mint ismeretes, az $\mathbf{e} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$ kifejezés adja meg az $\mathbf{a}$–val egyező irányú egységvektort. Vegyünk egy az $\mathbf{e}$ vektorra merőleges σ síkot és abban az $\mathbf{e}$ által meghatározott irányítást.

Tekintsük a $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ vektoroknak az $\mathbf{e}$–re merőleges $\mathbf{b}_m$, $\mathbf{c}_m$, $(\mathbf{b} + \mathbf{c})_m$ összetevőit. A 2.32. Állítás szerint ezen vektorok σ–beli $\frac{\pi}{2}$ szögű elforgatottjai adják az $\mathbf{e} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{e} \times \mathbf{c}$ és $\mathbf{e} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ szorzatvektorokat. Mivel fennáll $(\mathbf{b} + \mathbf{c})_m = \mathbf{b}_m + \mathbf{c}_m$ és az egyenlőség a vektorok elforgatottjaira is teljesül, igaz az

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{e} \times \mathbf{b} + \mathbf{e} \times \mathbf{c}$$

összefüggés. Végül felsználva az $\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|\,\mathbf{e}$ kifejezést és a vektoriális szorzás eddig megismert tulajdonságait azt kapjuk, hogy fennáll

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{e}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \|\mathbf{a}\|\,(\mathbf{e} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})) = \|\mathbf{a}\|\,(\mathbf{e} \times \mathbf{b} + \mathbf{e} \times \mathbf{c}) = \\ &= (\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{e}) \times \mathbf{b} + (\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{e}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c},\end{aligned}$$

ami már igazolja az állítást. $\square$

A vektoriális szorzat kifejezése a tényezők koordinátáiból

Legyen az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektorhármas egy olyan ortonormált bázisa a szabad vektorok $\mathcal{V}$ terének, amelynek vektorai egy jobbrendszert alkotnak. Vegyük észre, hogy a 2.29. Definíció alapján ezen egységvektorok vektoriális szorzataira teljesülnek az alábbi egyenlőségek:
$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
és $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

A vektoriális szorzattal kapcsolatban megismert összefüggések alapján már igazolható az alábbi kijelentés.

2.34. Állítás. *Legyenek adva az* $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ *és* $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ *vektorok. Ezek vektoriális szorzatára fennáll*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2\,b_3 - a_3\,b_2)\,\mathbf{i} + (a_3\,b_1 - a_1\,b_3)\,\mathbf{j} + (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,\mathbf{k}.$$

Bizonyítás.

Amennyiben az előző állításban szereplő disztributivitási tulajdonságot is felhasználjuk, akkor a vektoriális szozatra az

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_1\,\mathbf{i}+a_2\,\mathbf{j}+a_3\,\mathbf{k})\times(b_1\,\mathbf{i}+b_2\,\mathbf{j}+b_3\,\mathbf{k})\\ &= (a_1\,\mathbf{i})\times(b_1\,\mathbf{i})+(a_1\,\mathbf{i})\times(b_2\,\mathbf{j})+(a_1\,\mathbf{i})\times(b_3\,\mathbf{k})+(a_2\,\mathbf{j})\times(b_1\,\mathbf{i})\\ &+ (a_2\,\mathbf{j})\times(b_2\,\mathbf{j})+(a_2\,\mathbf{j})\times(b_3\,\mathbf{k})+(a_3\,\mathbf{k})\times(b_1\,\mathbf{i})+(a_3\,\mathbf{k})\times(b_2\,\mathbf{j})+(a_3\,\mathbf{k})\times(b_3\,\mathbf{k})\\ &= a_1\,b_1(\mathbf{i}\times\mathbf{i})+a_1\,b_2(\mathbf{i}\times\mathbf{j})+a_1\,b_3(\mathbf{i}\times\mathbf{k})+a_2\,b_1(\mathbf{j}\times\mathbf{i})\\ &+ a_2\,b_2(\mathbf{j}\times\mathbf{j})+a_2\,b_3(\mathbf{j}\times\mathbf{k})+a_3\,b_1(\mathbf{k}\times\mathbf{i})+a_3\,b_2(\mathbf{k}\times\mathbf{j})+a_3\,b_3(\mathbf{k}\times\mathbf{k})\end{aligned}$$

kifejezés adódik. Eszerint az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektoriális szorzat 9 tag összegeként áll elő. Azonban egy vektornak az önmagával vett vektoriális szorzata mindig a $\mathbf{0}$ nullvektor, és emiatt a fenti kifejezésben 3 tag értéke $\mathbf{0}$. Ily módon azt nyerjük, hogy teljesül az

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= a_1\,b_2\mathbf{k}-a_1\,b_3\mathbf{j}-a_2\,b_1\,\mathbf{k}+a_2\,b_3\,\mathbf{i}+a_3\,b_1\,\mathbf{j}-a_3\,b_2\,\mathbf{i}\\ &= (a_2\,b_3-a_3\,b_2)\,\mathbf{i}+(a_3\,b_1-a_1\,b_3)\,\mathbf{j}+(a_1\,b_2-a_2\,b_1)\,\mathbf{k}.\end{aligned}$$

összefüggés, ami igazolja az állítást. □

A vektoriális szorzat kifejezése determináns alakjában a tényezők koordinátáiból

A mátrixok tanulmányozására az Algebra és számelmélet c. tárgy keretében kerül sor az egyetemi tanulmányokban. Azonban célszerűnek tűnik felidézni a 2×2–es és a 3×3–as mátrixok determinására vonatkozó alapvető kifejezéseket, mivel ezeket alkalmazzuk a geometriában.

Tekintsünk egy valós elemű 2×2–es $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ mátrixot, ahol a_{ij} $(i,\ j=1,\ 2)$ az i–edik sor j–edik eleme. Ennek determinánsán a $det\,\mathbf{A}=a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21}$ számot értjük. Az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsát az $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ formában is szokás jelölni.

Vegyünk most egy 3×3–as $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}$ mátrixot. Ennek determinánsa a

$$det\,\mathbf{B}=b_{11}(b_{22}\,b_{33}-b_{23}\,b_{32})-b_{12}(b_{21}\,b_{33}-b_{23}\,b_{31})+b_{13}(b_{21}\,b_{32}-b_{22}\,b_{31})$$

szám. Eszerint a harmadrendű négyzetes mátrix determinánsa kifejezhető a

$$det\,\mathbf{B}=b_{11}\cdot\begin{vmatrix}b_{22} & b_{23}\\ b_{32} & b_{33}\end{vmatrix}-b_{12}\cdot\begin{vmatrix}b_{21} & b_{23}\\ b_{31} & b_{33}\end{vmatrix}+b_{13}\cdot\begin{vmatrix}b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{vmatrix}$$

alakban is a 2×2–es aldeterminánsok alkalmazásával. A fenti összefüggésről azt szokás mondani, hogy a 3×3–as mátrix determinánsát az első sora alapján fejtettük ki.

Az előző 2.34. Állításból adódik, hogy két vektor vektoriális szorzatát egy harmadrendű determináns formájában is ki lehet számítani.

2.35. Következmény. *A koordinátáikkal megadott* $\mathbf{a}\,(a_1, a_2, a_3)$ *és* $\mathbf{b}\,(b_1, b_2, b_3)$ *vektorok vektoriális szorzatára teljesül az*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k}$$

összefüggés.

A vektoriális szorzásra vonatkozó alábbi eredményt a *kifejtési tételnek* hívjuk.

2.36. Tétel. *Tetszőleges* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *vektorokra igaz*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}\,.$$

Bizonyítás.
Az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisvektorokat válasszuk meg úgy, hogy az $\mathbf{a}$ vektor legyen párhuzamos $\mathbf{i}$–vel, továbbá a $\mathbf{b}$ vektor legyen párhuzamos az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ vektorok síkjával. Nem nehéz belátni azt, hogy van olyan $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázis, amelyre teljesülnek ezek a feltételek.

Ekkor az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok az

$$\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i}, \qquad \mathbf{b} = b_1\,\mathbf{i} + b_2\,\mathbf{j}, \qquad \mathbf{c} = c_1\,\mathbf{i} + c_2\,\mathbf{j} + c_3\,\mathbf{k}$$

kifejezések formájában állnak elő. Ily módon a skaláris szorzatokra a 2.29. Állítás szerint igaz $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = a_1\,c_1$ és $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = b_1\,c_1 + b_2\,c_2$. Amennyiben felhasználjuk a bázisvektorok vektoriális szorzataira vonatkozó összefüggéseket, akkor azt kapjuk, hogy teljesül

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (a_1 b_2\,\mathbf{k}) \times (c_1\,\mathbf{i} + c_2\,\mathbf{j} + c_3\,\mathbf{k}) = a_1 b_2 c_1\,\mathbf{j} - a_1 b_2 c_2\,\mathbf{i} = \\ &= a_1 b_1 c_1\,\mathbf{i} + a_1 b_2 c_1\,\mathbf{j} - a_1 b_1 c_1\,\mathbf{i} - a_1 b_2 c_2\,\mathbf{i} = \\ &= a_1 c_1\,(b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j}) - (b_1 c_1 + b_2 c_2)(a_1\,\mathbf{i}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a},\end{aligned}$$

ami már igazolja a tételt. □

Három vektor vegyes szorzata

2.37. Definíció. Legyenek adva az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok. Ezen vektorhármas vegyes szorzatán az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ számot értjük.

Megjegyzés. A vegyes szorzat elnevezés arra utal, hogy előbb egy vektoriális szorzást hajtunk végre, majd ezt követően egy skaláris szorzást.

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatát a definiáló $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ kifejezés mellett szokás még az $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ és $\mathbf{abc}$ formációkkal is jelölni. Jegyzetünkben mi csak az $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ formátumot használjuk.

A vegyes szorzat geometriai jelentése

2.38. Állítás. *Legyenek adva az* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *vektorok. Ezek lineárisan összefüggőek akkor és csak akkor, ha a vegyes szorzatukra fennáll* $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

Bizonyítás.
Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok lineárisan összefüggőek. Ekkor a 1.38. Állítás

szerint van olyan σ sík, amellyel mindhárom vektor párhuzamos. Amennyiben az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor nem egyenlő $\mathbf{0}$–val, akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges a σ síkra és ezáltal a $\mathbf{c}$ vektorra. A skaláris szorzat definíciója alapján így azt nyerjük, hogy $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$ teljesül.

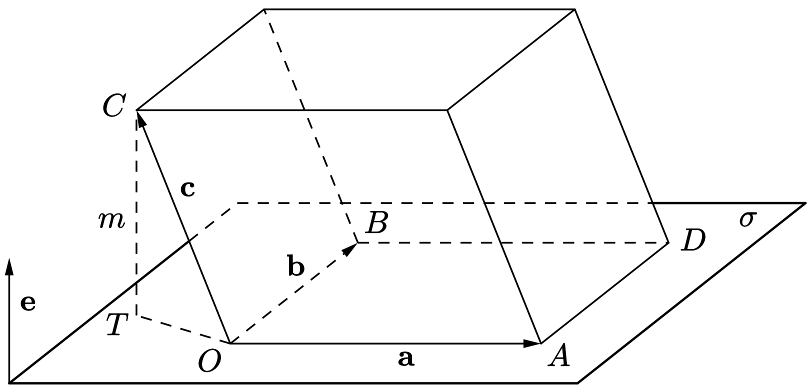
Induljunk most ki abból, hogy igaz $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = 0$. Amennyiben $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$, akkor már az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok is lineárisan összefüggőek. Ha fennáll $\mathbf{a}\times\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, akkor vegyünk egy olyan σ síkot, amely párhuzamos az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorokkal. Az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ merőleges σ–ra és a vegyes szorzat eltűnése miatt merőleges $\mathbf{c}$–re. Ennek következtében a $\mathbf{c}$ vektor is párhuzamos a σ síkkal. Ily módon a 1.38. Állításból adódik, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok lineárisan összefüggőek. □

A következő állítás arra mutat rá, a vegyes szorzat geometriai jelentést hordoz.

2.39. Állítás. *Legyenek* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *olyan vektorok, amelyek lineárisan függetlenek. Ekkor az* $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$ *szám megegyezik az* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *vektorok által kifeszített parallelepipedon térfogatával.*

Bizonyítás.

Rögzítsünk a térben egy O pontot. Vegyük azokat az O kezdőpontú $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ irányított szakaszokat, amelyek az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokat reprezentálják. Tekintsük továbbá a három irányított szakasz által kifeszített parallelepipedont. Az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektornak feleljen meg az $\overrightarrow{OD}$ irányított szakasz. Evidens, hogy az $OADB$ négyszög egy parallelogramma,



21. ábra. *Illusztráció az 2.41. Állítás bizonyításához.*

és ennek területét jelölje most t. A C csúcsból a $\sigma = \langle O, A, B\rangle$ síkhoz húzott merőleges szakasz talppontja legyen T. Az $m = TC$ hosszt szokás mondani a parallelepipedon $OADB$ laphoz tartozó magasságának. Ismeretes, hogy a parallelepipedon V_p–vel jelölt térfogatára fennáll $V_p = t\,m$.

Azt már a vektoriális szorzat tárgyalásánál megállapítottuk, hogy igaz $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = t$. Vegyük az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektorral azonos irányú $\mathbf{e} = \dfrac{1}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ egységvektort, amely merőleges az $OADB$ lap σ síkjára. Bontsuk fel a $\mathbf{c}$ vektort az $\mathbf{e}$–vel párhuzamos és az $\mathbf{e}$–re merőleges összetevőkre. Vegyük észre, hogy teljesül $\mathbf{c}_p = \overrightarrow{TC}$ és $|\mathbf{c}_p| = m$. Ugyanakkor az 2.24. Állítás alapján igaz $|\mathbf{c}_p| = |\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}|$. Ily módon az m magasságra az

$$m = |\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}| = \frac{1}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}\,|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$$

összefüggést kapjuk. Ennek következtében a parallelepipedon térfogatára fennáll a

$$V_p = t \cdot m = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot m = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$$

egyenlőség, ami már igazolja az állításunkat. □

2.40. Állítás. *Legyenek adva az* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *vektorok, amelyek lineárisan függetlenek. Ez a vektorhármas egy jobbrendszert képez akkor és csak akkor, ha a vegyes szorzatukra teljesül az* $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} > 0$ *egyenlőtlenség.*

Bizonyítás.
Vegyünk a térben egy O pontot. Legyenek A, B, C a tér azon pomtjai, melyekre fennáll $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$. Jelölje σ azt a síkot, amely tartalmazza az O, A, B pontokat. Tekintsük az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektoriális szorzatot és azt a D pontot, amelyre igaz $\overrightarrow{OD} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. A vektoriális szorzat definíciójából adódóan az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok egy jobbrendszert alkotnak, ami azt jelenti, hogy a $\mathcal{Z}(O, A, B, D)$ zászló a térbeli zászlók első osztályához tartozik.

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorhármas egy jobbrendszert képez. Vegyük észre, hogy ekkor a $\mathcal{Z}(O, A, B, C)$ zászló azonos a $\mathcal{Z}(O, A, B, D)$ zászlóval. Eszerint a C pont benne van a $[\sigma, D\rangle$ féltérben. Mivel az $\overrightarrow{OD}$ vektor merőleges σ–ra, ebből az következik, hogy a $\varphi = DOC\sphericalangle$ szög hegyesszög, azaz $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Ily módon az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok φ hajlásszögére igaz $\cos\varphi > 0$, és a skaláris szorzás definíciójából adódik, hogy fennáll $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} > 0$.

Tekintsük azt az esetet, amikor az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok egy balrendszert alkotnak. Ekkor a $\mathcal{Z}(O, A, B, C)$, $\mathcal{Z}(O, A, B, D)$ zászlókban a félterek különbözőek, tehát a C pont nincs benne a $[\sigma, D\rangle$ féltérben. Ily módon az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok $\varphi = DOC\sphericalangle$ hajlásszögére igaz $\varphi > \frac{\pi}{2}$. Ebből már következik, hogy teljesül $\cos\varphi < 0$ és $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} < 0$. □

A vegyes szorzatra vonatkozó felcserélési tétel

Az alábbi kijelentésben szereplő összefüggés, melyet *felcserélési tételnek* nevezünk, arra mutat rá, hogy a vegyes szorzat kifejezésében a vektoriális szorzás és skaláris szorzás felcserélhető.

2.41. Tétel. *Bármely* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *vektorokra fennáll* $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Bizonyítás.
Amennyiben az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok lineárisan összefüggőek, akkor $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ és $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a}$ értéke egyaránt 0, tehát igaz az egyenlőség.

Tekintsük most azt az esetet, amikor az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok lineárisan függetlenek. Vegyük észre, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$ vektorhármasok vagy mindketten jobbrendszert alkotnak, vagy mindketten balrendszert képeznek. Emiatt az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ és $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$ vegyes szorzatok előjele megegyezik.

Világos, hogy a két vektorhármas ugyanazt a paralelepipedont feszíti ki. Ennek térfogata a 2.39. Állítás szerint megegyezik a vegyes szorzatok abszolút értékével. Ebből viszont már adódik, hogy fennáll

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\,. \ \square$$

3) Síkbeli koordinátageometria

A síkbeli alakzatok vizsgálatához alkalmazni fogjuk a derékszögű koordináta–rendszert. Ezáltal az alakzatokat egyenletekkel lehet leírni és az algebra eszközeit is fel tudjuk használni a tárgyalásban.

A síkbeli koordináta–rendszer

Vegyünk a térben egy σ síkot. Emlékezzünk rá, hogy $\mathcal{V}_\sigma$ jelöli a σ–val párhuzamos szabad vektorok halmazát, amely egy 2–dimenziós altere a $\mathcal{V}$ vektortérnek.

A síkbeli derékszögű koordináta–rendszer fogalmát már a 2.11. Definióban megadtuk. Ennek megfelelően a σ síkban jelöljünk ki egy O kezdőpontot, a síkbeli vektorok $\mathcal{V}_\sigma$ terében pedig válasszunk olyan $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ egységvektorokat, amelyek merőlegesek egymásra. Mint ismeretes, az $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j})$ hármasról azt mondjuk, hogy az egy Descartes–féle koordináta–rendszert ad a σ síkban. (Lásd a 12. ábrát.)

Egy $\mathcal{V}_\sigma$–beli $\mathbf{u}$ vektor egyértelműen áll elő az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ortonormált vektorok lineáris kombinációjaként az $\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j}$ alakban. Világos, hogy amennyiben veszünk a síkban egy másik $\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j}$ vektort, akkor a két vektor skaláris szorzatára fennáll $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2$.

A síkbeli pontok koordinátáinak fogalmát már a 2.12. Definícóval bevezettük. Tekintsünk a síkban egy tetszőleges P pontot. Fejezzük ki az $\overrightarrow{OP}$ helyvektort az alapvektorok lineáris kombinációjaként az $\overrightarrow{OP} = x_P\,\mathbf{i} + y_P\,\mathbf{j}$ formában. Ezen lineáris kombinációban szereplő x_P, y_P együtthatókat a P pont $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j})$ koordináta–rendszerre vonatkozó koordinátáinak nevezzük. Az (x_P, y_P) számpárt a P ponthoz tartozó koordinátapárnak mondjuk.

A síkbeli alakzat egyenletei

A továbbiakban feltesszük, hogy a tekintett σ síkban adva van egy $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j})$ Descartes–féle koordináta–rendszer. Az alábbiak során azt fogjuk tárgyalni, hogy ezt a rögzített koordináta–rendszert véve alapul mit értünk egy síkbeli alakzat egyenletén.

Algebrai egyenleten egy olyan összefüggést értünk, amelyben van egy " = " egyenlőségjel, ami két algebrai kifejezést kapcsol össze. Ezek a kifejezések konkrét számok mellett egy vagy több ismeretlent (vagy más szóval változót) is tartalmaznak, illetve tartalmazhatnak. Az algebrai kifejezésekben a számok és a változók között a négy alapművelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) és a gyökvonás művelete szerepelhet. Az " = " egyenlőségjel által összekapcsolt két algebrai kifejezést mondjuk az egyenlet oldalainak.

Vegyünk egy olyan algebrai egyenletet, amely két ismeretlenre (vagy más szóval változóra) vonatkozik és ezeket x, y jelöli. Tegyük fel, hogy a kifejezésekben szereplő x, y ismeretlenek az $\mathbb{R}$ valós számhalmaznak lehetnek az elemei. Ekkor tekinthetjük az egyenlet két oldalának a helyettesítési értékét egy konkrét $(b_1,\ b_2)$ valós számpáron. Ezen azt értjük, hogy az algebrai kifejezésekben az x, y változók helyén a b_1 és b_2 konstansokat szerepeltetjük és ezáltal egy–egy valós számot nyerünk. Azt mondjuk, hogy a $(b_1,\ b_2)$ számpár egy megoldása az egyenletnek, illetve kielégíti az egyenletet, ha az egyenelet két oldalának az értéke megegyezik a (b_1, b_2) helyen.

A fentiek alapján már meg tudjuk adni az egyenlettel leírt alakzat fogalmát.

3.1. Definíció. Legyen adott egy olyan algebrai egyenlet, amelyben két ismeretlen x és y szerepel. Ezen egyenlettel leírt alakzaton a σ sík azon pontjainak halmazát értjük, amelyek koordinátapárjai megoldják az egyenletet.

Megjegyzés. A geometriai vizsgálatokban mi főleg olyan egyenleteket alkalmazunk, ahol az egyenelet két oldalán szereplő kifejezések olyan valós együtthatós kétváltozós polinomok, amelyekben a változók az x és y ismeretlenek. Egy ilyen egyenlet fokszámán a polinomokban szereplő legmagasabb fokú tagnak a fokszámát értjük.

Példaként vegyük az $y^3 - 4x = 4x^2 + 5$ harmadfokú egyenletet, illetve az $x^2 y^2 + 1 = x^2 + y^2$ negyedfokú egyenletet.

Megjegyzés. Könnyű belátni, hogy az $x^4 + y^4 = 1 - 2x^2 y^2$ negyedfokú egyenlettel leírt alakzat megegyezik az O centrumú és 1 sugarú körrel. Ugyanis, ezen egyenletből átrendezéssel az $(x^2 + y^2)^2 = 1$ egyenletet nyerjük.

Meg lehet mutatni, hogy az $x^2 y^2 + 1 = x^2 + y^2$ negyedfokú egyenlettel leírt alakzat négy egyenes uniója.

3.2. Definíció. A σ síkban legyen adott egy $\mathcal{A}$ alakzat. Az x és y ismeretleneket tartalmazó algebrai egyenletről azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ alakzatnak az egyik egyenlete, ha azt az $\mathcal{A}$ összes pontjának a koordinátapárja kielégíti és bármely az $\mathcal{A}$–hoz nem tartozó pontnak a koordinátapárja már nem oldja meg.

Megjegyzés. Világos, hogy amennyiben adva van egy olyan egyenlet, amely az x, y ismeretlenekre vonatkozik, akkor az egyértelműen leír egy síkbeli alakzatot a 3.1. Definíció alapján.

Azonban egyazon síkbeli alakzat több egyenlettel is leírható, tehát egy alakzatnak nem egyértelmű az egyenlete. Például az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ és $x^4 + y^4 = 1 - 2x^2 y^2$ egyenletek ugyanazt a kört írják le.

Legyen adva egy az x és y ismeretleneket tartalmazó algebrai egyenlet. Ennek megfelelő átrendezésével egy olyan egyenértékű egyenlethez juthatunk, amelynek jobb oldalán egy konstans szerepel. Nyilván azt is el tudjuk érni, hogy a kapott egyenlet jobb oldalán szereplő konstans a 0 legyen. Ez esetben a bal oldali kifejezést tekinthetjük egy olyan kétváltozós valós függvénynek, amelynek változói az x és y ismeretlenek. Ez a függvény a valós számpárok $\mathbb{R}^2$ halmazának egy D részhalmazán van értelmezve.

3.3. Definíció. Az $\mathbb{R}^2$–nek egy D részhalmazán legyen adva egy olyan $f : D \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény, melynek változói x és y. Vegyünk egy c valós számot. Az $f(x, y) = c$ egyenlettel leírt σ–beli alakzaton az $\mathcal{A} = \{ P \in \sigma \mid f(x_P, y_P) = c \}$ ponthalmazt érjük.

Ez esetben az $f(x, y) = c$ egyenletet, amelyben x és y az ismeretlenek, az $\mathcal{A}$ síkbeli alakzat egyik egyenletének mondjuk.

Megjegyzés. Tekintsük az $f(x, y) = y - \sqrt{1 - x^2}$ összefüggéssel leírt kétváltozós valós függvényt. Világos, hogy az f függvény értelmezési tartománya a $D = [-1, 1] \times \mathbb{R}$ halmaz. Látható, hogy ez esetben az $f(x, y) = 0$ egyenlet egy félkört ír le a síkban.

Az egyenes síkbeli egyenlete

A továbbiakban az egyenes egyenletével kapcsolatosan átismételjük a középiskolában már tanultakat. Tárgyalásunk során alkalmazzuk a szabad vektorokat és a skaláris szorzatot.
3.4. Definíció. Legyen adva a σ síkban egy g egyenes. Egy $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) vektort a g egyenes irányvektorának nevezünk, ha $\mathbf{v}$ párhuzamos a g egyenessel.

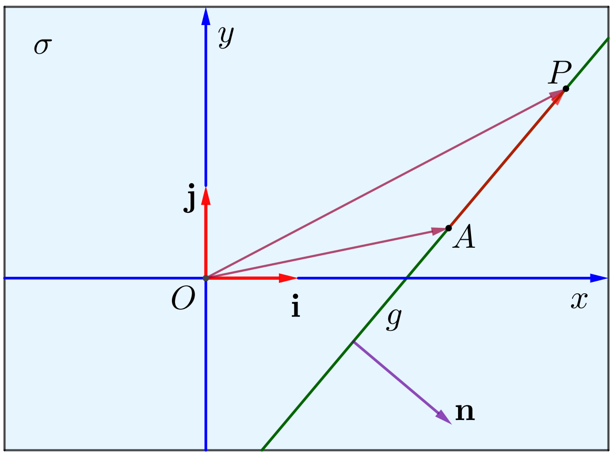
Egy $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$) vektort a g egyenes σ–beli normálvektorának mondunk, ha $\mathbf{n}$ merőleges a g egyenesre és benne van a $\mathcal{V}_\sigma$ altérben.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy amennyiben $\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j}$ egy irányvektora egy g egyenesnek, akkor bármely λ ($\lambda \neq 0$) valós szám esetén $\lambda\,\mathbf{v}$ szintén irányvektor. Emellett $\mathbf{n} = v_2\,\mathbf{i} - v_1\,\mathbf{j}$ normálvektora g–nek, mivel a skaláris szorzatra fennáll $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, tehát az $\mathbf{n}$ vektor merőleges $\mathbf{v}$–re.

Világos, hogy egy síkbeli egyenes pozícióját már egyértelműen kijelöljük azzal, ha megadjuk egy pontját, továbbá vagy egy irányvektorát vagy pedig egy síkbeli normálvektorát.
3.5. Állítás. *Legyen adva egy σ–beli A pont, amelynek koordinátái (a_1, a_2), és egy $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j}$ vektor, amelyre fennáll $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$. Tekintsük a σ síkban azt a g egyenest, amely áthalad az A ponton és merőleges az $\mathbf{n}$ vektorra. Ekkor az*

$$n_1(x - a_1) + n_2(y - a_2) = 0 \tag{3.1}$$

egyenlettel leírt σ–beli alakzat megegyezik a g egyenessel.
Bizonyítás.
Vegyünk a síkban egy tetszőleges $P\,(x_P, y_P)$ pontot. Az $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ egyenlőségből adódik, hogy igaz $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{AP} = (x_P - a_1)\mathbf{i} + (y_P - a_2)\mathbf{j}$. Könnyű belátni,



22. ábra. *A 3.5. Állítás bizonyításának szemléltetése.*

hogy a P pont rajta van a g egyenesen akkor és csak akkor, ha az $\overrightarrow{AP}$ vektor merőleges az $\mathbf{n}$–re. Az $\overrightarrow{AP}$ és $\mathbf{n}$ vektorok pedig pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha a skaláris szorzatukra fennáll $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$. Alkalmazzuk most a skaláris szorzat kiszámítására vonatkozó 2.27. Állítást. Ily módon azt kapjuk, hogy a P pont illeszkedik a g egyenesre akkor és csak akkor, ha a koordinátáival fennáll az

$$n_1(x_P - a_1) + n_2(y_P - a_2) = 0$$

összefüggés. Ez a tény pedig igazolja az állítást. $\square$

Tekintsünk a síkbeli g egyenesnek egy $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ irányvektorát. Vegyük az $\mathbf{n} = v_2\mathbf{i} - v_1\mathbf{j}$ vektort, amely merőleges $\mathbf{v}$–re, és ezáltal merőleges a g egyenesre is. A 3.4. Állítás következtében az alábbi kijelentést tehetjük.

3.6. Következmény. *Legyen adott a σ síkban egy g egyenes, amely áthalad az $A\,(a_1, a_2)$ ponton és párhuzamos a $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ vektorral. Ez esetben a*

$$v_2(x - a_1) - v_1(y - a_2) = 0 \tag{3.2}$$

egyenlet a g egyenest írja le.

Az alábbi állítás azt mondja ki, hogy a lineáris egyenlet egy egyenest ír le a síkban.

3.7. Állítás. *Legyenek a, b és c olyan valós számok, melyekre igaz $a^2 + b^2 > 0$. Az $a\,x + b\,y + c = 0$ egyenlettel leírt síkbeli alakzat megegyezik azzal az egyenessel, amelynek egy normálvektora az $\mathbf{n} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$ vektor és amely áthalad az $\overrightarrow{OT} = -\dfrac{c}{|\mathbf{n}|^2}\,\mathbf{n}$ helyvektorral meghatározott T ponton.*

Bizonyítás.

Vegyük észre, hogy az állításban szereplő T pont (x_T, y_T) koordinátáira fennáll

$$x_T = \frac{-a\,c}{a^2 + b^2}, \qquad y_T = \frac{-b\,c}{a^2 + b^2}\,.$$

Ennek következtében azt kapjuk, hogy $a\,x_T + b\,y_T = -c$ teljesül. Eszerint a T pont egy eleme az $a\,x + b\,y + c = 0$ egyenlettel leírt alakzatnak.

Tekintsük azt a g egyenest, amely illeszkedik a T pontra és merőleges az $\mathbf{n}$–re. A 3.5. Állításból adódik, hogy az $a\,(x - x_T) + b\,(y - y_T) = 0$ egyenlet ezt az egyenest írja le. Mivel a T pont koordinátáira fennáll az $a\,x_T + b\,y_T = -c$ egyenlőség, ebből az $a\,x + b\,y + c = 0$ egyenletet nyerjük. $\square$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a 3.7. Állításban szereplő T pont megegyezik az O kezdőpontból a g egyeneshez húzott merőleges szakasz talppontjával.

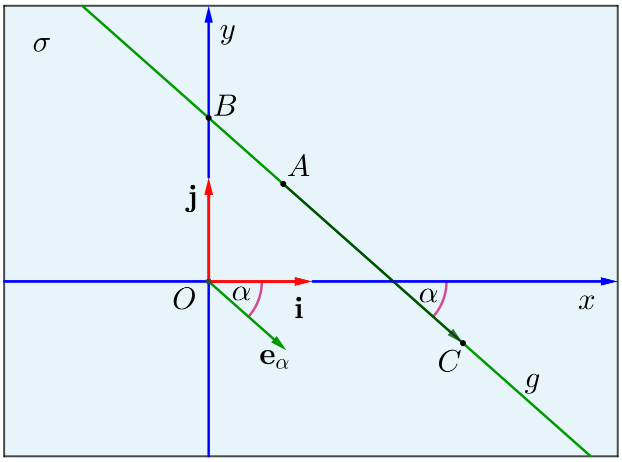
Megjegyzés. Legyen adva a síkban egy g egyenes, amelyet az $a\,x + b\,y + c = 0$ egyenlet ír le. Vegyük a síknak egy tetszőleges $P(x_P, y_P)$ pontját. Ennek a g egyenestől mért távolságát az alábbi eljárással lehet meghatározni. Válasszunk ki egy A pontot g–n. Az $\overrightarrow{AP}$ vektort állítsuk elő az $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ normálvektorral párhuzamos és arra merőleges összetevők összegeként. Világos, hogy a párhuzamos összetevő hossza megegyezik a P–nek a g–től mért $d(g, P)$ távolságával. Közvetlen számolással azt kapjuk, hogy a távolságra fennáll a $d(g, P) = \dfrac{|\,a\,x_P + b\,y_P + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ összefüggés.

Az egyenes iránytényezős egyenlete

Legyen adva egy α $(-\pi < \alpha \leq \pi)$ előjeles szögmérték. Jelölje $\mathbf{e}_\alpha$ az $\mathbf{i}$ alapvektornak az α szögű elforgatottját az O körül. Világos, hogy ezen $\mathbf{e}_\alpha$ egységvektorra fennáll
$\mathbf{e}_\alpha = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \sin\alpha\,\mathbf{j}$.

3.8. Definíció. Legyen adva a síkban egy g egyenes. Ennek irányszögén azt az α $(-\pi/2 < \alpha \leq \pi/2)$ előjeles szögmértéket értjük, amelyre igaz, hogy az $\mathbf{e}_\alpha$ egységvektor egy irányvektora g–nek.

Világos, hogy bármely g egyeneshez egyértelműen hozzárendelhető egy olyan α irányszög, amely a $(-\pi/2, \pi/2]$ intervallumba esik.



23. ábra. *Egy síkbeli g egyenes, melynek α irányszöge negatív előjelű.*

Amennyiben a tekintett g egyenes nem párhuzamos a $\mathbf{j}$ alapvetorral, vagyis $\alpha \neq \pi/2$, akkor a $\mathbf{w} = \dfrac{1}{\cos\alpha}\,\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{i} + \operatorname{tg}\alpha\,\mathbf{j}$ vektor is egy irányvektora g–nek. Ez szintén egy speciális irányvektornak tekinthető, mivel az első koordinátája 1.

3.9. Definíció. Tekintsünk a síkban egy olyan g egyenest, amely nem párhuzamos a $\mathbf{j}$ alapvetorral és amelynek α az irányszöge. A g egyenes meredekségén az $m = \operatorname{tg}\alpha$ valós számot értjük.

Legyen adott egy olyan g egyenes, amely nem párhuzamos az y tengellyel. Ha a g meredeksége m, akkor a fentiek alapján a $\mathbf{w} = \mathbf{i} + m\,\mathbf{j}$ vektor egy irányvektora g–nek. Vegyük a g egyenesnek egy $A(a_1, a_2)$ pontját. A (3.2) összefüggés szerint a g egyenes leírható az $m(x - a_1) - (y - a_2) = 0$ egyenlettel, amelyből átrendezéssel az
$y = m(x - a_1) + a_2$ egyenletet nyerjük.

Tekintsük a g–nek és az $x = 0$ egyenletű y tengelynek a B–vel jelölt metszéspontját, melynek koordinátapárja $(0, b)$. Világos, hogy a g egyenest leíró előző egyenlet az

$$y = m\,x + b \tag{3.3}$$

alakot veszi fel. Ezt nevezik az egyenes iránytényezős egyenletének.

Amennyiben a g egyenesnek adva van egy $\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j}$ irányvektora, akkor a $\mathbf{w} = \frac{1}{v_2}\,\mathbf{v} = \mathbf{i} + \frac{v_1}{v_2}\,\mathbf{j}$ kifejezésből adódik, hogy a meredekségére fennáll $m = v_2/v_1$.

A síkbeli egyenest két pontja is egyértelműen meghatározza. Tegyük fel, hogy egy g egyenesnek adva van két pontja $A(a_1, a_2)$ és $C(c_1, c_2)$ a koordinátáival. (Lásd a 23. ábrát.) Ekkor $\overrightarrow{AC} = (c_1 - a_1)\,\mathbf{i} + (c_2 - a_2)\,\mathbf{j}$ az egyik irányvektora a g egyenesnek. Ily módon a g egyenes (2.2) irányvektoros egyenlete felírható a

$$(c_2 - a_2)(x - a_1) - (c_1 - a_1)(y - a_2) = 0$$

alakban. Emellett az g egyenes meredekségére teljesül $m = \dfrac{c_2 - a_2}{c_1 - a_1}$.

Az egyenesek síkbeli állását (vagy más szóval az irányukat) az irányszögük, illetve a meredekségük határozza meg. Legyenek adva a síkban az y tengellyel nem párhuzamos g, h egyenesek. Ezek meredekségét jelölje m_1 és m_2.

Világos, hogy *a két egyenes párhuzamos egymással akkor és csak akkor, ha a meredekségük egyenlő, vagyis ha igaz* $m_1 = m_2$.

Tegyük fel, hogy a g, h egyenesek metszőek. Tekintsük az egyenesek $\mathbf{w}_1 = \mathbf{i} + m_1\,\mathbf{j}$ és $\mathbf{w}_2 = \mathbf{i} + m_2\,\mathbf{j}$ speciális irányvektorait. Nyilvánvaló, hogy a két egyenes pontosan akkor merőleges egymásra, ha $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ vektorok skaláris szorzata 0. Mivel a szorzatra $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = 1 + m_1\,m_2$ adódik, az alábbi jólismert megállapítást tehetjük. *A két egyenes merőleges egymásra akkor és csak akkor, ha a meredekségükre fennáll az* $m_1\,m_2 = -1$ *összefüggés.*

A két egyenes szöge tetszőleges esetben is meghatározható az alábbi állítás szerint.

3.10. Állítás. *A metsző g, h egyenesek φ hajlásszögének koszinuszára igaz a* $\cos\varphi = \dfrac{|\,m_1\,m_2 + 1\,|}{\sqrt{1 + (m_1)^2}\,\sqrt{1 + (m_2)^2}}$ *egyenlőség.*

Bizonyítás.
Az egyenesek $\mathbf{w}_1 = \mathbf{i} + m_1\,\mathbf{j}$ és $\mathbf{w}_2 = \mathbf{i} + m_2\,\mathbf{j}$ irányvektorainak szögét jelölje ϱ. A skaláris szorzat definíciója alapján azt kapjuk, hogy ϱ koszinuszára fennáll

$$\cos\varrho = \frac{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_1\| \cdot \|\mathbf{w}_2\|} = \frac{1 + m_1\,m_2}{\sqrt{1 + (m_1)^2}\,\sqrt{1 + (m_2)^2}}\,.$$

Amennyiben a ϱ szög nem tompaszög, akkor $\varphi = \varrho$. Ha viszont a ϱ tompaszög, akkor a két egyenes φ szögére fennáll $\varphi = 180° - \varrho$. Tehát mindkét esetben teljesül $\cos\varphi = |\cos\varrho|$, ami már igazolja az állítást. □

Megjegyzés. Fontos megjegyezni, hogy nem értelmezhető azon egyenesek meredeksége, amelyek párhuzamosak a $\mathbf{j}$ alapvektorral. Emiatt ezek nem írhatóak le a (3.3) iránytényezős egyenlettel.

Vegyünk egy olyan e egyenest, amely párhuzamos az y tengellyel. Az e metssze el az x koordinátatengelyt a $C(c, 0)$ pontban. Nyilvánvaló, hogy az $x - c = 0$ egyenlet az e egyenest írja le.

A kör normálegyenlete a síkban

A továbbikban felidézzük, hogy a kört melyik egyenletével szokás leírni. Mint ismeretes, ha adva van egy C pont és egy r pozitív valós szám, akkor a σ síkbeli C centrumú és r sugarú körvonalon a $k_\sigma(C,r) = \{\, P \in \sigma \mid CP = r \,\}$ alakzatot értjük. Köztudott, hogy igaz az alábbi kijelentés.

3.11. Állítás. *Legyen adva egy síkbeli $C\,(c_1, c_2)$ pont és egy r pozitív szám. Ekkor az*

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 - r^2 = 0 \tag{3.4}$$

egyenlet a $k_\sigma(C,r)$ körvonalat írja le.

Bizonyítás.

Tekintsük a síknak egy $P(x_P, y_P)$ pontját. Világos, hogy P rajta van a körön akkor és csak akkor, ha a CP hosszra igaz $CP^2 = r^2$. Vegyük a $\overrightarrow{CP} = (x_P - c_1)\,\mathbf{i} + (y_P - c_2)\,\mathbf{j}$ vektort. Ismeretes, hogy a $\overrightarrow{CP}$ vektornak az önmagával vett skaláris szorzata a CP^2 érték. Ezerint a P pontosan akkor van rajta a körön, ha koordinátáival fennáll az

$$(x_P - c_1)^2 + (y_P - c_2)^2 = r^2$$

egyenlőség. Ez pedig éppen akkor teljesül, ha a P pont koordinátapárja az egyik megoldása a (3.4) egyenletnek. $\square$

Megjegyzés. Az előbbi állításban szereplő (3.4) egyenletet a $k_\sigma(C,r)$ körvonal normálegyenletének nevezzük.

Az ellipszis kanonikus egyenlete

Célszerűnek tartjuk felidézni az ellipszis fogalmát.

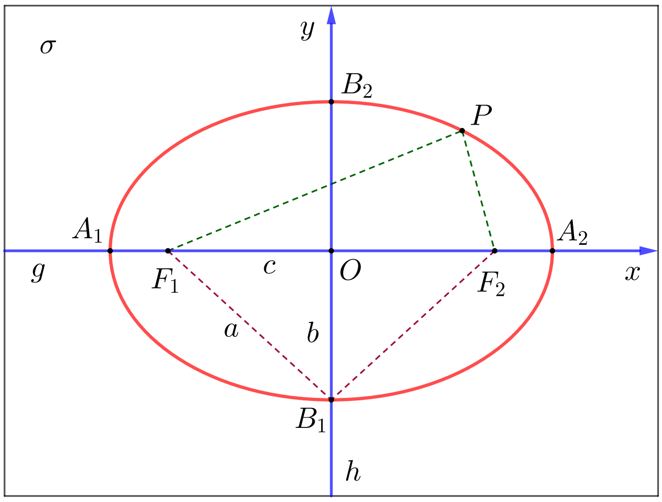
3.12. Definíció. A σ síkban legyenek adva az F_1, F_2 pontok és egy a pozitív valós szám, amelyre fennáll $2a > F_1F_2$. Az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a$ nagytengelyhosszal meghatározott σ–beli ellipszisen a sík azon pontjainak halmazát értjük, melyeknél a fókuszpontoktól mért távolságok összege $2a$.

Megjegyzés. A fenti definíciót a következő formában is kimondhatjuk. Az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a$ nagytengelyhosszal meghatározott σ–beli ellipszisen az $\mathcal{E} = \{\ P \in \sigma \mid F_1P + F_2P = 2a\ \}$ alakzatot értjük.

Megjegyzés. Amennyiben az F_1, F_2 fókuszpontok egybeesnek ($F_1 = F_2$), akkor a fenti definícióval leírt ellipszis megegyezik egy a sugarú körrel.

A σ síkban vegyünk egy valódi ellipszist, amelynek fókuszpontjai F_1, F_2 ($F_1 \neq F_2$) és nagytengelyhossza $2a$. Könnyű belátni, hogy a $g = \langle\, F_1, F_2 \,\rangle$ egyenesre és az $\overline{F_1F_2}$ szakasz h felező merőlegesére való tükrözés az ellipszist önmagába viszi. Emiatt ezeket a g, h egyeneseket az ellipszis szimmetriatengelyeinek nevezzük. Az $\overline{F_1F_2}$ szakasz felezőpontja legyen O. Világos, hogy az O pontra történő tükrözés is önmagába képezi az ellipszist. Az O pontot az ellipszis centrumának (vagy középpontjának) mondjuk.

A két fókuszon átmenő $g = \langle\, F_1, F_2 \,\rangle$ egyenesen vegyük azon A_1, A_2 pontokat, amelyekre fennáll $OA_1 = a$, $OA_2 = a$. Nyilvánvaló, hogy az A_1, A_2 pontok esetében a fókuszoktól



24. ábra. *Ellipszis az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a = A_1A_2$ nagytengelyhosszal.*

mért távolságok összege $2a$, tehát rajta vannak az ellipszisen. A $2a$ hosszúságú $\overline{A_1A_2}$ szakaszt az ellipszis nagytengelyének nevezzük. (Lásd a 24. ábrát.)

Tekintsük azon B_1, B_2 pontokat, amelyek a két fókuszponttól egyaránt a távolságra vannak. Kézenfekvő, hogy B_1 és B_2 az ellipszis azon pontjai, amelyek az $\overline{F_1F_2}$ szakasz h felező merőlegesére esnek. A $\overline{B_1B_2}$ szakaszt az ellipszis kistengelyének mondjuk. Jelölje b a kistengely hosszának felét (azaz legyen $b = \frac{1}{2}\, B_1B_2$), c pedig a fókuszpontok távolságának felét (azaz legyen $c = \frac{1}{2}\, F_1F_2$). Az $F_1OB_1\triangle$ derékszögű háromszög alapján az $a^2 = b^2 + c^2$ összefüggést nyerjük.

A síkban vegyük azt az $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j})$ Descartes–féle koordináta–rendszert, ahol az O megegyezik az ellipszis centrumával, az $\mathbf{i}$ egységvektor párhuzamos a nagytengellyel és a $\mathbf{j}$ alapvektor párhuzamos a kistengellyel. Eszerint az x, y koordinátatengelyek az ellipszisnek a szimmetriatengelyei.

Az ellipszis egyenlete egyszerű formában megadható az alábbi állítás szerint.

3.13. Állítás. *A σ sík egy P pontja rajta van az ellipszisen akkor és csak akkor, ha a P koordinátái kielégítik az*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.5}$$

egyenletet.

Bizonyítás.

Az $\mathbf{i}$ egységvektort válasszuk meg oly módon, hogy $\mathbf{i}$ legyen egyező irányú az $\overrightarrow{OF_2}$ vektorral. Ekkor a fókuszpontok koordinátái $F_1(-c, 0)$ és $F_2(c, 0)$. Vegyük a síknak egy $P(x, y)$ pontját. Világos, hogy P–nek a fókuszoktól mért távolságára igaz $F_1P = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ és $F_1P = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Tegyük fel, hogy a $P(x, y)$ pont rajta van az ellipszisen. Ez nyilván azt jelenti, hogy a

P koordinátáira fennáll

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a\,. \tag{3.6}$$

Vegyük észre, hogy fenti összefüggés egyenértékű az

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,\right)^2=4a^2 \tag{3.7}$$

egyenlettel. Ennek bal oldalát kifejtve

$$2(x^2+y^2+c^2)+2\sqrt{((x+c)^2+y^2)((x-c)^2+y^2)}=4a^2$$

adódik. Mivel a négyzetgyök alatt szereplő kifejezésre fennáll

$$((x+c)^2+y^2)((x-c)^2+y^2)=((x^2+y^2+c^2)+2xc)((x^2+y^2+c^2)-2xc)=(x^2+y^2+c^2)^2-4x^2c^2,$$

a (3.7) összefüggésből a

$$\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4x^2c^2}=2a^2-(x^2+y^2+c^2) \tag{3.8}$$

egyenlőséget kapjuk. Ebből az újbóli négyzetreemeléssel az

$$(x^2+y^2+c^2)^2-4x^2c^2=4a^4-4a^2(x^2+y^2+c^2)+(x^2+y^2+c^2)^2 \tag{3.9}$$

összefüggést nyerjük. Egyszerűsítést és átrendezést követően (3.9)–ből a vele egyenértékű

$$4(a^2-c^2)x^2+4a^2y^2=4a^2(a^2-c^2) \tag{3.10}$$

egyenlethez jutunk. Mint ismeretes, a kistengely b félhosszára fennáll $b^2=a^2-c^2$. Ha a (3.10) egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk $4\,a^2\,b^2$ pozitív szám reciprokával, akkor azt kapjuk, hogy a $P(x,y)$ pont koordinátáira fennáll a

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{3.5}$$

összefüggés.

Hátramaradt még annak igazolása, hogy csakis az ellipszis pontjainak koordinátapárjai oldják meg a (3.5) egyenletet. Vegyünk egy olyan $P(x,y)$ pontot, melynek koordinátáira fennáll a (3.5) összefüggés. Azt kellene megmutatni, hogy ekkor a (3.6) egyenlőség is teljesül, vagyis a P pontra fennáll $F_1P+F_2P=2a$.

A (3.5) egyenlőség következtében nyilván igazak az $x^2\le a^2$ és $y^2\le b^2$ egyenlőtlenségek. Belátható, hogy a fenti összefüggések az alábbi sorrendben következnek egymásból:
(3.5) $\Longrightarrow$ (3.10) $\Longrightarrow$ (3.9) $\Longrightarrow$ (3.8) $\Longrightarrow$ (3.7) $\Longrightarrow$ (3.6).
Ennek kapcsán felvetődik a kérdés, hogy miért következik a (3.9) egyenlőségből (3.8). Vegyük észre, hogy a fenti egyenlőtlenségek miatt a (3.8) jobb oldalán szereplő kifejezésre teljesül

$$2a^2-(x^2+y^2+c^2)=(a^2-x^2)+(b^2-y^2)>0\,.$$

Emiatt a (3.8) egyenlőség mindkét oldalán pozitív érték szerepel, tehát a (3.9) összefüggésből gyökvonással (3.8) adódik. Ezzel bizonyítást nyert az állítás. □

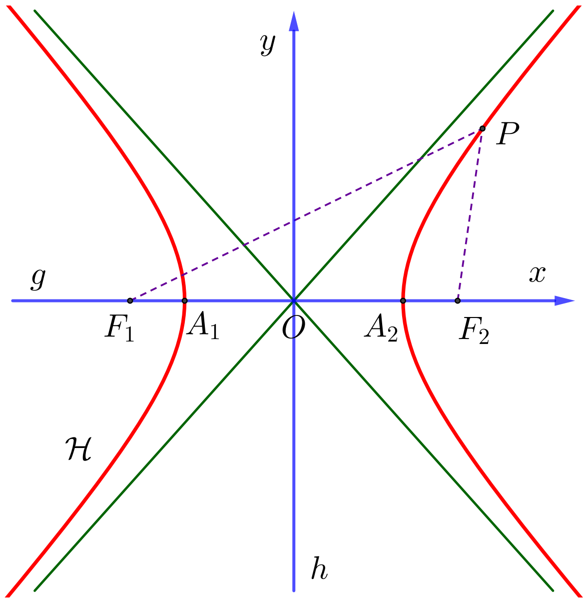
Megjegyzés. Az előző állítás szerint amennyiben a síkbeli koordináta-rendszert úgy választjuk meg, hogy annak tengelyei essenek egybe az ellipszis szimmetriatengelyeivel, akkor az ellipszist az $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ egyenlet írja le. Ezt szokás az ellipszis kanonikus (vagy más szóval középponti) egyenletének nevezni.

A hiperbola kanonikus egyenlete

Először idézzük fel a hiperbola fogalmát.

3.14. Definíció. Egy σ síkban legyenek adva az F_1, F_2 pontok és egy a pozitív valós szám, amelyre fennáll $2a < F_1F_2$. Az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a$ valós tengelyhosszal meghatározott σ–beli hiperbolán a sík azon pontjainak halmazát értjük, melyeknél a fókuszpontoktól mért távolságok különbségének az abszolút értéke $2a$.

Megjegyzés. A fenti definíciót a következő formában is kimondhatjuk. Az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a$ valós tengelyhosszal meghatározott σ–beli hiperbolán a
$\mathcal{H} = \{\ P \in \sigma \mid |F_1P - F_2P| = 2a\ \}$ alakzatot értjük.



25. ábra. *Hiperbola az F_1, F_2 fókuszpontokkal és a $2a = A_1A_2$ valós tengelyhosszal.*

A σ síkban tekintsünk egy hiperbolát, amelynek fókuszpontjai F_1 és F_2, a tengelyhossza pedig $2a$. Akárcsak az ellipszis esetében, ezúttal is alkalmazzuk a $c = \frac{1}{2}\,F_1F_2$ jelölést. Könnyen be lehet látni, hogy a $g = \langle\, F_1, F_2 \,\rangle$ egyenes és az $\overline{F_1F_2}$ szakasz h felezőmerőleges egyenese egyaránt szimmetriatengelye a hiperbolának. A hiperbola szimmetriacentruma az $\overline{F_1F_2}$ szakasz O felezőpontja lesz, mivel az O–ra történő tükrözés önmagába viszi a hiperbolát.

A $g = \langle F_1, F_2 \rangle$ egyenesen vegyük azon A_1, A_2 pontokat, amelyekre fennáll $OA_1 = a$, $OA_2 = a$. A definíció alapján azonnal adódik, hogy az A_1, A_2 pontok rajta vannak a hiperbolán. A $2a$ hosszúságú $\overline{A_1A_2}$ szakaszt mondjuk a hiperbola valós tengelyének. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy az $\overline{F_1F_2}$ szakasz h felezőmerőlegesén a hiperbolának nincs pontja.

A hiperbolának az egyik fókuszhoz közelebbi pontjai alkotják a hiperbola egyik ágát. A hiperbola két ágát a h egyenes elválasztja egymástól.

A fókuszpontok távolságának felét jelölje c, azaz legyen $c = \dfrac{1}{2}F_1F_2$. Tekintsük a $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ összefüggéssel meghatározott b pozitív számot. A $2b$ hosszt nevezik a hiperbola képzetes tengelyhosszának.

A hiperbola síkjában vegyünk egy olyan $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j})$ derékszögű koordináta–rendszert, ahol az O kezdőpont megegyezik a hiperbola centrumával, az $\mathbf{i}$ egységvektor pedig párhuzamos a fókuszpontok egyenesével. Világos, hogy ez esetben az x, y koordinátatengelyek a hiperbolának szimmetriatengelyei. (Lásd a 25. ábrát.)

A 3.13. Állítás bizonyításának lépéseit követve igazolni lehet az alábbi kijelentést, amely megadja a hiperbola egyik egyenletét.

3.15. Állítás. *A sík egy P pontja rajta van a hiperbolán akkor és csak akkor, ha a P koordinátái kielégítik az* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *egyenletet.*

Megjegyzés. Az előző állítás szerint amennyiben a síkbeli koordináta–rendszert úgy választjuk meg, hogy annak tengelyei essenek egybe a hiperbola szimmetriatengelyeivel, akkor a hiperbolát az $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ egyenlet írja le. Ezt nevezik a hiperbola kanonikus (vagy más szóval középponti) egyenletének.

A parabola kanonikus egyenlete

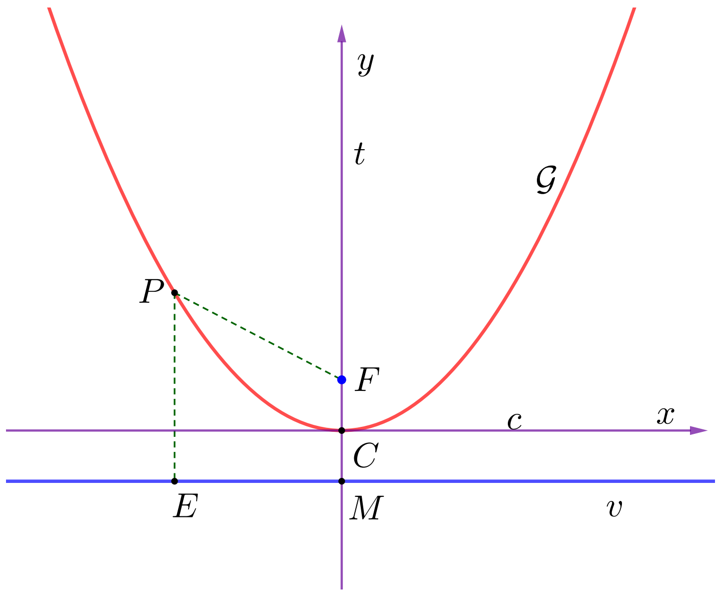
3.16. Definíció. Egy σ síkban legyen adva egy F pont és egy az F–re nem illeszkedő v egyenes. Az F fókuszponttal és a v vezéregyenessel meghatározott parabolán a sík azon pontjainak halmazát értjük, melyeknek a F fókusztól mért távolsága megegyezik a v egyenestől mért távolsággal.

Megjegyzés. A sík egy P pontjának a v egyenestől való távolságát jelölje $d(v, P)$. A fenti definíciót a következő formában is kimondhatjuk. Az F fókuszpontokkal és a v vezéregyenessel meghatározott σ–beli parabolán a
$\mathcal{G} = \{\ P \in \sigma \mid FP = d(v, P)\ \}$ alakzatot értjük.

Megjegyzés. A parabola vezéregyenesét szokás direktrixnek is nevezni.

3.17. Definíció. A síkban legyen adva egy parabola, melynek fókuszpontja F és vezéregyenese v. Az F fókuszpont és a v egyenes $p = d(v, F)$ távolságát a parabola paraméterének mondjuk.

A σ síkban vegyünk egy parabolát, amelynek fókuszpontja F és vezéregyenese v. Legyen t az az egyenes, amely áthalad az F ponton és merőleges v–re. Nyilvánvaló, hogy



26. ábra. *Az F fókuszponttal és a v vezéregyenessel $\mathcal{G}$ meghatározott parabola.*

a t egyensre történő tükrözés az F fókuszt fixen hagyja és a v–t önmagába képezi, tehát a parabolát önmagába viszi. Emiatt a t egyenest a parabola szimmetriatengelyének (rövidebben a parabola tengelyének) nevezzük.

Az egymásra merőleges t, v egyenesek metszéspontja legyen M. Világos, hogy az $\overline{FM}$ szakasz hossza megegyezik a parabola p paraméterével, vagyis fennáll $p = FM$. Jelölje C az $\overline{FM}$ szakasz felezőpontját. A definícióból adódik, hogy C a t tengely azon pontja, amelyet a parabola tartalmaz. Ezen C pontot a parabola csúcspontjának vagy tengelypontjának nevezzük. (Lásd a 26. ábrát.)

Vegyük azt a σ–beli $(O, \ \mathbf{i}, \ \mathbf{j})$ Descartes–féle koordináta–rendszert, ahol az O megegyezik a parabola C csúcspontjával (vagyis $O = C$) az $\mathbf{i}$ egységvektor párhuzamos a v vezéregyenessel és a $\mathbf{j}$ alapvektor megegyező irányú a $[C, F\rangle$ félegyenessel. A parabola egyenletét könnyen meg lehet határozni ebben a speciális koordináta–rendszerben.

3.18. Állítás. *A σ sík egy P pontja rajta van a p paraméterű parabolán akkor és csak akkor, ha P koordinátái kielégítik a* $2\,p\,y = x^2$ *egyenletet.*

Bizonyítás.
Világos, hogy a választott koordináta–rendszerben az F fókusz koordinátái $(0, p/2)$ és a v vezéregyenest az $y = -p/2$ egyenlet írja le.

Tekintsük a sík egy $P(\tilde{x}, \tilde{y})$ pontját. A P pontnak az F–től mért távolsága $FP = \sqrt{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - p/2)^2}$. A P pontból a v–hez húzott merőleges szakasz talppontját jelölje E. Látható, hogy az E koordinátái $(\tilde{x}, -p/2)$. Mivel fennáll $\overrightarrow{EP} = (\tilde{y} + p/2)\,\mathbf{j}$, a P pontnak a v egyenestől mért távolságára igaz $d(v, P) = EP = |\tilde{y} + p/2|$.

A P pont rajta van a parabolán akkor és csak akkor, ha a távolságokra $FP^2 = EP^2$

teljesül. Ennek pedig megfelel az

$$\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - p/2)^2 = (\tilde{y} + p/2)^2$$

egyenlőség. Ha az egyenlet mindkét oldalából kivonjuk a jobb oldalalon szereplő kifejezést, akkor az

$$\tilde{x}^2 - 2\,p\,\tilde{y} = 0 \tag{3.11}$$

egyenlőséghez jutunk. Tehát a P pont pontosan akkor van rajta a parabolán, ha a koordinátáira teljesül a (3.11) összefüggés, ami már igazolja az állítást. □

Megjegyzés. A fenti állításban szereplő $x^2 - 2\,p\,y = 0$ egyenletet a parabola kanonikus (vagy más szóval csúcsponti) egyenletének mondják.

4) Térbeli koordinátageometria

A térbeli Descartes–féle koordináta–rendszer értelmezése

A tér koordinátázása a síkbeli esethez hasonlóan történik. Ehhez fel kell vennünk a térben egy koordináta–rendszert.

4.1. Definíció. Legyen adott a térnek egy O pontja és a szabad vektorok terének egy $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ortonormált bázisa. Az $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$ négyesről azt mondjuk, hogy az a térnek egy Descartes–féle koordináta–rendszerét képezi.

Az O–t a koordináta–rendszer kezdőpontjának (vagy origójának), a három vektort pedig a koordináta–rendszer alapvektorainak (vagy élvektorainak) nevezzük.

Megjegyzés. Legyenek E_1, E_2, E_3 azok a térbeli pontok, melyekre fennáll $\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{i}$, $\overrightarrow{OE_2} = \mathbf{j}$ és $\overrightarrow{OE_3} = \mathbf{k}$. Az $\langle O, E_1\rangle$, $\langle O, E_2\rangle$ és $\langle O, E_3\rangle$ egyeneseket az $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$ koordináta–rendszer tengelyeinek mondjuk. Ezekre szokás az x–tengely, y–tengely és z–tengely elnevezéseket is használni.

A tengelyeket irányított egyeneseknek tekintjük oly módon, hogy az irányításokat az $[O, E_1\rangle$, $[O, E_2\rangle$ és $[O, E_3\rangle$ félegyenesekkel adjuk meg.

Megjegyzés. A Descartes–féle koordináta–rendszer helyett szokás használni a derékszögű koordináta–rendszer elnevezést is.

Célszerű a koordináta–rendszer $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ alapvektorait úgy megválasztani, hogy azok ebben a sorrendben egy jobbrendszert alkossanak.

Legyen adott egy $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$ Descartes–féle koordináta–rendszer. Tekintsünk a térben egy tetszőleges P pontot. Mint ismeretes, a $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$ vektort mondjuk a P pont O–ra vonatkozó helyvektorának.

4.2. Definíció. Fejezzük ki az $\overrightarrow{OP}$ helyvektort az alapvektorok lineáris kombinációjaként az $\overrightarrow{OP} = x_P\,\mathbf{i} + y_P\,\mathbf{j} + z_P\,\mathbf{k}$ alakban. Ezen lineáris kombinációban szereplő x_P, y_P, z_P együtthatókat a P pont $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$ koordináta–rendszerre vonatkozó koordinátáinak mondjuk. Az (x_P, y_P, z_P) számhármast a P ponthoz tartozó koordináta–hármasnak nevezzük.

Megjegyzés. Egy térbeli P pont koordinátáinak feltüntetésére a $P\,(x_P, y_P, z_P)$ jelölést fogjuk használni.

Ezt követően mindig feltesszük, hogy a térben adva van egy $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$ *Descartes–féle koordináta–rendszer, melyet a tárgyalásaink során alkalmazunk.*

4.3. Definíció. Azt a $\xi : X \to \mathbb{R}^3$ leképezést, ahol tetszőleges $P \in X$ pont esetén fennáll $\xi(P) = (x_P, y_P, z_P)$, a tér koordinátázásának mondjuk.

Az alábbi kijelentés teljesülése nyilvánvaló, ezért nem bizonyítjuk.

4.4. Állítás. *A* $\xi : X \to \mathbb{R}^3$ *koordinátázás egy bijektív leképezés.*

Alakzat leírása a koordinátákra vonatkozó egyenlettel

Az egyenlettel leírt térbeli alakzat fogalmát a síkbeli esetnek megfelelően értelmezzük.

4.5. Definíció. Legyen adott egy olyan algebrai egyenlet, amelyben három ismeretlen x, y és z szerepel. Ezen egyenlettel leírt alakzaton a tér azon pontjainak halmazát értjük, amelyek koordinátahármasai megoldják az egyenletet.

Megjegyzés. A pont koordinátahármasa megoldja az egyenletet helyett szokás azt is mondani, hogy *a pont koordinátái kielégítik az egyenletet.*

Az egyenlet ekvivalens átalakításával (konrétan egy kivonással) el lehet érni, hogy az egyenlet jobb oldalán csak egy szám, vagyis egy konstans álljon. Ekkor a kapott egyenlet bal oldalán szereplő algebrai kifejezésnek meg lehet felelteni egy háromváltozós f valós függvényt. Emiatt be lehet vezetni a következő fogalmat is.

4.6. Definíció. Legyen adva egy $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ háromváltozós valós függvény, amelynek változói x, y és z. Vegyünk egy $c \in \mathbb{R}$ számot. Az $f(x, y, z) = c$ egyenlettel leírt alakzaton az $\mathcal{A} = \{ P \in X \mid f(x_P, y_P, z_P) = c \}$ ponthalmazt érjük.

Megjegyzés. Az előző definíció szerint az $f(x, y, z) = c$ egyenlettel leírt $\mathcal{A}$ alakzatot a tér azon pontjai alkotják, amelyek koordinátái kielégítik az egyenletet.

Megjegyzés. Az alakzat egyenlettel való leírásánál a c konstans értékét célszerű 0–nak választani. Vegyük észre, hogy ekkor tetszőleges λ ($\lambda \neq 0$) szám mellett az $f(x, y, z) = 0$ és $\lambda \cdot f(x, y, z) = 0$ egyenletek ugyanazt az alakzatot írják le.

Vannak olyan térbeli alakzatok, amelyek leírásához két egyenletet célszerű alkalmazni.

4.7. Definíció. Legyen adva az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ és $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ háromváltozós valós függvények, amelynek változói x, y és z. Rögzítsünk valamely c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ számokat. Az $f(x, y, z) = c_1$ és $h(x, y, z) = c_2$ egyenletekkel leírt alakzaton az $\mathcal{A} = \{ P \in X \mid f(x_P, y_P, z_P) = c_1, \quad h(x_P, y_P, z_P) = c_2 \}$ ponthalmazt érjük.

Megjegyzés. Az $f(x, y, z) = c_1$ és $h(x, y, z) = c_2$ egyenletek külön–külön írják le az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{H}$ alakzatokat. Evidens, hogy azon pontok halmaza, amelyek koordinátái mindkét egyenletet kielégítik, megegyezik az $\mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ alakzattal.

Megjegyzés. Tekintsük az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ és a $z^2 - 1 = 0$ egyenleteket. Világos, hogy a két egyenlettel leírt alakzat megegyezik két kör uniójával.

Megjegyzés. Vegyük azt is észre, hogy az $f(x, y, z) = 0$ és $h(x, y, z) = 0$ egyenletekkel leírt térbeli alakzat ugyanaz, mint az $(f(x, y, z))^2 + (h(x, y, z))^2 = 0$ egyenlettel meghatározott alakzat.

A sík egyenlete

4.8. Definíció. Legyen adva a térben egy σ sík. Egy $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$) vektort a σ normálvektorának mondunk, ha $\mathbf{n}$ merőleges a σ síkra.

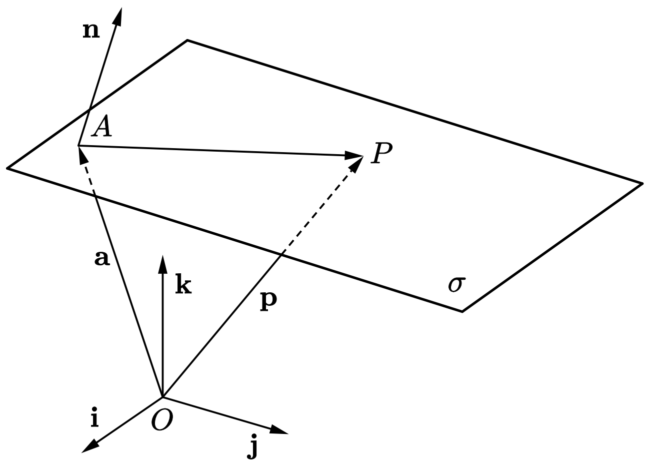
Eviens, hogy egy sík térbeli pozícióját egyértelműen meghatározzuk azzal, ha megadjuk egy pontját és egy normálvektorát.

4.9. Állítás. *Legyen adva egy A pont, amelynek koordinátái (a_1, a_2, a_3), és egy $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ vektor, amelyre fennáll $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$. Tekintsük azt a σ síkot, amely áthalad az A ponton és merőleges az $\mathbf{n}$ vektorra. Ekkor az*

$$n_1(x - a_1) + n_2(y - a_2) + n_3(z - a_3) = 0 \tag{4.1}$$

egyenlet a σ síkot írja le.

Bizonyítás. Vegyünk a térben egy tetszőleges $P\,(x_P, y_P, z_P)$ pontot. Az $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$



27. ábra. *Szemléltetés a 4.9. Állítás bizonyításához.*

egyenlőségből adódik, hogy igaz $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$ és
$\overrightarrow{AP} = (x_P - a_1)\mathbf{i} + (y_P - a_2)\mathbf{j} + (z_P - a_3)\mathbf{k}$.

Könnyű belátni, hogy a P pont rajta van a σ síkon akkor és csak akkor, ha az $\overrightarrow{AP}$ vektor merőleges az $\mathbf{n}$–re. Az $\overrightarrow{AP}$ és $\mathbf{n}$ vektorok pedig pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha a skaláris szorzatukra fennáll $\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AP} = 0$. Alkalmazzuk most a skaláris szorzat kiszámítására vonatkozó 2.27. Állítást. Ily módon azt kapjuk, hogy a P pont illeszkedik a σ síkra akkor és csak akkor, ha a koordinátáival fennáll az

$$n_1(x_P - a_1) + n_2(y_P - a_2) + n_3(z_P - a_3) = 0$$

összefüggés. Ez a tény pedig igazolja az állítást. □

A következő kijelentés szerint ha egy olyan egyenletet veszünk, amely elsőfokú az x, y, z változókra nézve, akkor az egyenlet egy síkot ír le.

4.10. Állítás. *Legyenek a, b, c és e olyan valós számok, melyekre igaz $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Az $a\,x + b\,y + c\,z + e = 0$ egyenlettel leírt alakzat megegyezik azzal a síkkal, amelynek egy normálvektora az $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ vektor és amely áthalad az $\overrightarrow{OT} = -\dfrac{e}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$ helyvektorral meghatározott T ponton.*

Bizonyítás.

Vegyük észre, hogy az állításban szereplő T pont (x_T, y_T, z_T) koordinátáira fennáll

$$x_T = \frac{-a\,e}{a^2 + b^2 + c^2}, \qquad y_T = \frac{-b\,e}{a^2 + b^2 + c^2}, \qquad z_T = \frac{-c\,e}{a^2 + b^2 + c^2}\,.$$

Ennek következtében azt kapjuk, hogy $a\,x_T + b\,y_T + c\,z_T = -e$ teljesül. Eszerint a T pont egy eleme az $a\,x + b\,y + c\,z + e = 0$ egyenlettel leírt alakzatnak.

Tekintsük azt a σ síkot, amely illeszkedik a T pontra és merőleges az $\mathbf{n}$–re. A 4.9. Állítás szerint az

$$n_1(x - x_T) + n_2(y - y_T) + n_3(z - z_T) = 0$$

egyenlet éppen ezt a σ síkot írja le. Ebből pedig a T koordinátira vonatkozó egyenlőség alapján az $a\,x+b\,y+c\,z+e=0$ egyenletet nyerjük. $\square$

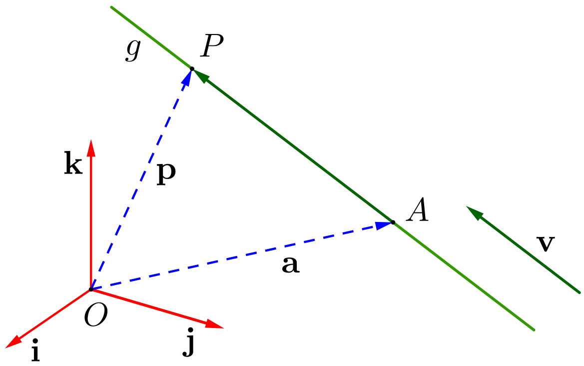
Az egyenes paraméteres vektoregyenlete és egyenletrendszere

4.11. Definíció. Legyen adva a térben egy g egyenes. Egy $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$) vektort a g irányvektorának mondunk, ha $\mathbf{v}$ párhuzamos a g egyenessel.

Nyilvánvaló, hogy egy egyenes térbeli helyét már egyértelműen meghatározzuk azzal, ha megadjuk egy pontját és egy irányvektorát. Állapodjunk meg abban, hogy ezt követően egy P pontnak az O–ra vonatkozó helyvektorát $\overrightarrow{OP}$ mellett $\mathbf{p}$–vel is jelöljük.

4.12. Állítás. *Legyen adva egy A pont és egy $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$ vektor, amelyre fennáll $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$. Tekintsük azt a g egyenest, amely áthalad az A ponton és párhuzamos a $\mathbf{v}$ vektorral. Ez esetben egy P pont rajta van a g egyenesen akkor és csak akkor, ha létezik olyan $t\in\mathbb{R}$ szám, amellyel fennáll $\mathbf{p}=\mathbf{a}+t\,\mathbf{v}$.*

Bizonyítás.



28. ábra. *Szemléltetés a 4.11. Állítás bizonyításához.*

Vegyünk a térben egy tetszőleges P pontot. Az $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$ egyenlőségből adódik, hogy teljesül $\overrightarrow{AP}=\mathbf{p}-\mathbf{a}$.

Evidens, hogy a P pont rajta van a g egyenesen akkor és csak akkor, ha az $\overrightarrow{AP}$ vektor párhuzamos a $\mathbf{v}$ irányvektorral. Mint ismeretes, az $\overrightarrow{AP}$, $\mathbf{v}$ vektorok párhuzamossága pontosan akkor áll fenn, ha van olyan t valós szám, amelyre teljesül az $\overrightarrow{AP}=t\,\mathbf{v}$ összefüggés. Ez viszont egyenértékű a $\mathbf{p}=\mathbf{a}+t\,\mathbf{v}$ egyenlőséggel, ami már a bizonyítás végét jelenti. $\square$

A fenti állítás motivál bennünket arra, hogy kimondjuk a következő definíciót.

4.13. Definíció. Legyen adva egy g egyenes, amely áthalad egy A ponton és párhuzamos egy $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$) vektorral. Ez esetben a $\mathbf{p}=\mathbf{a}+t\,\mathbf{v}$ egyenletet, ahol a paraméternek nevezett t változó befutja az $\mathbb{R}$ valós számhalmazt, a g egyenes paraméteres vektoregyenletének nevezzük.

Megjegyzés. Az előző definícióban szereplő paraméteres vektoregyenlettel kapcsolatban fontos megjegyeznünk, hogy amennyiben a t befutja az $\mathbb{R}$ valós számhalmazt, akkor a $\mathbf{p} = \mathbf{a} + t\,\mathbf{v}$ helyvektorral meghatározott P pont befutja a teljes g egyenest.

Evidens, hogy két vektor egyenlősége pontosan akkor áll fenn, ha mindhárom koordinátájuk megegyezik. Ily módon egy vektoregyenletnek három skaláregyenlet felel meg.
4.14. Definíció. Legyen adva egy g egyenes, amely áthalad egy $A\,(a_1, a_2, a_3)$ ponton és párhuzamos egy $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) vektorral. Ez esetben az

$$x = a_1 + t\,v_1, \quad y = a_2 + t\,v_2, \quad z = a_3 + t\,v_3 \tag{4.2}$$

egyenleteket, amelyekben t a paramétert jelöli, a g egyenes paraméteres egyenletrendszerének mondjuk.

Térbeli egyenes leírása két egyenlettel

Mivel az egyenest elő lehet állítani két sík metszeteként, egy térbeli egyenest mindig le tudunk írni két olyan egyenlettel, amelyek az x, y, z koordinátákra nézve lineárisak.

Legyen adva a térben egy g egyenes. Vegyük g–nek egy $A\,(a_1, a_2, a_3)$ pontját és egy $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ irányvektorát. A $\mathbf{v}$ vektor koordinátái közül legalább egy különbözik 0–tól. Tegyük fel, hogy most fennáll $v_1 \neq 0$. Ez esetben az $\mathbf{m} = v_2\mathbf{i} - v_1\mathbf{j}$, $\mathbf{n} = v_3\mathbf{i} - v_1\mathbf{k}$ vektorok különböznek $\mathbf{0}$–tól és nem párhuzamosak egymással. Mivel teljesül $\mathbf{m} \cdot \mathbf{v} = 0$ és $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, az $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ vektorok merőlegesek $\mathbf{v}$–re.
Tekintsük azon α, β síkokat, amelyek illeszkednek az A ponthoz, továbbá α merőleges az $\mathbf{m}$ vektorra és β merőleges az $\mathbf{n}$–re. Vegyük észre, hogy a g egyenes mindkét síkban benne van, tehát fennáll $\alpha \cap \beta = g$. Amennyiben vesszük az α, β síkokat leíró egyenleteket, akkor a g metszésvonal pontjai lesznek azok a térbeli pontok, amelyek mindkét egyenletet kielégítik.

A fentiek szerint igaz a következő kijelentés.
4.15. Állítás. *Legyen adva egy g egyenes, amely áthalad egy $A\,(a_1, a_2, a_3)$ ponton és párhuzamos egy $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ vektorral, amelyre fennáll $v_1 \neq 0$. Ez esetben a*

$$v_2(x - a_1) - v_1(y - a_2) = 0, \qquad v_3(x - a_1) - v_1(z - a_3) = 0 \tag{4.3}$$

egyenletekkel leírt alakzat megegyezik a g egyenessel.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az előző állításban szereplő két lineáris egyenlet egyenértékű a $\big(v_2(x-a_1) - v_1(y-a_2)\big)^2 + \big(v_3(x-a_1) - v_1(z-a_3)\big)^2 = 0$ másodfokú egyenlettel.

A gömbfelület normálegyenlete

Mint ismeretes, ha adva van egy Q pont és egy r pozitív valós szám, akkor a Q centrumú és r sugarú gömbfelületen a $\mathcal{G}(Q, r) = \{\, P \in X \mid QP = r \,\}$ alakzatot értjük.
4.16. Állítás. *Legyen adva egy Q pont, amelynek koordináta–hármasa (q_1, q_2, q_3), és egy r pozitív szám. Ekkor az*

$$(x - q_1)^2 + (y - q_2)^2 + (z - q_3)^2 - r^2 = 0 \tag{4.4}$$

egyenlet a $\mathcal{G}(Q, r)$ *gömbfelületet írja le.*

Bizonyítás.

Tekintsünk a térben egy tetszőleges $P\,(x_P, y_P, z_P)$ pontot és vegyük a $\overrightarrow{QP} = (x_P - q_1)\mathbf{i} + (y_P - q_2)\mathbf{j} + (z_P - q_3)\mathbf{k}$ vektort. A P pont rajta van a gömbfelületen akkor és csak akkor, ha fennáll $|\overrightarrow{QP}|^2 = r^2$. Ez a feltétel viszont egyenértékű azzal, hogy teljesül $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QP} - r^2 = 0$. A skaláris szorzat kiszámítására vonatkozó formulát alkalmazva azt kapjuk, hogy a P pont pontosan akkor van rajta a $\mathcal{G}(Q, r)$ gömbfelületeten, ha koordinátáival teljesül az

$$(x_P - q_1)^2 + (y_P - q_2)^2 + (z_P - q_3)^2 - r^2 = 0$$

összefüggés. $\square$

Megjegyzés. A fenti állításban szereplő egyenletet a $\mathcal{G}(Q, r)$ gömbfelület normálegyenletének nevezzük.

5) A gömbi geometria alapjai

A felszínnel kapcsolatos fogalmak

Célszerű felidézni, a poliéder felszínének definícióját.

5.1. Definíció. Legyen adva egy Ω poliéder, melynek lapjai az $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_l$ $(l \geq 4)$ sokszögek. Vegyük a lapok $T(\mathcal{S}_1), \ldots, T(\mathcal{S}_l)$ területeit. Az Ω poliéder felszínén az $F(\Omega) = \sum_{i=1}^{l} T(\mathcal{S}_i)$ számot *(azaz a poliédert határoló lapok területeinek az összegét)* értjük.

Megjegyzés. Evidens, hogy amennyiben az Ω_1 és Ω_2 olyan konvex poliéderek, melyekre fennáll $\Omega_1 \subset \Omega_2$, akkor a felszíneikre teljesül az $F(\Omega_1) \leq F(\Omega_2)$ egyenlőtlenség.

Egy $\mathcal{T}$ korlátos konvex test felszínét az általa tartalmazott konvex poliéderek alapján definiáljuk.

5.2. Definíció. A $\mathcal{T}$ korlátos konvex test felszínén az $F(\mathcal{T}) = \sup\{\, F(\Omega) \mid \Omega \text{ konvex poliéder, } \Omega \subset \mathcal{T} \}$ számot értjük. Más szóval a $\mathcal{T}$ korlátos konvex test $F(\mathcal{T})$ felszíne az általa tartalmazott konvex poliéderek felszíneinek a szupremuma. Az $F(\mathcal{T})$ számot egyúttal a $\mathcal{T}$ testet határoló felület felszínének is mondjuk.

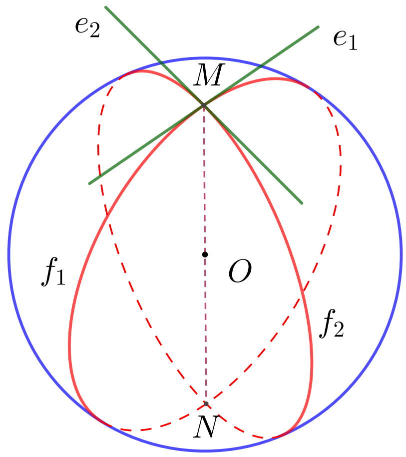
Legyen adott egy O pont és egy r pozitív valós szám. Az O középponttal és r sugárral meghatározott gömbfelületen a $\mathcal{G}(O, r) = \{\ P \in X \mid OP = r\ \}$ alakzatot értjük.

A $\mathcal{B}(O, r) = \{\ P \in X \mid OP \leq r\ \}$ alakzatot az O centrummal és r sugárral vett zárt gömbtestnek mondjuk. A $\mathcal{B}(O, r)$ zárt gömbtestet a $\mathcal{G}(O, r)$ gömbfelület határolja.

Megjegyzés. Ismeretes, hogy a $\mathcal{B}(O, r)$ gömbtest térfogata $V = \dfrac{4}{3} r^3 \pi$. A $\mathcal{B}(O, r)$ gömbtest, illetve az őt határoló $\mathcal{G}(O, r)$ gömbfelület felszíne pedig $F = 4 r^2 \pi$.

A gömbi geometria alapfogalmai

A $\mathcal{G}(O,r)$ gömbfelület M, N pontjait átellenes pontoknak nevezzük, ha az MN szakasz a gömbnek egy átmérője, azaz ha O felezőpontja az MN szakasznak. Ha egy sík metszi a $\mathcal{G}(O,r)$ gömbfelületet, akkor a sík és a gömb metszete egy kör. Amennyiben a sík tartalmazza a gömbfelület O centrumát, akkor a metszet középpontja O és sugara r. Az O centrumú és r sugarú köröket mondjuk a $\mathcal{G}(O,r)$ gömbfelület főköreinek.



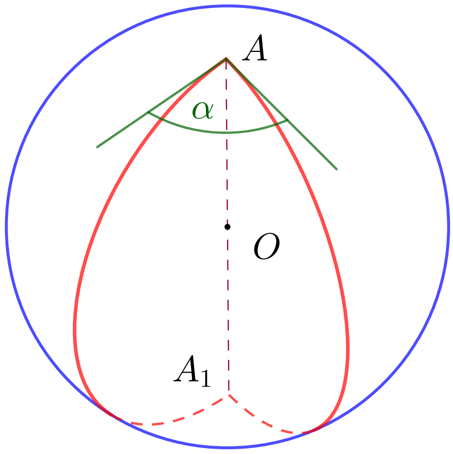
29. ábra. *Az f_1, f_2 gömbi főkörök az M metszéspontban vett érintőkkel.*

Két főkör mindig a gömb két átellenes pontjában metszi egymást. Legyen f_1 és f_2 olyan gömbi főkörök, amelyek az M, N átellenes pontokban metszik egymást. Ezen főköröknek az M metszéspontban vett érintői legyenek az e_1, e_2 egyenesek. Az f_1, f_2 főkörök hajlásszögén az e_1, e_2 érintőegyenesek szögét értjük. (Lásd a 29. ábrát.)

A gömbi geometriában a főkörök játszák az egyenesek szerepét. Ha az A, B gömbi pontok nem átellenesek, akkor pontosan egy olyan főkör van, amely áthalad az A, B pontokon. Ezt a főkört az a sík metszi ki a gömbből, amely tartalmazza az O, A, B pontokat. A főkört az A, B pontok két körívre osztják fel. Ezek közül a rövidebb körív hosszát mondjuk az A, B pontok gömbi távolságának, melyet jelöljön $d_{\mathcal{G}}(A,B)$. Ha φ az $AOB\sphericalangle$ konvex szög radiánban vett mértéke, akkor fennáll $d_{\mathcal{G}}(A,B) = r\,\varphi$.

5.3. Definíció. Tekintsünk egy olyan konvex lapszögtartományt, amelynek éle áthalad a gömb O centrumán. A lapszög és a gömbfelület metszetét gömbkétszögnek nevezzük. Ezen gömbkétszög mértékén (illetve szögén) a lapszögtartomány mértékét értjük. A meghatározó lapszög élének a gömbfelülettel vett (átellenes) metszéspontjait mondjuk a gömbkétszög csúcsainak. A lapszög két lapja a gömböt két félfőkörben metszi. Ezeket a félköröket hívjuk a gömbkétszög oldalainak.

Megjegyzés. Igazolható, hogy amennyiben a gömbkétszög radiánban vett mértéke α, akkor a felszíne $F = 2\,\alpha\,r^2$.



30. ábra. *Egy α szögű gömbkétszög az A, A_1 átellenes csúcsokkal.*

A háromélű konvex szöglettartomány

5.4. Definíció. Legyen adott egy $ABC\triangle$ háromszöglemez és egy O pont, amely nincs rajta a háromszög síkján. Az O kezdőpontú és a háromszöglemez pontjain áthaladó félegyenesek unióját háromélű konvex szöglettartománynak (vagy más szóval triédernek) nevezzük. Ezt a háromélű szöglettartományt, vagyis a triédert, a továbbiakban $Tr(O,A,B,C)$ fogja jelölni.

Az O pontot a háromélű szöglet csúcsának, az $[\,O,A\,\rangle$, $[\,O,B\,\rangle$ és $[\,O,C\,\rangle$ félegyeneseket a szöglet éleinek nevezzük. Az $AOB\sphericalangle$, $BOC\sphericalangle$, $COA\sphericalangle$ szögtartományokat mondjuk a konvex szöglet oldalainak. Ezek $\gamma_o = AOB\sphericalangle$, $\alpha_o = BOC\sphericalangle$, $\beta_o = COA\sphericalangle$ mértékét nevezzük a triéder oldalszögeinek.

A $Tr(O,A,B,C)$ triéder mindhárom éléhez hozzá lehet rendelni egy lapszöget az alábbiak szerint. Tekintsük az $a = \langle\,O,A\,\rangle$ élegyenest. Az $[\,a,B\,\rangle$ és $[\,a,C\,\rangle$ félsíkokkal határolt $BaC\sphericalangle$ lapszöget a konvex szöglet $[\,O,A\,\rangle$ élhez tartozó szögének mondjuk. Ennek mértékét jelölje α. A másik két élhez tartozó lapszögek, illetve azok mértékei legyenek $\beta = CbA\sphericalangle$ és $\gamma = AcB\sphericalangle$.

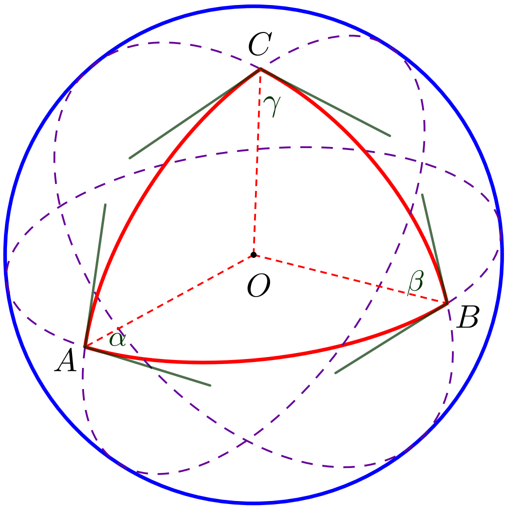
A $Tr(O,A,B,C)$ háromélű konvex szöglet szögein az α, β, γ szögeket értjük.

A gömbháromszöggel kapcsolatos fogalmak és tételek

5.4. Definíció. Tekintsük a $\mathcal{G}(O,r)$ gömfelületet és azon olyan A, B, C pontokat, amelyek nincsenek egy főkörön. A gömbfelületen az A, B, C csúcsokkal meghatározott gömbháromszögön az $ABC\triangle_{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(O,r) \cap Tr(O,A,B,C)$ alakzatot értjük.

A fenti definíció szerint az $ABC\triangle_{\mathcal{G}}$ gömbháromszög a $\mathcal{G}(O,r)$ gömbfelület és a $Tr(O,A,B,C)$ háromélű konvex szöglettartomány metszete.

A $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, $\widehat{AB}$ főköríveket, illetve azok a, b, c ívhosszait nevezzük az $ABC\triangle_{\mathcal{G}}$ gömbháromszög oldalainak. Ezen köríveknek felelnek meg az $\alpha_o = BOC\sphericalangle$, $\beta_o = COA\sphericalangle$



31. ábra. *Az $ABC\triangle_{\mathcal{G}}$ gömbháromszög és annak α, β, γ szögei.*

és $\gamma_o = AOB\sphericalangle$ középponti szögek, melyeket oldalszögeknek is szokás nevezni. Világos, hogy $ABC\triangle_{\mathcal{G}}$ gömbháromszög oldalaira teljesül $a = r\,\alpha_o$, $b = r\,\beta_o$ és $c = r\,\gamma_o$.

Az $ABC\triangle_{\mathcal{G}}$ gömbháromszög szögein az őt meghatározó $Tr(O, A, B, C)$ háromélű konvex szöglet α, β, γ szögeit értjük. Ezeket megkaphatjuk úgy is, hogy előbb vesszük az oldalakat tartalmazó főkörök érintőegyeneseit az A, B, C csúcsokban, majd azokon a főköríveknek megfelelő félegyeneseket. (Lásd a 31. ábrát.)

Az r sugarú gömbön lévő $ABC\triangle_{\mathcal{G}}$ gömbháromszögnél az a, b, c oldalak és az α, β, γ szögek közötti kapcsolatokat írja le a gömbi szinusztétel és az oldalakra vonatkozó koszinusztétel. Ezeket tekintik a gömbi trigonometria alaptételeinek.

5.5. Tétel. *Az r sugarú gömbön vett $ABC\triangle_{\mathcal{G}}$ gömbháromszög oldalai és szögei között fennáll a* $\dfrac{\sin(a/r)}{\sin(b/r)} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ *összefüggés.*

5.6. Tétel. *Az r sugarú gömbre eső $ABC\triangle_{\mathcal{G}}$ gömbháromszög oldalaira és szögeire tejesül*

$$\cos(c/r) = \cos(a/r)\cdot\cos(b/r) + \sin(a/r)\cdot\sin(b/r)\cdot\cos\gamma\,.$$

A fentiek során előbb a szinusztétel, majd a koszinusztétel lett kimondva.

A gömbháromszögekre (illetve azok oldalaira) is igaz a háromszögegyenlőtlenség.

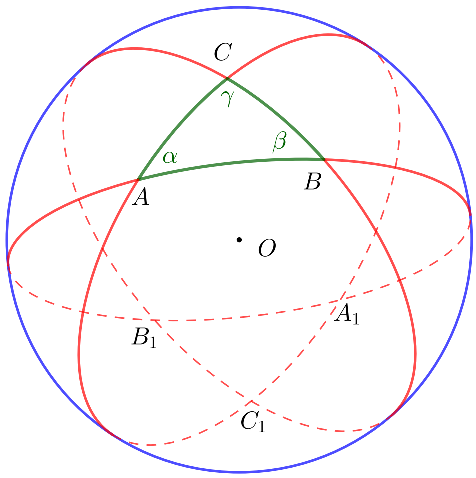
5.7. Tétel. *Tetszőleges $ABC\triangle_{\mathcal{G}}$ gömbháromszög oldalaira fenáll az $a + b > c$ egyenlőtlenség.*

A gömbháromszög felszíne

Az $\mathcal{G}(O, r)$ gömfelületeten vegyünk egy $ABC\triangle_{\mathcal{G}}$ gömbháromszöget, melynek szögei α, β és γ. A gömbháromszög oldalait tartalmazó főkörök a gömböt nyolc gömbháromszögre osztják fel. A főkörök által meghatározott gömbkétszögek, illetve azok felszíneinek alapján lehet igazolni az alábbi tételt.

5.8. Tétel. *Az r sugarú gömbön vett $ABC\triangle_{\mathcal{G}}$ gömbháromszög felszínére fennáll az* $F(ABC\triangle_{\mathcal{G}}) = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ *összefüggés.*

5.9. Következmény. *Tetszőleges $ABC\triangle_{\mathcal{G}}$ gömbháromszögben a szögek összegére teljesül az* $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ *egyenlőtlenség.*



32. ábra. *Egy $ABC\triangle_{\mathcal{G}}$ gömbháromszög és az oldalait tartalmazó főkörök.*